GEOMETRIA ANALITICA

CHARLES H. LEHMANN

Solucionario

por: **R. FIGUEROA G.**

Editorial
AMERICA

LIMA - PERU

Solucionario de
GEOMETRIA ANALITICA
(CH. H. Lehmann)

por : R. Figueroa G.

SEXTA EDICION
(JULIO - 2002)

Incluye una selección de problemas resueltos del texto de
F. J. De La Borbolla

© Publicado en :
Ediciones e Impresiones Gráficas América S. R. L.
Jr. Loreto 1696 Breña Telefax : 423-8469

Tipeo y diagramación : Abilia Sánchez P.
Dibujos y carátula : Jorge Galarza Estrella

HECHO EL DEPOSITO LEGAL N° 15010599-2577
RAZON SOCIAL : **Ricardo Figueroa Garcia**
DOMICILIO : Jr. Loreto 1696 Breña

PROLOGO

Al publicar este libro, ha sido mi intención, contribuir el interés y la afición del estudiante por el estudio de la Geometría Analítica. Debo advertir de antemano que este trabajo no tiene pretensión alguna de ser un libro didáctico o de enseñanza teórica.

Considero que el libro de Ch. H. Lehmann es eminéntemente didáctico, por ello me permití extraer, en cada capítulo, algunos teoremas y demostrarlos, para después resolver los problemas de cada grupo. Particularmente me he esforzado para que los problemas fuesen resueltos en forma clara y sencilla, de manera que no sean estorbados por operaciones aritméticas engorrosas.

Al final de cada capítulo incluye problemas resueltos, de los propuestos en el texto de los hermanos De La Borbolla, por considerarlos, de mayor grado de dificultad que los de Lehmann. Es indudable que esto permitirá al estudiante adquirir mayor destreza para resolver otros tipos de problemas que se pudieran presentar en el desarrollo del curso de Geometría Analítica.

Aprovecho la oportunidad para expresar mi agradecimiento a Ediciones e Impresiones Gráficas AMERICA, cuyo personal no ha escatimado esfuerzos para resolver las dificultades inherentes a la publicación de la obra. Asimismo, una mensión de gratitud va dirigida al Sr. Jorge Galarza estrella y en especial a la Srta. Abilia Sánchez Paulino por su dedicación y abnegada labor en diagramar el texto.

El Autor

CONTENIDO

1 SISTEMAS DE COORDENADAS 1

1.1 Segmento rectilíneo dirigido 1
1.2 Sistema coordenado lineal 2
1.3 Sistema coordenado en el plano 3
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 1 4
1.4 Distancia entre dos puntos 11
1.5 División de un segmentos en una razón dada 11
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 2 12
1.6 Pendiente de una recta 20
1.7 Angulo entre dos rectas 20
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 3 22
1.8 Demostraciones de teoremas geométricos por el método analítico 29
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 4 29

2 GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

2.1 Primer problema fundamental de la geometría analítica Gráfica de una ecuación 41
2.1.1 Intersecciones con los ejes coordenados 41
2.1.2 Criterios de simetría 42
2.1.3 Extensión de una curva 43
2.1.4 Asíntotas 43
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 6 45

2.1.5 Ecuaciones Factorizables 61
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 7 61
2.2 Segundo problema Fundamental de la geometría analítica
Ecuación de un lugar geométrico 65
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 8 66

3 LA LINEA RECTA 75

3.1 Formas de la ecuación de una recta 75
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 9 76
3.2 Forma general de la ecuación de una recta 84
3.3 Posiciones relativas de dos rectas 84
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 10 85
3.4 Forma normal de la ecuación de una recta 96
3.5 Reducción a la forma normal 96
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 11 97
3.6 Aplicaciones de la forma normal 103
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 12 104
3.7 Area de un triángulo 116
3.8 Familia de rectas 117
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 13 117
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 14 124
EJERCICIOS DE REPASO
(Texto de : F. J. De La Borbolla) 134

4 ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA 145

4.1 Definición 145
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 15 146
4.2 Forma general de la ecuación de una circunferencia 153
4.3 La circunferencia y tres condiciones 154
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 16 154
4.4 Familia de circunferencias que pasan por la
intersección de dos circunferencias 167

4.4.1 Eje radical 168
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 17 168
4.5 Tangente a una circunferencia 176
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 18 177
4.6 Teoremas y problemas de lugares geométricos relativos a la circunferencia 186
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 19 186
EJERCICIOS DE REPASO
(Texto de : F. J. De La Borbolla) 193

5 TRANSFORMACION DE COORDENADAS 199

5.1 Traslación de ejes coordenados 199
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 20 200
5.2 Rotación de ejes coordenados 205
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 21 206
5.3 Simplificación de ecuaciones por transformación de coordenadas 214
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 22 215

6 LA PARABOLA 225

6.1 Definición 225
6.2 Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado 225
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 23 226
6.3 Ecuación de una parábola de vertice (h , k) y eje paralelo a un eje coordenado 233
6.4 Ecuación general de una parábola 234
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 24 234
6.5 Ecuación de la tangente a una parábola 241
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 25 243
EJERCICIOS DE REPASO
(Texto de : F. J. De La Borbolla) 255

7 LA ELIPSE 267

7.1 Definición 267
7.2 Ecuación de una elipse de centro el origen y ejes coordenados los ejes de la elipse 268
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 27 268
7.3 Ecuación de una elipse de centro (h , k) y ejes paralelos a los ejes coordenados 277
7.4 Ecuación general de la elipse 278
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 28 278
7.5 Ecuación de la tangente a una elipse 284
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 29 290
EJERCICIOS DE REPASO
(Texto de: F. J. De La Borbolla)

8 LA HIPERBOLA 307

8.1 Definición 307
8.2 Primera ecuación ordinaria de la hipérbola 307
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 30 308
8.3 Asíntotas una hipérbola 215
8.4 Hipérbola equilátera o rectangular 316
8.5 Hipérbolas conjugadas 316
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 31 316
8.6 Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola 323
8.7 Forma general de la ecuación de una hipérbola 324
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 32 324
8.8 Ecuación de la tangente a una hipérbola 331
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 33 333
EJERCICIOS DE REPASO
(Texto de : F. J. De La Borbolla) 341

9 ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO 347

9.1 Transformación de la ecuación general por rotación de ejes coordenados 347
9.2 Tipos de cónicas 348
9.3 Invariantes 348
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 34 348
9.4 Definición general de la cónica 360
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 35 360
9.5 Tangente a la cónica general 367
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 36 367

10 COORDENADAS POLARES 377

10.1 Sistema de coordenadas polares 377
10.2 Pares de coordenadas para un punto 378
10.3 Paso de coordenadas polares a rectangulares y viceversa 378
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 37 378
10.4 Trazado de curvas en coordenadas polares 385
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 38 386
10.5 Intersecciones de curvas dadas en coordenadas polares 398
10.6 Distancia entre dos puntos en coordenadas polares 399
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 39 399
10.7 Ecuación de una recta en coordenadas polares 407
10.8 Ecuación de la circunferencia en coordenadas polares 408
10.9 Ecuación general de las cónicas en su forma polar 408
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 40 409
10.10 Problemas relativos a lugares geométricos en coordenadas polares 420
Solucionario de los EJERCICIOS . Grupo 41 420

Capítulo 1

SISTEMAS DE COORDENADAS

1.1 SEGMENTO RECTILINEO DIRIGIDO

La posición de una línea recta comprendida entre dos puntos, tales como A y B, se llama *segmento* de recta. Cuando se refiere tanto a la longitud como al sentido de un segmento de recta se llama *segmento orientado*. Entonces, entendemos por segmento aquel cuyo sentido positivo ha sido elegido.

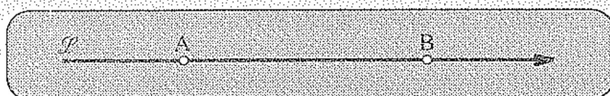


FIGURA 1

Así, la recta $\mathscr{L}$ está orientada como lo indica la flecha (Figura 1.1), lo cual significa que cualquier longitud medida de izquierda a derecha sobre la recta se considere en sentido positivo. Decimos entonces que el segmento $\overline{AB}$ es positivo, en tanto que el segmento $\overline{BA}$ es negativo. El sentido de un segmento será indicado por el orden en que se escriben los extremos del segmento. Por tanto, tenemos la relación

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BA} = 0$$

Consideremos la posición de un tercer punto C, sobre el segmento orientado, con relación a los puntos A y B.

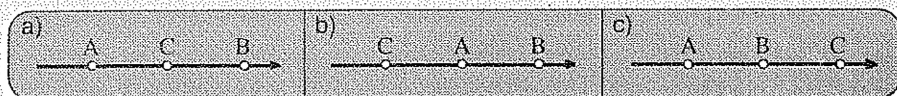


FIGURA 1.2

En la Figura 2.2a : $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ (1)
En la Figura 2.2b : $\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB} \Rightarrow \overline{AB} = -\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CB}$
En la Figura 2.2c : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{CB}$
En consecuencia, para las tres posiciones ilustradas, es válido la misma relación entre los segmentos. Esta relación puede escribirse en la forma más conveniente.

$$\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA} = 0$$

1.2 SISTEMA COORDENADO LINEAL

Consideremos la recta real X'X cuya dirección positiva es de izquierda a derecha, y sea O un punto fijo sobre esta línea.



FIGURA 1.3

Si A es un punto de X'X situado a la derecha de O, la longitud $\overline{OA}$ puede considerarse como unidad de longitud. Entonces el punto P, situado también a la derecha de O, contiene x veces la unidad adoptada de longitud y diremos que el punto P *corresponde* al número *positivo* x. Análogamente si P_2 es el punto situdo a la izquierda de O, entonces diremos que el punto P_2 *corresponde* al número *negativo* x_2.

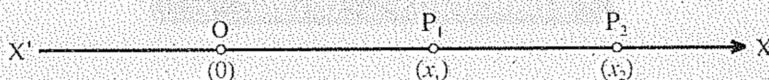
Según esto, hemos construido un esquema por medio del cual se establece una correspondencia biunívoca entre dos puntos de una recta y los números reales. Tal esquema se llama un *sistema coordenado lineal*.

Con referencia a la Figura 1.3, la recta X'X se llama *eje* y el punto O es el *origen* del sistema coordenado lineal. El punto P con su coordenada (x) es la representación geométrica o gráfica del número real x, y la coordenada (x) es la *representación analítica* del punto P. Juntos se escribe : $P(x)$

TEOREMA 1.1 *Longitud de un segmento dirigido*

En un sistema coordenado lineal, la longitud del segmento dirigido que une dos puntos dados se obtiene, en magnitud y signo, restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo.

Demostración. En efecto, sea la recta orientada X'X



Según la relación (1) de la Figura 2.2a, tenemos :

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + \overline{P_1P_2} = x_2$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Si representamos por d la distancia *no dirigida* entre P_1 y P_2, escribiremos

$$\boxed{d = |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1|} \qquad (2)$$

1.3 SISTEMA COORDENADO EN EL PLANO

La estructura del sistema de coordenadas en el plano consiste en un par de rectas orientadas perpendiculares, llamados ejes coordenados. La recta horizontal es el eje X, la vertical es el eje Y, y su intersección el *origen*.

Las cuatro partes en que el plano queda dividido por los ejes coordenados se llaman *cuadrantes* y se designan por I , II, III y IV en sentido contrario al de las manecillas del reloj. (Figura 1.4).

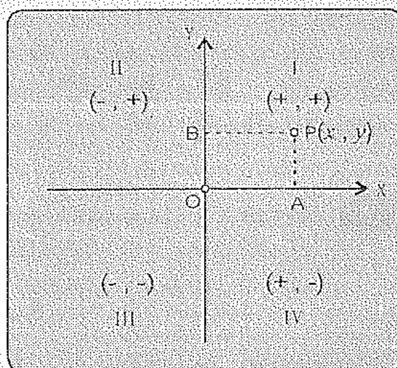


FIGURA 1.4

Un punto se indica dando su sentido y distancia respecto a los ejes coordenados. El segmento orientado $\overline{OA} = \overline{BP}$ se representa por x y se llama *abscisa* del punto P. El segmento orientado $\overline{OB} = \overline{AP}$ se representa por y y se llama *ordenada* de P. Estas dos cantidades se denominan *coordenadas* del punto P y se representa por (x , y).

Si un punto está a la derecha del eje Y, su abscisa es positiva, si está a la izquierda del eje Y, su abscisa es negativa. Si el punto esta arriba del eje X su ordenada es positiva, si está abajo del eje X, su ordenada es negativa.

EJERCICIOS . *Grupo 1*

1 Si A y B son dos puntos diferentes de una recta dirigida, demostrar que:

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0 \text{ y } \overline{AA} = \overline{BB} = 0$$

Demostración. Si designamos el segmento $\overline{AB}$ como positivo, entonces el segmento $\overline{BA}$ será negativo. Como ambos segmentos son de la misma magnitud, entonces : $\overline{AB} = -\overline{BA} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{BA} = 0$

Si en esta relación hacemos :

$$\begin{cases} B = A \Rightarrow \overline{AA} + \overline{AA} = 0 \Rightarrow 2\overline{AA} = 0 \Leftrightarrow \overline{AA} = 0 \\ A = B \Rightarrow \overline{BB} + \overline{BB} = 0 \Rightarrow 2\overline{BB} = 0 \Leftrightarrow \overline{BB} = 0 \end{cases}$$ ■

2 Demostrar que las relaciones (d) , (e) y (f) son casos particulares de la relación (2) del Artículo 2.

Demostración. Probaremos que las relaciones

d) $\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA}$, e) $\overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA}$, f) $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$

están incluidas en la relación fundamental : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

En efecto, en d) : $\overline{BC} - \overline{AC} = -\overline{AB} \Rightarrow \overline{BC} + \overline{AB} = \overline{AC}$

Ahora en e) : $-\overline{BC} - \overline{AB} = -\overline{AC}$, por (-1) : $\overline{BC} + \overline{AB} = \overline{AC}$

y en f) : $-\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ ■

3 Si A, B, C y D son cuatro puntos distintos cualesquiera de una recta dirigida, demostrar que, para todas las ordenaciones posibles de estos puntos sobre la recta, se verifica la igualdad

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$$

Demostración. En total hay 4! = 24 ordenaciones posibles de estos puntos y que son las siguientes

1. A - B - C - D	7. B - A - C - D	13. C - A - B - D	19. D - A - B - C
2. A - B - D - C	8. B - A - D - C	14. C - A - D - B	20. D - A - C - B
3. A - C - B - D	9. B - C - A - D	15. C - B - A - D	21. D - B - A - C
4. A - C - D - B	10. B - C - D - A	16. C - B - D - A	22. D - B - C - A
5. A - D - B - C	11. B - D - A - C	17. C - D - A - B	23. D - C - A - B
6. A - D - C - B	12. B - D - C - A	18. C - D - B - A	24. D - C - B - A

Considerando solamente segmentos dirigidos de longitudes positivas, probaremos que las relaciones 4 y 19 están incluidas en igualdad dada.

4. $\underbrace{\overline{AC} + \overline{CD}} + \overline{DB} = \overline{AB}$ A C D B

$\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AB} - \overline{DB} = \overline{AB} - (\overline{CB} - \overline{CD})$

$= \overline{AB} - \overline{CB} + \overline{CD}$

$= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

19. $\overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{DC}$

$-\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{BC} = -\overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ ■

4 Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son:
(-5) y (6) ; (3) y (-7) ; (-8) y (-12)

Solución. Haciendo uso de la relación (**2**) se tiene :

Si $P_1(-5)$ y $P_2(6) \Rightarrow d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = |6 - (-5)| = 11$

$P_1(3)$ y $P_2(-7) \Rightarrow d(P_1, P_2) = |-7 - 3| = |-10| = 10$

$P_1(-8)$ y $P_2(-12) \Rightarrow d(P_1, P_2) = |-12 - (-8)| = |-4| = 4$ ■

5 La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos es (-2), hallar el otro punto. (Dos casos).

Solución. Supongamos que $P_1(-2)$ y $P_2(x_2)$

Entonces, si $d(P_1, P_2) = 9 \Rightarrow |x_2 - (-2)| = 9$

$\Rightarrow |x_2 + 2| = 9 \Leftrightarrow x_2 + 2 = \pm 9$

En consecuencia, hay dos soluciones : $P_2(7)$ o $P_2(-11)$ ■

6 En un sistema coordenado lineal, $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ son los puntos extremos dados de un segmento dirigido. Demostrar que la coordenada x de un punto P que divide a $\overline{P_1P_2}$ en la razón $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$, es

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad , \quad r \neq -1$$

Demostración. En efecto, por el Teorema 1.1 se tiene : $\overline{P_1P} = x - x_1$ y $\overline{PP_2} = x_2 - x$

Luego, si $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{P_2P}} \Rightarrow r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$

de donde, despejando x obtenemos : $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$, $r \neq -1$ ■

7 Haciendo r = 1 en la fórmula obtenida en el ejercicio 6, demostrar que la

coordenada del punto medio de un segmento rectilíneo es la media aritmética de las coordenadas de los puntos extremos.

Demostración. En efecto, si r = 1, en la fórmula anterior se tiene :

$$x = \frac{x_1 + (1)x_2}{1 + 1} \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$ ■

8 Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos (-7) y (-19).

Solución. Sean $P_1(-7)$, $P_2(-19)$ y los puntos de trisección $P(x_3)$ y $Q(x_4)$

Si P y Q dividen al segmento $\overline{P_1P_2}$ en tres partes iguales, entonces

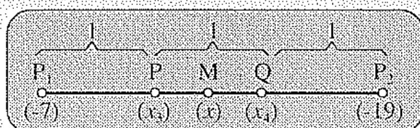


FIGURA 1.5

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_3 - (-7)}{-19 - (x_3)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_3 = -11$$

Q es punto medio de $\overline{PP_2} \Rightarrow x_4 = \frac{-11 - 19}{2} = -15$

M es punto medio del segmento $\overline{P_1P_2} \Rightarrow x = \frac{-7 - 19}{2} = -13$

$$\therefore \quad P(-11) \ , \ Q(-15) \ y \ M(-13)$$ ■

9 Un extremo de un segmento dirigido es el punto (-8) y su punto medio es (3). Hallar la coordenada del otro extremo.

Solución. Sean $P_1(-8)$, M(3) y $P_2(x_2)$; luego, si

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 3 = \frac{-8 + x_2}{2} \Leftrightarrow x_2 = 14 \Rightarrow P_2(14)$$ ■

10 Los extremos de un segmento dirigido son los puntos $P_1(4)$ y $P_2(-2)$. Hallar la razón $(\overline{P_2P}) : (\overline{PP_1})$ en que el punto P(7) divide a este segmento.

Solución. Si $r = \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PP_1}} \Rightarrow r = \frac{x - x_2}{x_1 - x}$

$$\Rightarrow r = \frac{7 - (-2)}{4 - 7} \text{ , de donde : } r = -3$$ ■

11 Un cuadrado, de lado igual a $2a$, tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.

Solución. En la Figura 1.6 podemos observar que $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel$ Eje Y ; luego, la abscisa de A y D es a, (derecha del eje Y) y la de B y C es $-a$ (izquierda del eje Y).

$\overline{BA} \parallel \overline{CD} \parallel$ Eje X; luego, la ordenada de A y B es a (sobre el eje X); y la de C y D es $-a$ (de bajo del eje X).

Por tanto, las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado son :

$A(a \,,\, a)$, $B(-a \,,\, a)$, $C(-a \,,\, -a)$ y $D(a \,,\, -a)$ ■

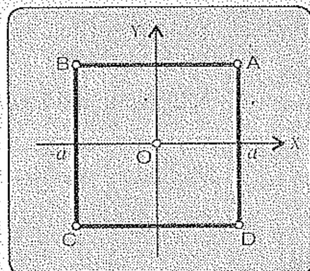


FIGURA 1.6

12 Tres vértices de un rectángulo son los puntos (2 , -1) , (7 , -1) y (7 , 3). Hallar el cuarto vértice y su área.

Solución. Sean A(2 , -1) , B(7 , -1) , C(7 , 3) y D(x , y)

Por el Teorema 1.1 : $\overline{AB} = x_B - x_A = 7 - 2 = 5$

$\overline{DC} = x_C - x_D = 7 - x$

Como $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow 5 = 7 - x \Leftrightarrow x = 2$

Análogamente : $\overline{BC} = y_C - y_B = 3 - (-1) = 4$

$\overline{AD} = y_D - y_A = y - (-1) = y + 1$

Si $\overline{BC} = \overline{AD} \Rightarrow 4 = y + 1 \Leftrightarrow y = 3$

Por lo que, el cuarto vértice es, D(2 , 3)

$a(ABCD) = |\overline{AB}| \times |\overline{BC}| = 5 \times 4 = 20\ u^2$ ■

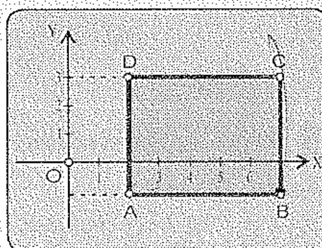


FIGURA 1.7

13 Los vértices de un triángulo rectángulo son A(1 , -2) , B(4 , -2) y C(4 , 2). Determinar las longitudes de los catetos, el área del triángulo y la longitud de la hipotenusa.

Solución. Por el Teorema 1.1

$|\overline{AB}| = |x_B - x_A| = |4 - 1| = 3$

$|\overline{BC}| = |y_C - y_A| = |2 - (-2)| = 4$

Luego, $a(\Delta ABC) = \frac{1}{2} |\overline{AB}| \times |\overline{BC}| = \frac{1}{2}(3)(4) = 6\ u^2$

Por el Teorema de Pitágoras: $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 25$

$\therefore\ |\overline{AC}| = 5$ ■

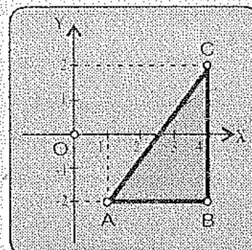


FIGURA 1.8

14 En el triángulo rectángulo del Ejercicio 13, determinar primero los puntos medios de los catetos y, después, el punto medio de la hipotenusa.

Solución. Sea M el punto medio de $\overline{AB} \Rightarrow M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-2-2}{2}\right) \Rightarrow M(5/2, -2)$

N el punto medio de $\overline{BC} \Rightarrow N = \left(\frac{4+4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \Rightarrow N(4, 0)$

P el punto medio de $\overline{AC} \Rightarrow P = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \Rightarrow M(5/2, 0)$ ■

15 Hallar la distancia del origen al punto P(a ; b)

Solución. Refiriéndonos a la Figura 1.9, tenemos

$\overline{OA}$ = abscisa en el origen de P = a

$\overline{AP}$ = ordenada en el origen de P = b

En el triángulo rectángulo OAP, por el Teorema de Pitágoras

$$|\overline{OP}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{AP}|^2 \Rightarrow |\overline{OP}|^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \quad d(O, P) = \sqrt{a^2 + b^2}$$ ■

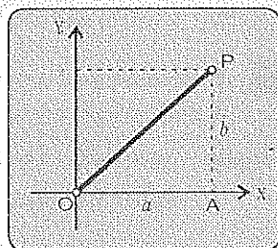


FIGURA 1.9

16 Hallar la distancia entre los puntos A(6 , 0) y B(0 , -8)

Solución. En la Figura 1.11 se observa que :

$\overline{OA}$ = abscisa en el origen de A = 6

$\overline{OB}$ = ordenada en el origen de B = -8

En el triángulo rectángulo AOB, por el Teorema de Pitágoras

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2$$
$$= (6)^2 + (8)^2 = 100$$
$$\therefore d(A, B) = 10$$ ■

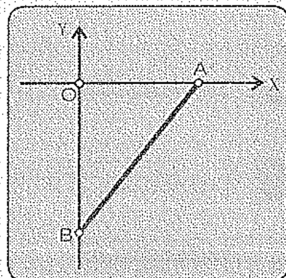


FIGURA 1.10

17 Los vértices de un cuadrilátero son los puntos A(1 , 3), B(7 , 3) , C(9 , 8) y D(3 , 8). Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su área.

Solución. Bastará probar que :

$$|\overline{AB}| = |\overline{DC}|\ ,\ |\overline{AD}| = |\overline{BC}|\ \text{y}\ |\overline{AC}| \neq |\overline{BD}|$$

En efecto : $|\overline{AB}| = |x_B - x_A| = |7 - 1| = 6$
$|\overline{DC}| = |x_C - x_D| = |9 - 3| = 6$ $\Rightarrow |\overline{AB}| = |\overline{DC}|$

Las proyecciones de D y C sobre el lado $\overline{AB}$ son, D'(3 , 3) y C'(9 , 3), respectivamente.

En el ΔAD'D :

$|\overline{AD}'| = |3 - 1| = 2$ y $|DD'| = |8 - 3| = 5$

Entonces, por el Teorema de Pitágoras

$|\overline{AD}|^2 = |\overline{AD'}|^2 + |\overline{DD'}|^2 = (2)^2 + (5)^2 = 29$

$\Rightarrow |\overline{AD}| = \sqrt{29}$

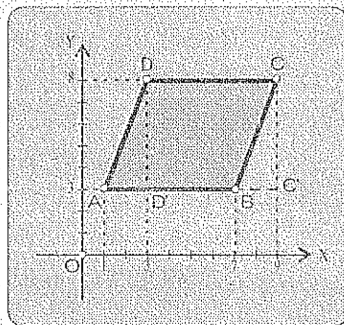


FIGURA 1.11

En el ΔBC'C :

$|\overline{BC'}| = |9 - 7| = 2$ y $|\overline{C'C}| = |8 - 3| = 5$

Luego, por el Teorema de Pitágoras :

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{BC'}|^2 + |\overline{C'C}|^2 = (2)^2 + (5)^2 \Rightarrow |\overline{BC}| = \sqrt{29}$$

Por lo que : $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$

En el ΔAC'C : $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AC'}|^2 + |C'C|^2 = (8)^2 + (5)2 = 89 \Rightarrow |\overline{AC}| = \sqrt{89}$

En el ΔBD'D : $|\overline{BD}|^2 = |\overline{D'B}|^2 = (4)^2 + (5)^2 = 41 \Rightarrow |\overline{BD}| = \sqrt{41}$

$$\therefore |\overline{AC}| \neq |\overline{BD}|$$

Area del paralelogramo : a(ABCD) = $|\overline{AB}| \times |\overline{C'C}| = 6 \times 5 = 30\ u^2$ ■

18 Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos A(-1 , 1) y B(3 , 1). Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos casos).

Solución. M es punto medio de $\overline{AB} \Rightarrow$ M(1 , 1)

Como $\overline{MC}$ || eje Y, la abscisa de C y C' es $x = 1$

$|\overline{AB}| = |x_B - x_A| = |3 - (-1)| = 4 \Rightarrow |\overline{AM}| = 2$

Como el ΔABC es equilátero, $|\overline{AC}| = |\overline{AB}| = 4$

En el ΔAMC : $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AM}|^2 + |\overline{MC}|^2$

$\Rightarrow (4)^2 = (2)^2 + |\overline{MC}|^2 \Rightarrow |\overline{MC}| = |\overline{MC'}| = 2\sqrt{3}$

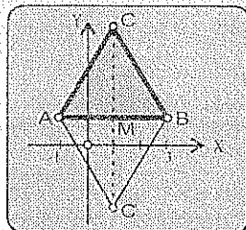


FIGURA 1.12

Luego, las ordenadas de los vértices C y C' son :

$1 + 2\sqrt{3}$ y $1 - 2\sqrt{3}$

$$\therefore C(1\ ,\ 1 + 2\sqrt{3})\ \text{y}\ C'(1\ ,\ 1 - 2\sqrt{3})$$ ■

19 Demostrar que los puntos A(-5 , 0) , B(0 , 2) y C(0 , -2) son los vértices de un triángulo isósceles y calcular su área.

Demostración. Probaremos que $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$

En efecto :

$|\overline{AO}| = |0 - (-5)| = 5$, $|\overline{OB}| = |2 - 0| = 2$

y $|\overline{OC}| = |0 - (-2)| = 2$

En el ΔAOB : $|\overline{AB}|^2 = |\overline{AO}|^2 + |\overline{OB}|^2$

$= (5)^2 + (2)^2 = 29 \Rightarrow |AB| = \sqrt{29}$

En el ΔAOC : $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AO}|^2 + |\overline{OC}|^2$

$= (5)^2 + (2)^2 = 29 \Rightarrow |\overline{AC}| = \sqrt{29}$

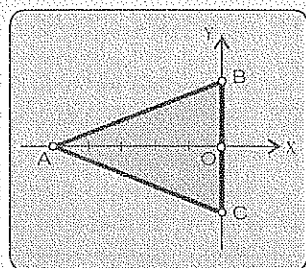


FIGURA 1.13

Por lo tanto, el ΔABC es isósceles.

$$a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|\overline{BC}| \times |\overline{OA}| = \frac{1}{2}(4)(5) = 10 \text{ u}^2$$ ■

20 Demostrar que los puntos O(0 , 0) , A(3 , 4) , B(8 , 4) y C(5 , 0) son los vértices de un rombo, y calcular su área.

Demostración. Bastará probar la igualdad de sus lados y la diferente magnitud de sus diagonales.

En efecto, $|\overline{AB}| = |x_B - x_A| = |8 - 3| = 5$

$|\overline{OC}| = |x_C - x_O| = |5 - 0| = 5$

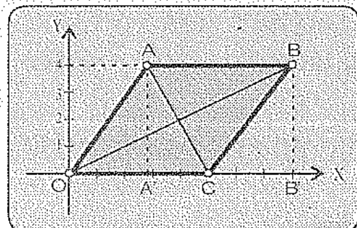


FIGURA 1.14

Las proyecciones de A y B sobre el eje X son

A'(3 , 0) y B'(8 , 0)

Entonces : $|\overline{OA'}| = 3$ y $|\overline{CB'}| = |8 - 5| = 3$

En el $\Delta OA'A$: $|\overline{OA}|^2 = (3)^2 + (4)^2 = 25 \Rightarrow |\overline{OA}| = 5$

En el $\Delta CB'B$: $|\overline{CB}|^2 = (3)^2 + (4)^2 = 25 \Rightarrow |\overline{CB}| = 5$

En el $\Delta OB'B$: $|\overline{OB}|^2 = |\overline{OB'}|^2 + |\overline{BB'}|^2 = (8)^2 + (4)^2 = 80 \Rightarrow |\overline{OB}| = \sqrt{80}$

En el $\Delta AA'C$: $|\overline{AC}|^2 = |\overline{AA'}|^2 + |\overline{A'C}|^2 = (4)^2 + (2)^2 = 20 \Rightarrow |\overline{AC}| = \sqrt{20}$

En consecuencia : $|\overline{AB}| = |\overline{OC}| = |\overline{OA}| = |\overline{CB}|$ y $|\overline{OB}| \neq |\overline{AC}|$

Area del rombo : $a(OABC) = \frac{1}{2}|\overline{OB}| \times |\overline{AC}| = 20 \text{ u}^2$ ■

1.4 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

TEOREMA 1.2 *La fórmula de la distancia.*

La distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por la fórmula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demostración. Supóngase dos puntos del plano

$$P_1(x_1, y_1) \text{ y } P_2(x_2, y_2)$$

La demostración se base en la formación de un triángulo rectángulo, como se indica en la Figura 1.15, en ella vemos que el lado horizontal tiene longitud

$$|\overline{AP_2}| = |x_2 - x_1|$$

y el lado vertical tiene longitud

$$|\overline{AP_1}| = |y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

Ahora, por el Teorema de Pitágoras

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{AP_2}|^2 + |\overline{AP_1}|^2$$

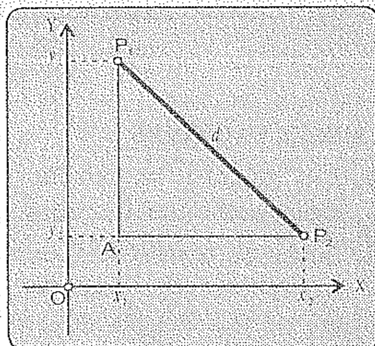


FIGURA 1.15

de donde : $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Tomamos la raíz positiva para d porque la distancia entre dos puntos no es una distancia dirigida.

1.5 DIVISION DE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

TEOREMA 1.3 Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento $\overline{P_1P_2}$, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ son

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad , \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad , \quad r \neq -1$$

Demostración. Por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P(x, y)$ y $P_2(x_2, y_2)$ trazamos paralelas a los ejes coordenados, que se interceptan en los puntos Q y R, tal como se indica en la Figura 1.17. De este modo $Q(x_1, y)$ y $R(x, y_2)$

$\Delta P_1QP \cong \Delta PRP_2 \Rightarrow \dfrac{QP}{RP_2} = \dfrac{QP_1}{RP}$ (α)

Entonces, por el Teorema 1.1

$\dfrac{\overline{QP}}{RP_2} = r \Rightarrow \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = r \Leftrightarrow x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$, $r \neq -1$

$\dfrac{QP_1}{RP} = r \Rightarrow \dfrac{y_1 - y}{y - y_2} = r \Leftrightarrow y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$, $r \neq -1$

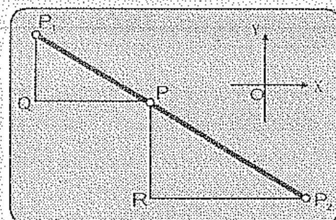


FIGURA 1.16

En el caso particular en que $r = 1$, tenemos el siguiente

Corolario. Las coordenadas del punto medio de un segmento dirigido de extremos $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ son

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

| OBSERVACIONES

1. Las razones de las fórmulas del Teorema 1.3 deben ser considerados con su signo, ya que estamos tratando con segmentos rectilíneos dirigidos.
2. Al usar las fórmulas del Teorema 1.3, deben cuidarse de que la sustitución de las coordenadas sea correcta. Por esta razón frecuentemente es preferible no sustituir en estas fórmulas sino escribir directamente los valores de las razones, tal como se da en (α).
3. Si el punto de división P es externo al segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$, la razón r es negativa.

EJERCICIOS . *Grupo 2*

1 Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son A(-3 , -1) , B(0 , 3) , C(3 , 4) y D(4 , -1)

Solución. Por la fórmula de la distancia

$|\overline{AB}| = \sqrt{(0 + 3)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$|\overline{CD}| = \sqrt{(4 - 3)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$

$|\overline{AD}| = |x_D - x_A| = |4 - (-3)| = 7$

Por tanto, el perímetro del cuadrilátero es

$2p = 12 + \sqrt{10} + \sqrt{26} = 20.26$ u ■

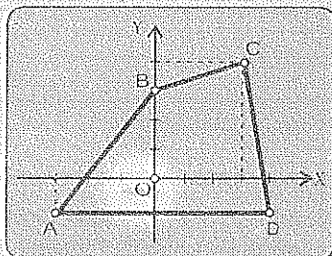


FIGURA 1.17

2 Demostrar que los puntos A(-2 , -1) , B(2 , 2) y C(5 , -2) son los vértices de un triángulo isósceles.

Demostración. Las longitudes de los lados del triángulo por la fórmula de la distancia son

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(5-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(5+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

Siendo $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, el ΔABC es isósceles. ■

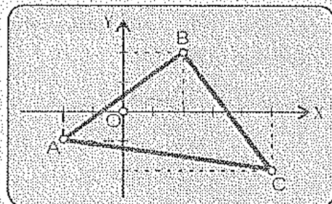


FIGURA 1.18

3 Demostrar que los puntos A(2 , -2) , B(-8 , 4) y C(5 , 3) son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar su área.

Demostración. Por la fórmula de la distancia, las longitudes de los lados son

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-8-2)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{136}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(5-2)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(5+9)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{170}$$

Como $|\overline{BC}|^2 = 170 = 136 + 34 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2$ se cumple el Teorema de Pitágoras, por lo que el ΔABC es recto en A.

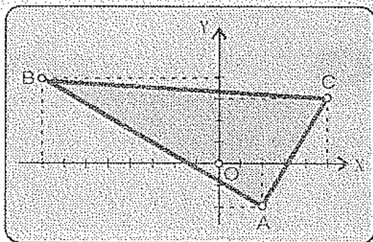


FIGURA 1.19

$$a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\,|\overline{AB}| \times |\overline{AC}| = \frac{1}{2}\,(\sqrt{136})(\sqrt{34}) = 34\ u^2$$ ■

4 Demostrar que los tres puntos A(12 , 1) , B(-3 , -2) y C(2 , -1) son colineales, es decir, que están sobre una misma recta.

Demostración. Sabemos que para cualquier posición de los puntos A, B y C sobre una línea recta, se debe verificar que : $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}|$

En efecto, por la fórmula de la distancia

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-3-12)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{225+9} = 3\sqrt{26}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(2-12)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{100+4} = 2\sqrt{26}$$

$$|\overline{CB}| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

Dado que : $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}|$, los tres puntos A , B y C, son colineales. ■

5 Demostrar que los puntos A(0 , 1) , B(3 , 5) , C(7 , 2) y D(4, - 2) son los vértices de un cuadrado.

Demostración. Bastará probar que las longitudes de los lados son iguales y de las diagonales también.

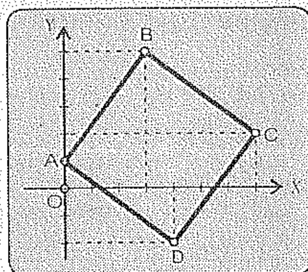


FIGURA 1.20

En efecto, $|\overline{AB}| = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(7-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

$|\overline{CD}| = \sqrt{(4-7)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$|\overline{DA}| = \sqrt{(0-4)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(7-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

$|\overline{DB}| = \sqrt{(3-4)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

Por lo tanto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado. ■

6 Los vértices de un triángulo son A(3 , 8) , B(2 , -1) y C(6 , -1). Si D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD.

Solución. Si D(x , y) es el punto medio de $\overline{BC}$, entonces

$$x = \frac{1}{2}(2+6) = 4 \quad , \quad y = \frac{1}{2}(-1-1) = -1 \Rightarrow D(4 , -1)$$

$$\therefore \ \overline{AD} = \sqrt{(4-3)^2 + (-1-8)^2} = \sqrt{82}$$ ■

7 Demostrar que los cuatro puntos A(1 , 1) , B(3 , 5) , C(11 , 6) y D(9 , 2) son los vértices de un paralelogramo.

Demostración. Probaremos que $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$ y $|\overline{AC}| \neq |\overline{DB}|$

En efecto, por la fórmula de la distancia

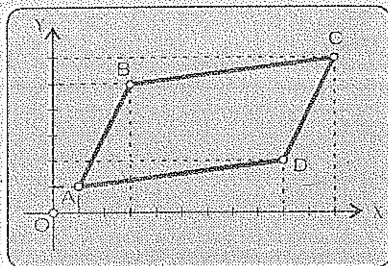


FIGURA 1.21

$|\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$|\overline{DC}| = \sqrt{(11-9)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(11-3)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$

$|\overline{AD}| = \sqrt{(9-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(11-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125}$

$|\overline{DB}| = \sqrt{(3-9)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$

Luego, $|\overline{AB}| = |\overline{DC}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$ y $|\overline{AC}| \neq |\overline{DB}|$, por lo que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. ■

8 Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(0 , 0) , B(1 , 2) y C(3 , -4). (Sugerencia. Use la fórmula del semiperímetro).

Solución. Por la fórmula de la distancia obtenemos

$$a = |\overline{BC}| = 2\sqrt{10} \ , \ b = |\overline{AC}| = 5 \ \text{y} \ c = |\overline{AB}| = \sqrt{5}$$

El semiperímetro del triángulo es : $p = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5} + 2\sqrt{10})$

$$\Rightarrow p - a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 5 - 2\sqrt{10}) \ , \ p - b = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 2\sqrt{10} - 5) \ , \ p - c = \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{10} - \sqrt{5})$$

Luego, si $a(\Delta ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, entonces

$$a(\Delta ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{10})(\sqrt{5} + 5 - 2\sqrt{10})(2\sqrt{10} + \sqrt{5} - 5)(2\sqrt{10} - \sqrt{5} + 5)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(10\sqrt{5} - 10)(10\sqrt{5} + 10)} = 5 \text{ u}^2.$$ ■

9 Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto A(3 , -2). Si la abscisa del otro extremo es 6, hallar su ordenada.

Solución. Si A(3 , -2) , B(6 , y) y $|\overline{AB}| = 5$, entonces por la fórmula de la distancia:

$$\sqrt{(6-3)^2 + (y+2)^2} = 5 \ \Rightarrow \ 9 + (y+2)^2 = 25$$

$$\Rightarrow (y+2)^2 = 16 \ \Leftrightarrow \ y + 2 = 4 \ \text{ó} \ y + 2 = -4$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \ \text{ó} \ y = -6$$ ■

10 Determinar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto P(x , y) equidista de los puntos A(-3 , 5) y B(7 , -9).

Solución. Si P equidista de A y B, entonces

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}| \ \Leftrightarrow \ \sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+9)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 18y + 81$$

$$\Leftrightarrow 5x - 7y - 24 = 0$$

La ecuación resultante es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ ■

11 Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son $P_1(-2 , 3)$ y $P_2(6, -3)$.

Solución. Sean P y Q los puntos de trisección y M el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$

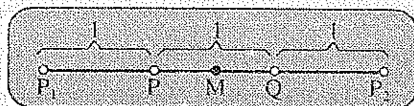


FIGURA 1.22

Si $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x - (2)}{6 - x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{y - 3}{-3 - y} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = 1 \end{array} \right\} \therefore P(2/3\ ,\ 1)$

Q es punto medio de $\overline{PP_2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3} + 6\right) = \dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{1}{2}(1 - 3) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow Q(10/3\ ,\ -1)$

M es punto medio de $\overline{P_1P_2} \Rightarrow M = \left(\dfrac{-2 + 6}{2}\ ,\ \dfrac{3 - 3}{2}\right) \Rightarrow M(2\ ,\ 0)$ ■

12 Los puntos extremos de un segmento son $P_1(2\ ,\ 4)$ y $P_2(8\ ,\ -4)$. Hallar el punto $P(x\ ,\ y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2$

Solución. Si $\dfrac{\overline{P_2P}}{\overline{PP_1}} = -2 \Rightarrow \left(\dfrac{x - 8}{2 - x} = -2\right) \wedge \left(\dfrac{y + 4}{4 - y} = -2\right)$

$$\Rightarrow (x = -4) \wedge (y = 12)$$

En consecuencia, el punto buscado es $P(-4\ ,\ 12)$. ■

13 Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto $(7\ ,\ 8)$ y su punto medio es $(4\ ,\ 3)$. Hallar el otro extremo.

Solución. Sean $P_1(7\ ,\ 8)$, $M(4\ ,\ 3)$ y $P_2(x_2\ ,\ y_2)$

Si M biseca al segmento $\overline{P_1P_2}$, entonces

$M(4\ ,\ 3) = M\left(\dfrac{7 + x_2}{2}\ ,\ \dfrac{8 + y_2}{2}\right) \Leftrightarrow \left(4 = \dfrac{7 + x_2}{2}\right) \wedge \left(\dfrac{8 + y_2}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow (x_2 = 1) \wedge (y_2 = -2) \Rightarrow P_2(1\ ,\ -2)$$ ■

14 Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(7\ ,\ 4)$ y $P_2(-1\ ,\ -4)$. Hallar la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(1\ ,\ -2)$ divide al segmento.

Solución. Si $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} \Rightarrow r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{1 - 7}{-1 - 1} \Rightarrow r = 3$ ■

15 Los puntos medios de los lados de un triángulo son (2 , 5) ; (4 , 2) y (1 , 1). Hallar las coordenadas de los tres vértices.

Solución. Sean $A(x_1 , y_1)$, $B(x_2 , y_2)$ y $C(x_3 , y_3)$ los vértices del triángulo. Si M(2 , 5), N(4 , 2) y P(1 , 1) son los puntos medios de los lados, entonces

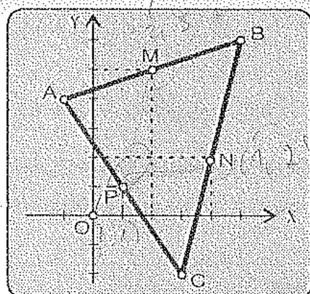


FIGURA 1.23

$\overline{AB}$: $x_1 + x_2 = 2(2) = 4$ (1)

$\overline{BC}$: $x_2 + x_3 = 2(4) = 8$ (2)

$\overline{AC}$: $x_1 + x_3 = 2(1) = 2$ (3)

Sumando estas tres ecuaciones obtenemos

$2(x_1 + x_2 + x_3) = 14 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 7$ (4)

Resolviendo (1) , (2) y (3) con (4) se tiene : $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$

Procediendo en forma análoga para las ordenadas, resulta : $y_1 = 4$, $y_2 = 6$, $y_3 = -2$

Por lo tanto, A(-1 , 4) , B(5 , 6) y C(3 , -2) ■

16 Los vértices de un triángulo son A(-1 , 1) , B(3 , 5) y C(7 , -1). Si D es el punto medio del lado $\overline{AB}$ y E es el punto medio del lado $\overline{BC}$, demostrar que la longitud del segmento $\overline{DE}$ es la mitad de la longitud del lado $\overline{AC}$.

Demostración. Si D es punto medio de $\overline{AB}$, entonces

$$D\left(\frac{3-1}{2} , \frac{5+3}{2}\right) \Leftrightarrow D(1 , 4)$$

y si E es punto medio de $\overline{BC}$, entonces

$$E\left(\frac{3+7}{2} , \frac{5-1}{2}\right) \Leftrightarrow E(5 , 2)$$

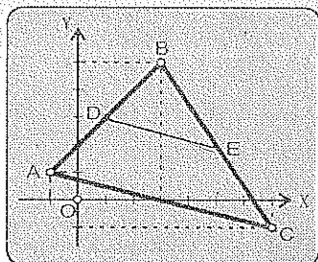


FIGURA 1.24

Luego , $|\overline{DE}| = \sqrt{(5-1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(7+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Por lo que : $\dfrac{|\overline{DE}|}{|\overline{AC}|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow |\overline{DE}| = \dfrac{1}{2}|\overline{AC}|$ ■

17 En el triángulo rectángulo del Ejercicio 3 , demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices.

Demostración. Si M es punto de $\overline{BC}$, entonces

$$M\left(\frac{-8+5}{2} , \frac{4+3}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(-\frac{3}{2} , \frac{7}{2}\right)$$



Luego,

$$|\overline{MB}| = \sqrt{(-8+3/2)^2+(4-7/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{170}$$

$$|\overline{MA}| = \sqrt{(2+3/2)^2+(-2-7/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{170}$$

$$|\overline{MC}| = \sqrt{(5+3/2)^2+(3-7/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{170}$$

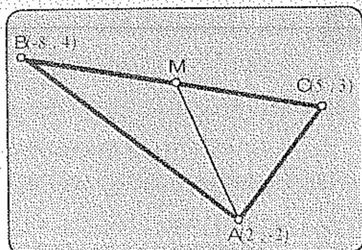


FIGURA 1.25

Tenemos, $|\overline{MB}| = |\overline{MA}| = |\overline{MC}|$, por lo tanto, el punto M equidista de los tres vértices. ■

18 Demostrar que los segmentos que unen los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero del Ejercicio 1 forman un paralelogramo.

Demostración. Si M, N, P y R son los puntosmedios de los lados del cuadrilátero, entonces

M(-3/2 , 1), N(3/2 , 7/2), P(7/2 , 3/2) y R(1/2 , -1)

Probaremos que : $|\overline{MN}| = |\overline{RP}|$ y $|\overline{MR}| = |\overline{NP}|$

En efecto, por la fórmula de la distancia

$$|\overline{MN}| = \sqrt{(3/2+3/2)^2+(7/2-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{61}$$

$$|\overline{RP}| = \sqrt{(7/2-1/2)^2+(3/2+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{61}$$

$$|\overline{MR}| = \sqrt{(1/2+3/2)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overline{NP}| = \sqrt{(7/2-3/2)^2+(3/2-7/2)^2} = \sqrt{8}$$

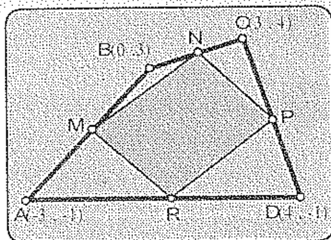


FIGURA 1.26

Luego, $|\overline{MN}| = |\overline{RP}|$ y $|\overline{MR}| = |\overline{NP}|$, por lo tanto el cuadrilátero MNRP es un paralelogramo. ■

19 Los vértices de un triángulo son A(2 , -1), B(-4 , 7) y C(8 , 0). Hallar, para cada una de las medianas, el punto de trisección más cercano al punto medio del lado correspondiente. Demostrar que este punto es el mismo para cada una de las medianas y, por lo tanto, que las medianas concurren en un punto. Este punto se llama *baricentro* del triángulo.

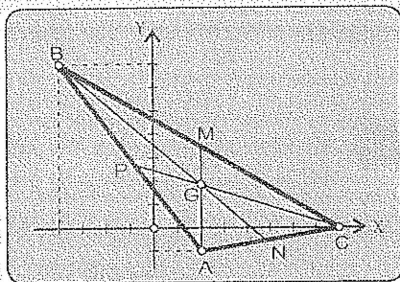


FIGURA 1.27

Demostración. Sean M, N y P los puntos medios de los lados del

triángulo y $G(x, y)$ su baricentro. Entonces

$$M(2, 7/2), N(5, -1/2), P(-1, 3)$$

Para la mediana $\overline{AM}$:

$$r = \frac{\overline{MG}}{\overline{GA}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{x-2}{2-x} = \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\frac{y-7/2}{-1-y} = \frac{1}{2}\right)$$

de donde obtenemos : $x = 2$, $y = 2$

Para la mediana $\overline{BN}$:

$$r = \frac{\overline{NG}}{\overline{GB}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{x-5}{-4-x} = \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\frac{y+1/2}{7-y} = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2 , y = 2$$

Para la mediana $\overline{CP}$:

$$r = \frac{\overline{PG}}{\overline{GC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{x+1}{8-x} = \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\frac{y-3}{0-y} = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2 , y = 2$$

Queda probado que el punto $G(2, 2)$ es el mismo para cada una de las medianas.

20 En el triángulo cuyos vértices son $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$, demostrar que las coordenadas del baricentro son

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} , \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Demostración. Sean $G(x, y)$ las coordenadas del baricentro. Si M es punto medio de $\overline{AC}$, entonces

$$M\left(\frac{x_1 + x_3}{2} , \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$$

Por una de las propiedades de las medianas de un triángulo sabemos que éstas se cortan en un mismo punto situado a 2/3 del vértice y a 1/3 de la base de cada mediana.

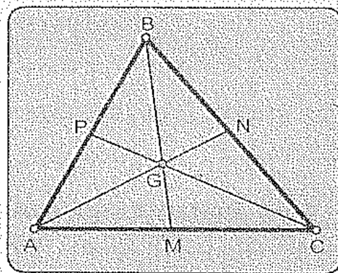


FIGURA 1.28

Luego, para la mediana $\overline{BM}$, se tiene

$$r = \frac{\overline{BG}}{\overline{GM}} = \frac{2/3}{1/3} = 2 \Rightarrow \left(\frac{x - x_2}{\frac{x_1 + x_3}{2} - x} = 2\right) \wedge \left(\frac{y - y_2}{\frac{y_1 + y_3}{2} - y} = 2\right)$$

de donde obtenemos : $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$

$$\therefore \ G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} , \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$ ■

1.6 PENDIENTE DE UNA RECTA

Se denomina *pendiente* o coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación. Se denota por m, de modo que

$$m = \text{Tg}\alpha$$

OBSERVACIONES

1. El intervalo de variación del ángulo de inclinación de una recta está dada por $0 \leq \alpha \leq 180$. Según esto la pendiente puede tomar todos los valores reales.
2. Si α es agudo, la pendiente es positiva como para la recta $\mathscr{L}_1$ de la Figura 1.29 ($\text{Tg}\alpha_1 > 0$)
3. Si α es obtuso, como para $\mathscr{L}_2$, la pendiente es negativa ($\text{Tg}\alpha_2 < 0$).
4. Cuando $\alpha = 90°$, la pendiente no está definida, ya que $\text{Tg } 90° = \infty$ cuyo significado no es un número real.

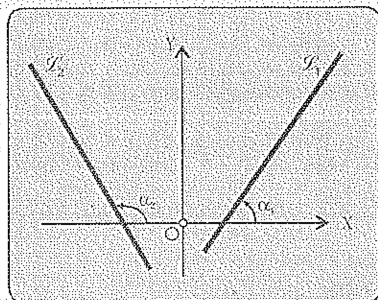


FIGURA 1.29

TEOREMA 1.4 Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, su pendiente esta dada por

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad , \quad x_1 \neq x_2$$

1.7 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas que se interceptan en el punto P cuyos ángulos de inclinación son α_1 y α_2 respectivamente ($\alpha_1 < \alpha_2$). Refiriéndonos a la Figura 1.30, el ángulo que forma la recta $\mathscr{L}_1$ con la recta $\mathscr{L}_2$ se define como el ángulo θ_1 que resulta al hacer girar la recta $\mathscr{L}_1$ (lado inicial) alrededor del punto P, en sentido antihorario, hasta que coincida con la recta $\mathscr{L}_2$ (lado final). De este modo el ángulo θ está dado por

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

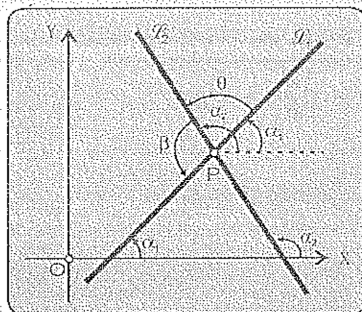


FIGURA 1.30

TEOREMA 1.5 Un ángulo especificado θ formado por dos rectas está dada por la fórmula

$$\text{Tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \ , \ m_1 m_2 \neq -1$$

en donde m_1 es la pendiente del lado inicial ($\mathscr{L}_1$) y m_2 es la pendiente del lado final ($\mathscr{L}_2$) correspondiente al ángulo θ.

Demostración. De la definición del ángulo entre dos rectas se sigue que

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Aplicando tangentes se tiene : $\text{Tg}\theta = \text{Tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$= \frac{\text{Tg}\alpha_2 - \text{Tg}\alpha_1}{1 + \text{Tg}\alpha_1 \text{Tg}\alpha_2}$$

Como $m_1 = \text{Tg}\alpha_1$ y $m_2 = \text{Tg}\alpha_2 \Rightarrow \text{Tg}\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

Corolario 1. La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean *paralelas* es que sus pendientes sean iguales, esto es, si

$$\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

En efecto, dos rectas son paralelas cuando el ángulo formado por ellas es 0° o 180°, entonces si en la fórmula del Teorema 1.5 hacemos θ = 0° tendremos

$$m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$$

Corolario 2. La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean *perpendiculares* entre si, es que el producto de sus pendientes sea igual a -1, esto es

$$\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow m_1 . m_2 = -1$$

En efecto, si dos rectas son perpendiculares el ángulo comprendido entre ellas es 90°, entonces para que Tgθ no esté definida en la fórmula del Teorema 1.5 se debe cumplir que

$$1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

Nota. En la Figura 1.30 se observa que el ángulo β entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tiene como lado inicial a $\mathscr{L}_2$ y como lado final a $\mathscr{L}_1$, además es el suplemento de θ, esto es

$$\beta = 180° - \theta \Rightarrow \text{Tg}\beta = \text{Tg}(180° - \theta) = -\text{Tg}\theta = -\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\Rightarrow \text{Tg}\beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Esto significa que con la fórmula del Teorema 1.5 se puede calcular cualesquiera de los ángu-

los que forman las rectas de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. La única condición es orientar la medida del ángulo en sentido antihorario para saber cual es el lado final y cual el lado inicial.

EJERCICIOS . *Grupo 3*

5 Los vértices de un triángulo son los puntos A(2 , -2) , B(-1 , 4) y C(4 , 5). Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

Solución. Por la fórmula del Teorema 1.4 se tiene

Pendiente de $\overline{AB}$: $m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-(-2)}{-1-2} \Rightarrow m_1 = -2$

Pendiente de $\overline{BC}$: $m_2 = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5-4}{4-(-1)} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{5}$

Pendiente de $\overline{AC}$: $m_3 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-(-2)}{4-2} \Rightarrow m_3 = \frac{7}{2}$

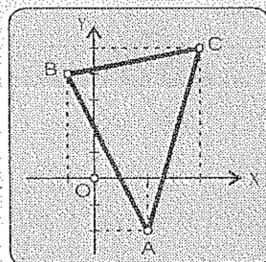


FIGURA 1.31

6 Demostrar por medio de pendientes que los puntos A(9 , 2) , B(11 , 6) , C(3 , 5) y D(1 , 1) son vértices de un paralelogramo.

Demostración. Probaremos que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{CB} \parallel \overline{DA}$

En efecto, por el Teorema 1.4

$m_{AB} = \frac{6-2}{11-9} = 2$, $m_{DC} = \frac{5-1}{3-1} = 2$

Si $m_{AB} = m_{DC} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (Corolario 1)

$m_{CB} = \frac{6-5}{11-3} = \frac{1}{8}$, $m_{DA} = \frac{2-1}{9-1} = \frac{1}{8}$

Si $m_{CB} = m_{DA} \Rightarrow \overline{CB} \parallel \overline{DA}$ (Corolario 1)

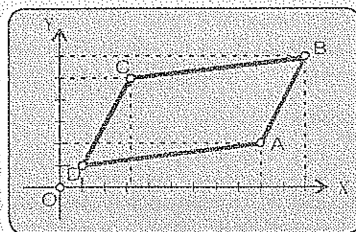


FIGURA 1.32

Por lo tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo ■

7 Una recta de pendiente 3 para por el punto (3 , 2). La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

Solución. Sean A(3 , 2) , B(4 , y) y $m_{AB} = 3$

Por el Teorema 1.4 : $m_{AB} = \frac{y-2}{4-3} \Rightarrow 3 = \frac{y-2}{1} \Leftrightarrow y = 5$ ■

8 Una recta de pendiente -2 pasa por el punto (2 , 7) y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, cuál es la abscisa de A y cuál la ordenada de B?

Solución. Sean : m = -2 , P(2 , 7) , A(x , 3) y B(6 , y)

Siendo los puntos colineales se debe verificar que

$$m_{PA} = m \Rightarrow \frac{3-7}{x-2} = -2 \Leftrightarrow x = 4$$

$$m_{PB} = m \Rightarrow \frac{y-7}{6-2} = -2 \Leftrightarrow y = 1$$ ■

9 Tres vértices de un paralelogramo son A(-1 , 4), B(1 , -1) y C(6 , 1). Si la ordenada del cuarto vértice es 6, cuál es su abscisa?

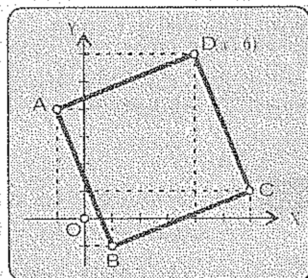


FIGURA 1.33

Solución. Sea el cuarto vértice D(x , 6). Entonces

$$m_{BA} = \frac{4+1}{-1-1} = -\frac{5}{2} \ ; \ m_{CD} = \frac{6-1}{x-6} = \frac{5}{x-6}$$

Dado que $\overline{BA} \parallel \overline{CD} \Rightarrow -\frac{5}{2} = \frac{5}{x-6}$ (Corolario 1)

de donde obtenemos : $x = 4$ ■

10 Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos A(-2 , 1) , B(3 , 4) y C(5 , -2). Compruébese los resultados.

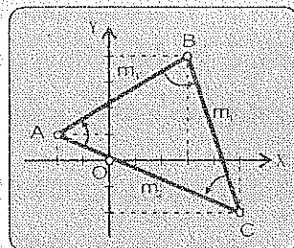


FIGURA 1.34

Solución. Primeramente orientamos la dirección positiva (sentido antihorario) del ángulo interior de cada vértice. Enseguida designamos por

$$m_1 = m_{CB} \ , \ m_2 = m_{CA} \ , \ m_3 = m_{AB}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{4+2}{3-5} = -3 \ , \ m_2 = \frac{1+2}{-2-5} = -\frac{3}{7} \ , \ m_3 = \frac{4-1}{3+2} = \frac{3}{5}$$

Luego, por el Teorema 1.5 :

$$TgA = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 m_3} = \frac{3/5 + 3/7}{1 - 9/35} = \frac{18}{13} = 1.384 \Rightarrow A = 54°10'$$

$$TgB = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3} = \frac{-3 - 3/5}{1 - 9/35} = \frac{9}{2} = 4.5 \Rightarrow B = 77°28'$$

$$TgC = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3/7 + 3}{1 + 9/7} = \frac{9}{8} = 1.125 \Rightarrow C = 48°22'$$

Comprobación : $A + B + C = 54°10' + 77°28' + 48°22' = 180°$ ■

11 Demostrar que los puntos A(1 , 1) , B(5 , 3) , C(8 , 0) y D(4 , -2) son vértices de un paralelogramo, y hallar su ángulo obtuso.

Demostración. Probaremos que $\overline{AB} \| \overline{CD}$ y $\overline{DA} \| \overline{CB}$

En efecto

$$m_{AB} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2} \; ; \; m_{DC} = \frac{0+2}{8-4} = \frac{1}{2}$$

Si $m_{AB} = m_{DC} \Rightarrow \overline{AB} \| \overline{DC}$ (Corolario 1)

$$m_{DA} = \frac{1+2}{1-4} = -1 \; ; \; m_{CB} = \frac{3-0}{5-8} = -1$$

Si $m_{DA} = \overline{CD} \Rightarrow \overline{DA} \| \overline{CB}$ (Corolario 1)

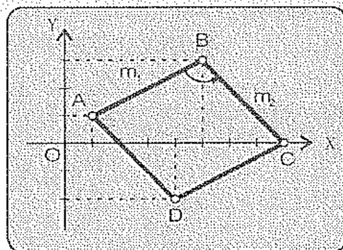


FIGURA 1.35

Sean : $m_1 = m_{AB}$ y $m_2 = m_{CB}$, luego, si

$$Tg\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow Tg\beta = \frac{-1 - 1/2}{1 + 1/2} = -3 \Leftrightarrow \measuredangle B = \measuredangle D = 108°26'$$ ■

12 Demostrar que los puntos A(1 , 1) , B(5 , 3) y C(6 , -4) son vértices de un triángulo isósceles y hallar cada uno de los ángulos iguales.

Demostración. Refiriéndonos a la Figura 1.36, probaremos que $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$.

En efecto : $|\overline{AC}| = \sqrt{(6-1)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{50}$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(6-5)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{50}$$

Luego, el ΔABC es isósceles.

$$m_1 = m_{AB} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2} \; ; \; m_2 = m_{CB} = \frac{3+4}{5-6} = -7$$

Si $Tg\beta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow Tg\beta = \dfrac{-7 - 1/2}{1 - 7/2} = -3$

$$\Rightarrow B = A = 71° 34'$$ ■

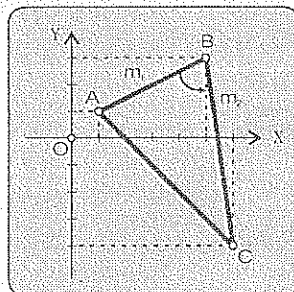


FIGURA 1.36

13 Hallar los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos A(2 , 5) , B(7 , 3) , C(6 , 1) , D(0 , 0). Comprobar los resultados.

Solución. La orientación positiva del ángulo de cada vértices se muestra en la Figura 1.37, en donde :

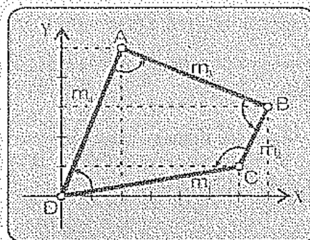


FIGURA 1.37

$m_1 = m_{DC} = \frac{1-0}{6-0} = \frac{1}{6}$, $m_2 = m_{CB} = \frac{3-1}{7-6} = 2$

$m_3 = m_{BA} = \frac{5-3}{2-7} = \frac{2}{-5}$, $m_4 = m_{DA} = \frac{5-0}{2-0} = \frac{5}{2}$

Luego, por la fórmula del Teorema 1.5 se tiene :

$$TgD = \frac{m_4 - m_1}{1 + m_1 m_4} = \frac{5/2 - 1/6}{1 - 5/12} = \frac{28}{17} = 1.647 \Rightarrow D = 58° 44'$$

$$TgC = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1/6 - 2}{1 + 2/6} = -\frac{11}{6} = -1.375 \Rightarrow C = 126° 2'$$

$$TgB = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3} = \frac{2 + 2/5}{1 - 4/5} = 12 \Rightarrow B = 85° 14'$$

Dado que $m_3 \cdot m_4 = -1 \Rightarrow A = 90°$

Comprobación : $A + B + C + D = 90° + 85° 14' + 126° 2' + 58° 44' = 360°$ ■

14 Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135°. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial .

Solución. Si $\theta = 135°$ y $m_2 = -3$, entonces por la fórmula del Teorema 1.5

$$Tg\,135° = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow -1 = \frac{-3 - m_1}{1 - 3m_1} \Leftrightarrow m_1 = -1/2$$ ■

15 Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°. La recta inicial pasa por los puntos P(-2 , 1) y Q(9 , 7) y la recta final pasa por el punto B(3 , 9) y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

Solución. Sean : $A(-2 , y)$, $m_1 = m_{PQ}$ y $m_2 = m_{AB}$, entonces

$$m_1 = \frac{7-1}{9+2} = \frac{6}{11} \quad , \quad m_2 = \frac{y-9}{-2-3} = \frac{9-y}{5}$$

Si $Tg\,45° = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 = \frac{(9-y)/5 - 6/11}{1 + \frac{6}{11}\left(\frac{9-y}{5}\right)}$, de donde obtenemos : $y = -8$ ■

16 Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A(1 , -3) , B(3 , 3) y C(6 , -1) empleando el seno del ángulo BAC.

Solución. Si $m_2 = m_{AB} = \frac{3+3}{3-1} = 3$ y $m_1 = m_{AC} = \frac{-1+3}{6-1} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow$ $\text{TgA} = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \dfrac{3 - 2/5}{1 + 6/5} = \dfrac{13}{11}$, luego : $\text{Sen A} = \dfrac{13}{\sqrt{290}}$

$a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|\overline{AC}| \times |\overline{BH}|$, pero $|\overline{BH}| = |\overline{AB}|$ Sen A

$$\Rightarrow a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|\overline{AC}| \times |\overline{AB}| \text{ Sen A} \quad (1)$$

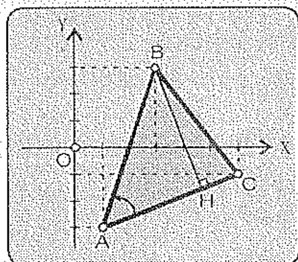


FIGURA 1.38

$|\overline{AC}| = \sqrt{(6-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{29}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{10}$

Por tanto, en (1) :

$a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}(\sqrt{29})(2\sqrt{10})\dfrac{13}{\sqrt{290}} \Rightarrow a(\Delta ABC) = 13u^2$ ■

17 Por medio de pendientes demuéstrese que los tres puntos A(6 , -2) , B(2 , 1) y C(-2 , 4) son colineales.

Demostración. Bastará probar que las pendientes de los puntos tomados dos a dos son iguales. En efecto

$$m_{AB} = \frac{1+2}{2-6} = -\frac{3}{4} \; ; \; m_{AC} = \frac{4+2}{-2-6} = -\frac{3}{4} \; ; \; m_{BC} = \frac{4-1}{-2-2} = -\frac{3}{4}$$

En consecuencia, los puntos A , B y C son colineales. ■

18 Una recta pasa por los puntos A(-2 , -3) y B(4 , 1). Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, cuál es su ordenada?

Solución. Si A(-2 , -3) ; B(4 , 1) y P(10 , y) están en una misma recta, entonces

$$m_{AB} = m_{BP} \Rightarrow \frac{1+3}{4+2} = \frac{y-1}{10-4} \Leftrightarrow y = 5$$ ■

19 Halle la ecuación que debe satisfacer cualquier punto P(x , y) que pertenece a la recta que pasa por los puntos A(2 , -1) y B(7 , 3).

Solución. Si P(x , y) , A(2 , -1) y B(7 , 3) pertenece a la misma recta $\mathscr{L}$, entonces

$$m_{AP} = m_{AB} \Rightarrow \frac{y+1}{x-2} = \frac{3+1}{7-2} \Leftrightarrow \mathscr{L}: 4x - 5y - 13 = 0$$ ■

20 Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto P(x , y) que pertenezca a la recta que pasa por el punto A(3 , -1) y que tiene una pendiente igual a 4.

Solución. Si m es la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por A, entonces

$$\mathrm{m} = \mathrm{m}_{AP} \Rightarrow 4 = \frac{y+1}{x-3} \Leftrightarrow \mathscr{L}: 4x - y - 13 = 0$$ ■

21 Demostrar que la recta que pasa por los puntos A(-2 , 5) y B(4 , 1) es perpendicular a la recta que pasa por los puntos C(-1 , 1) y D(3 , 7).

Demostración. Sea $\mathscr{L}_1$ la recta que pasa por A y B, entonces : $\mathrm{m}_1 = \frac{1-5}{4+2} = -\frac{2}{3}$

Sea $\mathscr{L}_2$ la recta que pasa por C y D $\Rightarrow \mathrm{m}_2 = \frac{7-1}{3+1} = \frac{3}{2}$

Luego, $\mathrm{m}_1 \times \mathrm{m}_2 = (-2/3)\,(3/2) = -1$

Por lo tanto, por el corolario 2 del Teorema 1.5 , $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$ ■

22 Una recta $\mathscr{L}_1$ pasa por los puntos (3 , 2) y (-4 , -6) y otra recta $\mathscr{L}_2$ pasa por el punto (-7 , 1) y el punto A cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa de A, sabiendo que $\mathscr{L}_1$ es perpendicular a $\mathscr{L}_2$.

Solución. Sea A(x , -6) , entonces la pendiente de $\mathscr{L}_2$ es : $\mathrm{m}_2 = \frac{-6-1}{x+7} = -\frac{7}{x+7}$

y la pendiente de $\mathscr{L}_1$ es : $\mathrm{m}_1 = \frac{-6-2}{-4-3} = \frac{8}{7}$

Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathrm{m}_1 \Rightarrow \mathrm{m}_2 = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{8}{7}\right)\left(-\frac{7}{x+7}\right) = -1$, de donde : $x = 1$ ■

23 Demostrar que los tres puntos A(2 , 5) , B(8 , -1) y C(-2 , 1) son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

Demostración. En efecto, $\mathrm{m}_{CA} = \mathrm{m}_2 = \frac{5-1}{2+2} = 1$

$$\mathrm{m}_{BA} = \mathrm{m}_3 = \frac{5+1}{2-8} = -1$$

Dado que $\mathrm{m}_2 \cdot \mathrm{m}_3 = -1 \Rightarrow \overline{CA} \perp \overline{BA}$

Luego, el ΔBAC es recto en A

Pendiente de $\overline{BC}$: $m_1 = \frac{1+1}{-2-8} = -\frac{1}{5}$

$Tg C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1 + 1/5}{1 - 1/5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 56° \; 19'$

$Tg B = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3} = \frac{-1/5 + 1}{1 + 1/5} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{B} = 33° \; 41'$

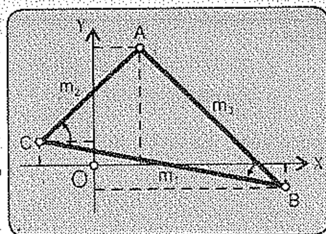


FIGURA 1.39

24 Demostrar que los cuatro puntos A(2 , 4) , B(7 , 3) , C(6 , -2) y D(1 , -1) son vértice de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.

Demostración. Probaremos en primer lugar que las longitudes de los cuatro lados son iguales.

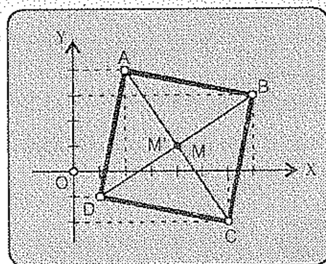


FIGURA 1.40

En efecto : $|\overline{AB}| = \sqrt{(7-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{26}$

$|\overline{BC}| = \sqrt{(6-7)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}$

$|\overline{CD}| = \sqrt{(1-6)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{26}$

$|\overline{AD}| = \sqrt{(2-1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{26}$

Ahora probaremos que sus lados son perpendiculares

$m_{DA} = \frac{4+1}{2-1} = 5$; $m_{AB} = \frac{3-4}{7-2} = -\frac{1}{5}$; $m_{BC} = \frac{-2-3}{6-7} = 5$; $m_{CD} = \frac{-1+2}{1-6} = -\frac{1}{5}$

Dado que : $m_{DA} \cdot m_{AB} = -1$ y $m_{BC} \cdot m_{CD} = -1 \Rightarrow \overline{DA} \perp \overline{AB}$ y $\overline{BC} \perp \overline{CD}$

Por lo tanto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado

Finalmente, las pendientes de las diagonales son

$$m_{AC} = \frac{-2-4}{6-2} = -\frac{3}{2} \quad y \quad m_{DB} = \frac{3+1}{7-1} = \frac{2}{3}$$

Como $m_{AC} \cdot m_{DB} = -1$, entonces $\overline{AC} \perp \overline{DB}$

Si M es punto medio de $\overline{AC} \Rightarrow M\left(\frac{2+6}{2} , \frac{4-2}{2}\right) \Leftrightarrow M(4 , 1)$

y si M' es punto medio de $\overline{BD} \Rightarrow M'\left(\frac{7+1}{2} , \frac{3-1}{2}\right) \Leftrightarrow M'(4 , 1)$

M = M' , entonces las diagonales se bisecan mutuamente. 

25 Demostrar que los cuatro puntos A(2 , 1) , B(5 , 6) , C(9 , 9) y D(6 , 5) son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares.

Demostración. En efecto , por la fórmula de la distancia se demuestra que

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| = 5$$

$$m_{AB} = \frac{6-2}{5-2} = \frac{4}{3} \ , \ m_{DC} = \frac{9-5}{9-6} = \frac{4}{3}$$

$$m_{BC} = \frac{9-6}{9-5} = \frac{3}{4} \ , \ m_{AD} = \frac{5-2}{6-2} = \frac{3}{4}$$

Luego, $\overline{AB} \,||\, \overline{DC}$ y $\overline{BC} \,||\, \overline{AD}$, por lo tanto el cuadrilátero ABCD es un rombo.

Pendientes de las diagonales :

$$m_{AC} = \frac{9-2}{9-2} = 1 \ , \ m_{DB} = \frac{5-6}{6-5} = -1$$

$$\Rightarrow m_{AC} \cdot m_{DB} = -1 \Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{DB}$$ ■

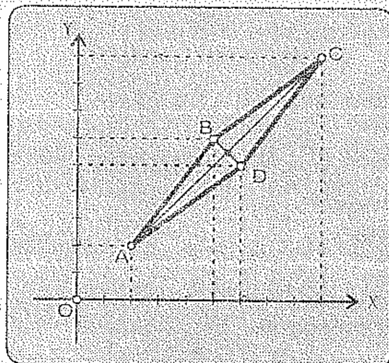


FIGURA 1.41

1.8 DEMOSTRACION DE TEOREMAS GEOMETRICOS POR EL METODO ANALITICO

Los métodos analíticos se pueden emplear en forma muy efectiva para demostrar teoremas de la geometría euclidiana plana.

Cuando se emplean coordenadas para demostrar un teorema, puede facilitarse a veces la demostración si los ejes coordenados se orientan de alguna manera particular con respecto a la figura de que se trate; no se pierde generalidad haciendo esto, puesto que la orientación y colocación de los ejes en el plano es arbitraria.

EJERCICIOS . *Grupo 4*

1 Las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

Demostración. La posición más sencilla, con relación a los ejes coordenados, para un paralelogramo cualquiera es el de la Figura 1.42. Empezamos por asignar los vértices A(a , 0) y C(b , c). Como $\overline{CB}$ es paralelo e igual a $\overline{OA}$, entonces la ordenada de B es igual a la ordenada de C y su abscisa es a unidades mayor que la abscisa de C; luego, B($a + b$, c).

Para demostrar que las diagonales se bisecan mutuamente, bastará determinar que los puntos medios de dichas diagonales coinciden. En efecto :

Punto medio de $\overline{OB}$: $M\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ \frac{c}{2}\right)$

Punto medio de $\overline{AC}$: $M'\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ \frac{c}{2}\right)$

Como M = M' , queda demostrado el teorema. ■

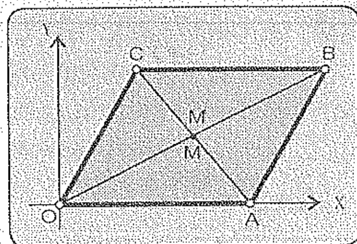


FIGURA 1.42

3 Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre si y se cortan en su punto medio.

Demostración. En efecto, sea el rombo OABC, cuyas coordenadas de sus vértices se determinan como en el Ejercicio 1.

Pendiente de $\overline{OB}$: $m_1 = \frac{c}{a+b}$

Pendiente de $\overline{AC}$: $m_2 = \frac{c}{b-a}$

Producto de las pendientes: $m_1\, m_2 = \frac{c^2}{b^2-a^2}$ (1)

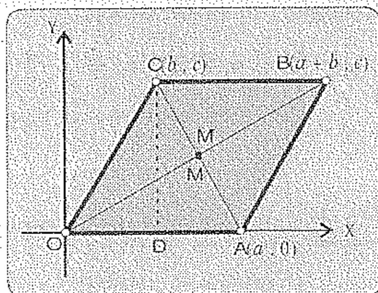


FIGURA 1.43

Como el rombo es un paralelogramo de lados iguales, en el ΔODC, por el Teorema de Pitágoras :

$$|\overline{DC}|^2 = |\overline{OC}|^2 - |\overline{OD}|^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

Sustituyendo en (1) se tiene : $m_1\, m_2 = \frac{a^2-b^2}{b^2-a^2} = -1 \Rightarrow \overline{OB} \perp \overline{AC}$

Punto medio de $\overline{OB}$: $M\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ \frac{c}{2}\right)$. Punto medio de $\overline{AC}$: $M'\left(\frac{a+b}{2}\ ,\ \frac{c}{2}\right)$

Vemos que los puntos medios de las diagonales coinciden, lo cual demuestra que éstas se cortan en su punto medio. ■

4 El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados cualesquiera de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

Demostración. En la Figura 1.44 se muestra el ΔOAB junto con las coordenadas de sus vértices y los puntos medios de sus lados $\overline{AB}$ y $\overline{OA}$

Pendiente de $\overline{OB}$: $m_1 = \frac{c}{b}$

Pendiente de $\overline{MN}$: $m_2 = \dfrac{c/2}{\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a}{2}} = \dfrac{c}{b}$

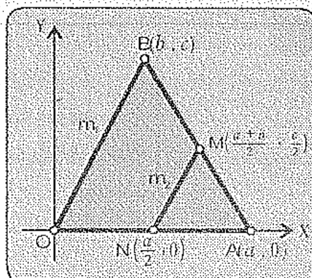


FIGURA 1.44

Luego, si $m_1 = m_2 \Rightarrow \overline{OB} \parallel \overline{NM}$

$|\overline{OB}| = \sqrt{b^2 + c^2}$

$|\overline{MN}| = \sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{2} - 0\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$

$$\therefore\ |\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{OB}|$$ ■

5 El punto de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

Demostración. Probaremos que :

$$|\overline{MO}| = |\overline{MB}| = |\overline{MA}|$$

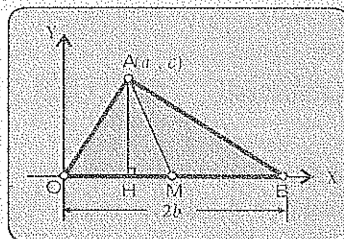


FIGURA 1.45

En efecto, designamos los vértices A(a , 0) y B($2b$, 0)

Si M es punto medio de $\overline{OB} \Rightarrow M(b , 0)$

Luego : $|\overline{MO}| = |0 - b| = b$, $|\overline{MB}| = |2b - b| = b$

$|\overline{MA}| = \sqrt{(a-b)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + c^2}$ (1)

Pero en todo triángulo rectángulo :

$$|\overline{AH}|^2 = |\overline{OH}| \times |\overline{HB}| \Rightarrow c^2 = a(2b - a) = 2ab - a^2$$

Sustituyendo en (1) : $|\overline{MA}| = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + (2ab - a^2)} = b$

Por lo que, si $|\overline{MO}| = |\overline{MB}| = |\overline{MA}| \Rightarrow$ M equidista de los vértices. ■

6 Los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales

Demostración. Sea el triángulo isósceles OBA, donde se debe probar que : $\alpha = \beta$

En efecto, designemos los vértices A($2a$, 0) y B(a , b)

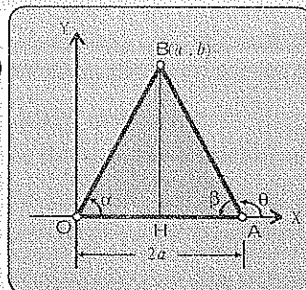


FIGURA 1.46

Pendiente de $\overline{OB}$: $m_1 = \text{Tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$ (1)

Pendiente de $\overline{AB}$: $m_2 = \text{Tg}\theta = \dfrac{b - 0}{a - 2a} = -\dfrac{b}{a}$

Como $\beta = \pi - \theta \Rightarrow \text{Tg}\beta = \text{Tg}(\pi - \theta) = -\text{Tg}\theta$

Luego : $\text{Tg}\alpha = -\left(-\dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{b}{a}$ (2)

De (1) y (2) se deduce que : $\text{Tg}\alpha = \text{Tg}\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ ■

7 Enunciar y demostrar el recíproco del teorema de Ejercicio 6.

Teorema recíproco. Los lados opuestos a los ángulos iguales de un triángulo isósceles son iguales.

Demostración. En el ΔOAB de la Figura 1.46, se debe probar que $\overline{OB} = \overline{AB}$

$$\text{En efecto, si } \alpha = \beta \Rightarrow \text{Sen}\alpha = \text{Sen}\beta \Leftrightarrow \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$$

$$\therefore \ \overline{OB} = \overline{AB}$$ ■

8 Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, la figura es un rectángulo.

Demostración. Sea el paralelogramo cuyos vértices se indican en la Figura 1.47

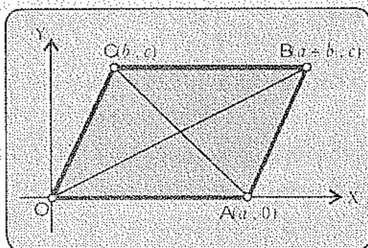


FIGURA 1.47

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos

$|\overline{OB}| = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ y $|\overline{AC}| = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$

Por hipótesis : $|\overline{OB}| = |\overline{AC}|$

$\Rightarrow \sqrt{(a+b)^2 + c^2} = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$

de donde obtenemos : $ab = 0$

Como $a \neq 0$, implica que $b = 0$. Si esto ocurre, entonces las coordenadas de C y B serán, C(O , c) y B(a , c); es decir, los lados del paralelogramo son paralelos y coincidentes con los ejes coordenados. Por tanto, la figura resultante es un rectángulo. ■

9 Las medianas correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

Demostración. Sea el ΔOAB cuyos vértices se indican en la Figura 1.48

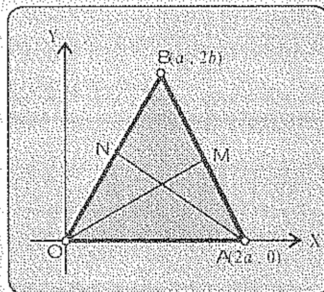


FIGURA 1.48

Debemos probar que : $|\overline{OM}| = |\overline{AN}|$

En efecto, M es punto medio de $\overline{AB} \Rightarrow$ M($3a/2$, b)

N es punto medio de $\overline{OB} \Rightarrow$ N($a/2$, b)

Por la fórmula de la distancia (Teorema 1.2)

$|\overline{OM}| = \sqrt{(3a/2)^2 + b^2} = \sqrt{9a^2/4 + b^2}$ (1)

$|\overline{AN}| = \sqrt{(a/2 - 2a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{9a^2/4 + b^2}$ (2)

Por lo tanto, de (1) y (2) se deduce que : $|\overline{OM}| = |\overline{AN}|$ ■

10 Enunciar y demostrar el recíproco del teorema del Ejercicio 9.

Teorema recíproco. Los lados que corresponden a dos medianas iguales de un triángulo isósceles son iguales.

La demostración queda como ejercicio.

Sugerencia: En el ΔOBA de la Figura 1.48, considere las coordenadas de los puntos medios N(c , m) y M(d , m) y exprese los vértices B y A en términos de estas coordenadas, luego por la fórmula de distancia, pruebe que $|\overline{OB}| = |\overline{AB}|$

11 Los dos segmentos que se obtienen uniendo dos vértices opuestos de un paralelogramo con los puntos medios de dos lados opuestos son iguales y paralelos.

Demostración. Sea el paralelogramo OABC cuyos vértices se dan en la Figura 1.49

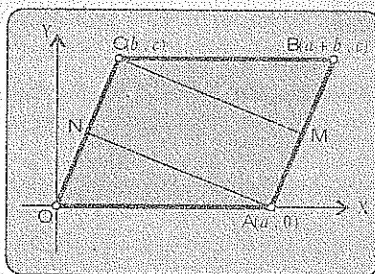


FIGURA 1.49

Punto medio de $\overline{AB}$: $M\left(\frac{2a+b}{2}\ ,\ \frac{c}{2}\right)$

Punto medio de $\overline{OC}$: $N\left(\frac{b}{2}\ ,\ \frac{c}{2}\right)$

$$|\overline{MC}| = \sqrt{\left(\frac{2a+b}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - c\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(2a-b)^2 + c^2}$$

$$|\overline{AN}| = \sqrt{\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(2a-b)^2 + c^2}$$

$$\therefore\ |\overline{MC}| = |\overline{AN}|$$

Demostraremos ahora que $\overline{MC} \parallel \overline{AN}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pendiente de } \overline{MC}:\ m_1 = \dfrac{c - c/2}{b - \dfrac{2a+b}{2}} = \dfrac{c}{b - 2a} \\ \text{Pendiente de } \overline{AN}:\ m_2 = \dfrac{c/2 - 0}{b/2 - a} = \dfrac{c}{b-2a} \end{array}\right\} m_1 = m_2 \Rightarrow \overline{MC} \parallel \overline{AN} \quad ■$$

12 El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases e igual a su semisuma.

Demostración. Sea el trapecio OABC cuyos lados paralelos miden a y b unidades, y cuyas coordenadas de sus vértices se indican en la Figura 1.50.

Las coordenadas de los puntos medios de los lados $\overline{OC}$ y $\overline{AB}$ son :

$$M\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right) \text{ y } N\left(\frac{a+b+c}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

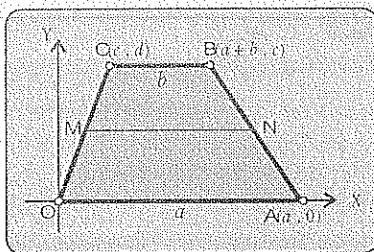


FIGURA 1.50

Vemos que las ordenadas de M y N son iguales, por lo que la pendiente de $\overline{MN}$ es cero, osea $\overline{MN}$ es paralelo al eje X, esto es :

$$\overline{MN} \parallel \overline{OA} \parallel \overline{CB}$$

Finalmente, la longitud de $\overline{MN}$ es : $|\overline{MN}| = \dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{c}{2} = \dfrac{a+b}{2}$ ■

13 El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es igual a la mitad de la diferencia de las longitudes de los lados paralelos.

Demostración. Sea el trapecio OABC cuyos vértices se dan en la Figura 1.51.

Probaremos que : $|\overline{MN}| = \left|\dfrac{a-b}{2}\right|$

En efecto, las coordenadas de los puntos medios de las diagonales son :

$$M\left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}\right) \text{ y } N\left(\frac{a+c}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

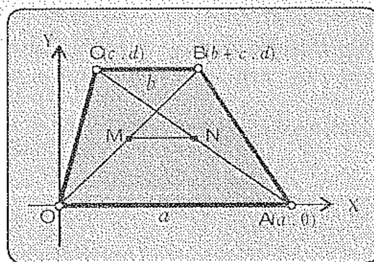


FIGURA 1.51

Por lo que, la longitud del segmento $\overline{MN}$ es

$$|\overline{MN}| = \left|\frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2}\right| = \left|\frac{a-b}{2}\right|$$ ■

14 La suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

Demostración. Sea el paralelogramo OABC cuyos vértices se indican en la Figura 1.52

Si $|\overline{OA}| = |\overline{CB}| = a$ y $|\overline{OC}| = |\overline{AB}| = \sqrt{b^2+c^2}$

$\Rightarrow |\overline{OA}|^2 + |\overline{AB}|^2 + |\overline{CB}|^2 + |\overline{OC}|^2 =$

$a^2 + (b^2+c^2) + a^2 + (b^2+c^2) = 2(a^2+b^2+c^2)$ (1)

Además se tiene :

$|\overline{OB}| = \sqrt{(a+b)^2+c^2}$ y $|\overline{AC}| = \sqrt{(a-b)^2+c^2}$

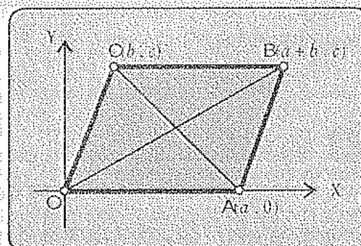


FIGURA 1.52

$$\Rightarrow |\overline{OB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = (a+b)^2 + c^2 + (a-b)^2 + c^2$$
$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) se deduce que :

$$|\overline{OA}|^2 + |\overline{AB}|^2 + |\overline{CB}|^2 + |\overline{OC}|^2 = |\overline{OB}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

con lo que el teorema está demostrado. ■

15 Los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan entre si.

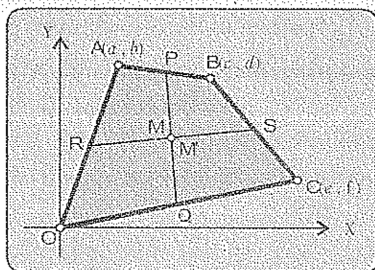


FIGURA 1.53

Demostración. Sea el cuadrilátero OABC, cuyas coordenadas de sus vértices se muestran en la Figura 1.53

Probaremos que los segmentos $\overline{RS}$ y $\overline{PQ}$ se cortan en un mismo punto.

En efecto, las coordenadas de los puntos medios de los lados del cuadrilátero son

$$P\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right), \ Q\left(\frac{e}{2}, \frac{f}{2}\right), \ R\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \ S\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right)$$

Si M es punto medio de $\overline{PQ} \Rightarrow M\left(\frac{a+c+e}{2}, \frac{b+d+f}{2}\right)$

Si M' es punto medio de $\overline{RS} \Rightarrow M'\left(\frac{a+c+e}{2}, \frac{b+d+f}{2}\right)$

Como M = M', los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ se bisecan entre si. ■

16 Los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados contiguos de un rectángulo forman un rombo.

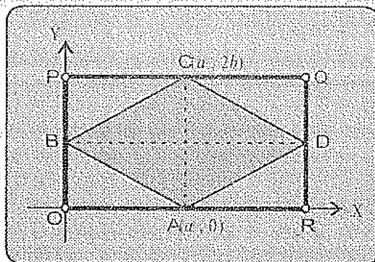


FIGURA 1.54

Demostración. Sea el rectángulo OPQR cuyos yos lados miden

$$|\overline{OR}| = 2a \ \text{ y } \ |\overline{OP}| = 2b$$

Entonces, las coordenadas de los puntos medios de cada lado son :

A(a , 0) , B(0 , b) , C(a , 2b) y D(2a , b)

$$m_{AD} = \frac{b-0}{2a-a} = \frac{b}{a}, \ m_{BC} = \frac{2b-b}{a-0} = \frac{b}{a} \Rightarrow \overline{AD} \,||\, \overline{BC}$$

Análogamente : $m_{AB} = m_{DC} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

Además : $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y como los ángulos formados por dos lados contiguos no son rectos, el cuadrilátero ABCD es un rombo. ∎

17 Los segmentos que unen los puntos medios de cada par de lados contiguos de un rombo forman un rectángulo.

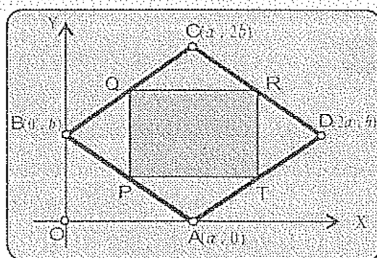


FIGURA 1.55

Demostración. Sea el rombo ABCD, cuyas coordenadas de sus vértices se muestran en la Figura 1.55. Entonces, las coordenadas de los puntos medios de sus lados son :

P($a/2$, $b/2$) , Q($a/2$, $3b/2$) , R($3a/2$, $3b/2$) , T($3a/2$, b/2) .

$$\left.\begin{array}{l} m_{PT} = \dfrac{b/2 - b/2}{3a/2 - 0/2} = \dfrac{0}{a} = 0 \\ m_{QR} = \dfrac{3b/2 - 3b/2}{3a/2 - a/2} = \dfrac{0}{a} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PT} \parallel \overline{QR} \parallel \text{ Eje X}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{PQ} = \dfrac{3b/2 - b/2}{a/2 - a/2} = \dfrac{b}{0} = \infty \\ m_{TR} = \dfrac{3b/2 - b/2}{3a/2 - 3a/2} = \dfrac{b}{0} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{TR} \parallel \text{ Eje Y}$$

Como $\overline{PT} \perp \overline{PQ}$ y $\overline{QR} \perp \overline{TR}$, el paralelogramo PQRT es un rectángulo. ∎

18 Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son iguales.

Demostración. Sea el trapecio OABC, cuyos lados paralelos miden a y b unidades. Luego, el vértice A = (a , 0) y como $\overline{CB} \parallel \overline{OA}$, la ordenada de C es la misma de B. En la Figura 1.56 :

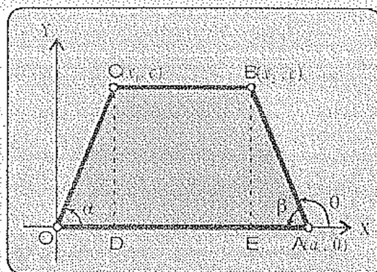


FIGURA 1.56

$$\overline{OA} = \overline{OD} + \overline{DE} + \overline{EA} \Rightarrow a = x_1 + b + x_1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{a - b}{2}$$

$$\overline{OE} = \overline{OD} + \overline{DE} \Rightarrow x_2 = x_1 + b \Leftrightarrow x_2 = \frac{a + b}{2}$$

Por lo que : $C = \left(\frac{a-b}{2}\ ,\ c\right)$ y $B = \left(\frac{a+b}{2}\ ,\ c\right)$

Pendiente de $\overline{OC}$: $m_1 = \text{Tg}\alpha = \frac{c}{x_1} = \frac{2c}{a-b}$ (1)

Pendiente de $\overline{AB}$: $m_2 = \text{Tg}\theta = \frac{c}{x_2 - a} = \frac{2c}{b-a} = -\frac{2c}{a-b}$ (2)

De (1) y (2) se deduce que : $\text{Tg}\alpha = -\text{Tg}\theta = -\text{Tg}(\pi - \beta) = \text{Tg}\beta$

$$\therefore\ \alpha = \beta$$ ■

19 Los puntos medios de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero y los puntos medios de las diagonales son vértices de un paralelogramo.

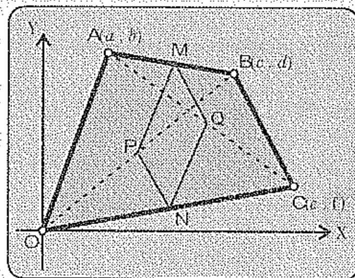


FIGURA 1.57

Demostración. Sea el cuadrilátero OABC, cuyas coordenadas de sus vértices se muestran en la Figura 1.57.

Probaremos que $\overline{PM} \,||\, \overline{NQ}$ y $\overline{QM} \,||\, \overline{NP}$

En efecto, las coordenadas de los puntos medios de los lados y las diagonales del cuadrilátero son :

$$M\left(\frac{a+c}{2}\ ,\ \frac{b+d}{2}\right)\ ,\ N\left(\frac{e}{2}\ ,\ \frac{f}{2}\right)\ ,\ P\left(\frac{c}{2}\ ,\ \frac{d}{2}\right)\ ,\ Q\left(\frac{a+e}{2}\ ,\ \frac{b+f}{2}\right)$$

$$m_{PM} = \frac{\frac{b+d}{2} - \frac{d}{2}}{\frac{a+c}{2} - \frac{c}{2}} = \frac{b}{a}\ ;\ m_{NQ} = \frac{\frac{b+f}{2} - \frac{f}{2}}{\frac{a+e}{2} - \frac{e}{2}} = \frac{b}{a}$$

$$m_{QM} = \frac{\frac{b+d}{2} - \frac{b+f}{2}}{} = \frac{d-f}{c-e}\ ;\ m_{NP} = \frac{\frac{d}{2} - \frac{f}{2}}{\frac{c}{2} - \frac{e}{2}} = \frac{d-f}{c-e}$$

Dado que ; $m_{PM} = m_{NQ}$ y $m_{QM} = m_{NP}$; entonces : $\overline{PM} \,||\, \overline{NQ}$ y $\overline{QM} \,||\, \overline{NP}$.

Por tanto, la figura PMQN es un paralelogramo y el teorema queda demostrado. ■

20 Enunciar y demostrar el recíproco del teorema de Pitágoras

Teorema recíproco. *En un triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

Demostración. Sea el triángulo rectángulo OAB, cuyas coordenadas de sus vértices se indican en la Figura 1.58

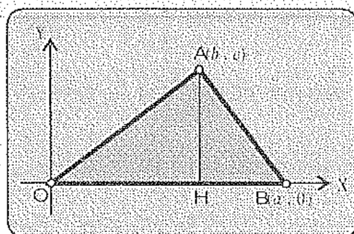


FIGURA 1.58

Por el teorema de la distancia : $|\overline{OA}| = \sqrt{b^2 + c^2}$

$\Rightarrow |\overline{OA}|^2 = b^2 + c^2$ (1)

En todo triángulo rectángulo se cumple

$|\overline{HA}|^2 = |\overline{OH}| \times |\overline{HB}| \Rightarrow c^2 = b(a - b) = ab - b^2$

$\Rightarrow b^2 + c^2 = ab$ (2)

De (1) y (2) se sigue que : $|\overline{OA}|^2 = ab$ (3)

Como $|\overline{AB}| = \sqrt{(a - b)^2 + c^2} \Rightarrow |\overline{AB}|^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2$

Luego, por (1) y (3) se tiene : $|\overline{AB}|^2 = |\overline{OB}|^2 - 2|\overline{OA}|^2 + |\overline{OA}|^2$

$\therefore |\overline{AB}|^2 = |\overline{OB}|^2 - |\overline{OA}|^2$ ■

21 El segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de cualquier cuadrilátero y el que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero se bisecan entre sí.

Demostración. Sea el cuadrilátero OABC con las coordenadas de sus vértices indicadas en la Figura 1.59. Tenemos que demostrar que los segmentos $\overline{RS}$ y $\overline{PQ}$ se bisecan entre sí. Esto sugiere la obtención de las coordenadas de los puntos medios R , S , P y Q. Esto es :

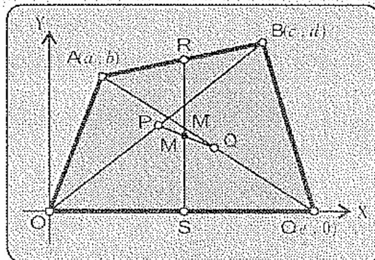


FIGURA 1.59

$$R\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right), \quad S\left(\frac{e}{2}, 0\right), \quad P\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right), \quad Q\left(\frac{a+e}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

Si M es punto medio de $\overline{RS}$ $\Rightarrow M = \left(\frac{a+c+e}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

y si M' es punto medio de $\overline{PQ}$ $\Rightarrow M' = \left(\frac{a+c+e}{2}, \frac{d+b}{2}\right)$

Dado que M = M' , los segmentos $\overline{RS}$ y $\overline{PQ}$ se bisecan entre sí, con lo que el teorema queda demostrado. ■



El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio biseca a ambas diagonales.

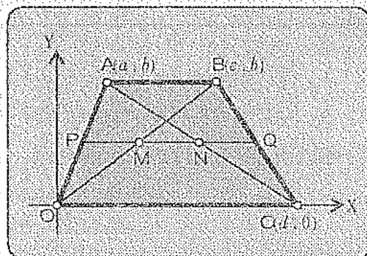


FIGURA 1.60

Demostración. Sea el trapecio OABC cuyas coordenadas de sus vértices se indican en la Figura 1.60. Como P y Q son puntos medios de los lados no paralelos $\overline{OA}$ y $\overline{BC}$, el segmento $\overline{PQ}$ es la mediana del trapecio.

Luego, si $P\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $Q\left(\frac{c+d}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $M\left(x_1, \frac{b}{2}\right)$, $N\left(x_2, \frac{b}{2}\right)$

bastará probar que $x_1 = \frac{c}{2}$ y $x_2 = \frac{a+d}{2}$

En efecto, por el teorema del Ejercicio 4, tendremos :

En el ΔAOB : $\frac{PM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_1 - a/2}{c-a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{c}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$

En el ΔACB : $\frac{NA}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{c+d}{2} - x_2}{c-a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{a+d}{2} \Rightarrow N\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ■



La suma de los cuadrados de las distancias de cualquier punto de un plano a dos vértices opuestos de cualquier rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los otros dos vértices.

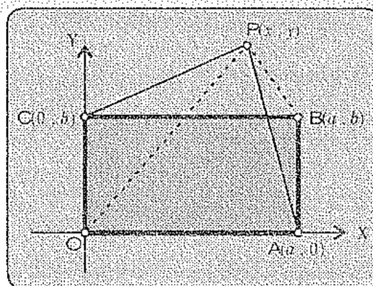


FIGURA 1.61

Demostración. Sea el rectángulo OABC y un punto $P(x, y)$ cualquiera del plano. Por la fórmula de la distancia :

$|\overline{CP}| = \sqrt{x^2 + (y-b)^2}$, $|\overline{AP}| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$

$$\Rightarrow |\overline{CP}|^2 + |\overline{AP}|^2 = x^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + y^2$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - 2(ax + by) + a^2 + b^2 \qquad (1)$$

$|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|\overline{BP}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

$$\Rightarrow |\overline{OP}|^2 + |\overline{BP}|^2 = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - 2(ax + by) + a^2 + b^2 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que : $|\overline{CP}|^2 + |\overline{AP}|^2 = |\overline{OP}|^2 + |\overline{BP}|^2$ ■

24 Si O , A , B , y C son los vértices sucesivos de un paralelogramo, y D y E los puntos medios de los lados $\overline{AO}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, los segmentos $\overline{DB}$ y $\overline{OE}$ trisecan a la diagonal $\overline{AC}$.

Demostración. En la Figura 1.62 se muestra el paralelogramo OABC junto con las coordenadas de sus vértices.

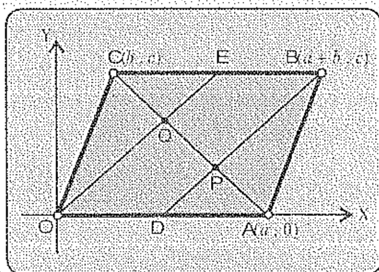


FIGURA 1.62

Los puntos medios de los $\overline{CB}$ y $\overline{OA}$ son:

$$E\left(\frac{a+2b}{2}, c\right) \text{ y } D\left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

Probaremos que $\overline{DB}$ triseca a la diagonal $\overline{AC}$.
En efecto, sea P(x , y) las coordenadas de un punto P ∈ $\overline{AC}$.

$$\text{Si } \frac{CP}{PA} = 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-b}{a-x} = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2a+b}{3} \\ \dfrac{y-c}{0-y} = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{c}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

$$\frac{BP}{PD} = 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-(a+b)}{a/2-x} = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2a+b}{3} \\ \dfrac{y-c}{0-y} = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{c}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \left(\frac{2a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

Dado que ambos puntos coinciden, entonces P es punto de trisección de la diagonal $\overline{AC}$.
Análogamente se demuestra que Q es punto de trisección de $\overline{AC}$. ■

Capítulo 2

GRAFICA DE UNA ECUACION Y LUGARES GEOMETRICOS

2.1 PRIMER PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA ANALITICA : GRAFICA DE UNA ECUACION

En la discusión y el trazado de la gráfica de una ecuación en dos variables x e y, de la forma

$$f(x, y) = 0$$

intervienen los siguientes pasos :

1. Intersecciones con los ejes coordenados.
2. Simetría con respecto a los ejes coordenados y al origen de coordenadas.
3. Determinación de la extensión de la curva.
4. Determinación de las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales u oblícuas que la curva pueda tener.
5. Tabulación de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.
6. Trazado de la curva.

2.1.1 INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

a) **Con el eje X.** Se obtiene haciendo y = 0 en la ecuación y resolviendo la ecuación resultante $f(x, 0) = 0$. El punto $(a, 0)$ se llama X - *intersección* de la gráfica.

Por ejemplo, si en la ecuación $f(x, y) : x^2 + y^2 - 5x - 2y - 14 = 0$, hacemos y = 0 , obtenemos la ecuación $f(x, 0) : x^2 - 5x - 14 = 0$

$$\Rightarrow (x-7)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=7 \text{ ó } x=-2$$

Luego, X - intersecciones : $P_1(7, 0)$ y $P_2(-2, 0)$

b) **Con el eje Y.** Se obtiene haciendo $x = 0$ en la ecuación y resolviendo $f(0, y) = 0$. El punto $(0, b)$ se llama **Y - *intersección*** de la gráfica.

Por ejemplo, si en la ecuación $f(x, y): y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$, hacemos $x = 0$ obtenemos $f(0, y): y^2 - 8y + 12 = 0$

$$\Rightarrow (y-2)(y-6)=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ ó } y=6$$

$\therefore$ **Y - *intersecciones*** : $P_1(0, 2)$ y $P_2(0, 6)$

2.1.2 CRITERIOS DE SIMETRIA

En este segundo punto se considera los criterios de simetría de la gráfica de una ecuación respecto de los ejes coordenados y al origen.

a) **Con el eje X.** Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es reemplazado por $-y$, esto es, $f(x, y) = f(x, -y)$, se dice que la gráfica de la curva es simétrica con respecto al eje X.

Por ejemplo, si en la ecuación $f(x, y): 4x^2 + 3y^2 = 12$, hacemos $y = -y$ se tiene :

$$f(x, -y): 4x^2 + 3(-y)^2 = 12 \Rightarrow f(x, -y): 4x^2 + 3y^2 = 12$$

Como $f(x, -y) = f(x, y)$, la curva es simétrica respecto al eje X.

b) **Con el eje Y.** Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es reemplazada por $-x$, esto es, $f(x, y) = f(-x, y)$, se dice que la gráfica de la curva es simétrica con respecto al eje Y.

Por ejemplo, si en la ecuación $f(x, y): 9x^2 - 4y^2 = 36$, hacemos $x = -x$ se tiene :

$$f(-x, y): 9(-x)^2 - 4y^2 = 36 \Rightarrow f(-x, y): 9x^2 - 4y^2 = 36$$

Como $f(-x, y) = f(x, y)$, la gráfica de la curva es simétrica respecto al eje Y.

c) **Con el origen.** Si la ecuación de una curva no se altera al reemplazar simultáneamente x por $-x$ e y por $-y$, esto es, $f(x, y) = f(-x, -y)$, la gráfica de la curva es simétrica respecto al origen.

Por ejemplo, en la ecuación $f(x, y): 8x^3 - y = 0$, hacemos $x = -x$ e $y = -y$, entonces:

$f(-x, -y): 8(-x)^3 - (-y) = 0 \Leftrightarrow f(-x, -y): -8x^3 + y = 0 \Rightarrow f(-x, -y): 8x^3 - y = 0$

Como $f(x, y) = f(-x, -y)$, la curva es simétrica respecto al origen.

2.1.3 EXTENSION DE UNA CURVA

Mediante este tercer punto se determina el intervalo o intervalos de variación para los cuales los valores de x e y son reales. Esta información es útil por las siguientes razones :

a) Da la localización general de la curva en el plano coordenado

b) Indica si la curva es cerrada o si es de extensión indefinida.

El intervalo o los intervalos para los cuales x es un número real se denomina *dominio de la ecuación* y se determina resolviendo la ecuación $y = f(x)$.

El intervalo o los intervalos para los cuales y es un número real se denomina *rango de la ecuación* y se determina resolviendo la ecuación $x = g(y)$

Por ejemplo, si queremos hallar el dominio de la ecuación $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$, debemos despejar $y = f(x)$, ordenando previamente la ecuación, esto es

$$4y^2 - 16y + (x^2 - 2x + 13) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(x^2 - 2x + 13)}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{-4x^2 + 8x + 12}}{4}$$

Luego, y es real $\Leftrightarrow -4x^2 + 8x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 4$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2 \Rightarrow x \in [-1, 3]$$

Ahora, si queremos hallar el rango de la ecuación despejamos $x = g(y)$

$$x^2 - 2x + (4y^2 - 16y + 13) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - (4y^2 - 16y + 13)} = 1 \pm 2\sqrt{1 - (y-2)^2}$$

Luego, x es real $\Leftrightarrow 1 - (y-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y-2)^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq y - 2 \leq 1 \Rightarrow y \in [1, 3]$$

Como los intervalos del dominio y rango son finitos, la gráfica de la ecuación es una curva cerrada.

2.1.4 ASINTOTAS

Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama *asíntota* de la curva.

Existen tres clases de asíntotas : horizontales, verticales y oblícuas

a) **Asíntotas Horizontales.** Son rectas paralelas o coincidentes con el eje X, y tienen por ecuación : $y = k$

Para determinar las asíntotas horizontales de una curva se ordena la ecuación

$f(x, y) = 0$ en potencias decrecientes de x, luego se iguala a cero el coeficiente de mayor potencia de x.

Por ejemplo; para hallar las asíntotas horizontales de la ecuación

$$f(x, y) : x^2y^2 - 4x^2 - y^2 + 2x - 1 = 0$$

ordenamos ésta en potencias decrecientes de x, esto es :

$$f(x, y) : (y^2 - 4)x^2 + 2x - (y^2 + 1) = 0$$

La potencia más alta de x es x^2, y su coeficiente es $y^2 - 4$. Entonces, si

$$y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2 \text{ ó } y = 2$$

son las asíntotas horizontales de la curva.

b) **Asíntotas Verticales.** Son rectas paralelas o coincidentes con el eje Y, y tienen por ecuación : $x = h$

Para determinar las asíntotas verticales de una curva se ordena su ecuación en potencias decrecientes de y, luego se iguala a cero el coeficiente de la mayor potencia de y.

Por ejemplo, si $f(x, y) : x^2y^2 - y^2 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$, ordenamos la ecuación en potencias decrecientes de y, esto es

$$f(x, y) : (x^2 - 1)y^2 - (4x^2 - 2x + 1) = 0$$

La potencia más alta de y es y^2, y su coeficiente es $x^2 - 1$. Luego, si

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

son las asíntotas verticales de la curva

c) **Asíntotas Oblicuas.** Son rectas que no son paralelas a ninguno de los ejes coordenados y tienen por ecuación : $y = mx + k$

Para determinar las asíntotas oblicuas, se reemplaza el valor $y = mx + k$ en la ecuación dada; se ordena la ecuación resultante en potencias decrecientes de x, luego, se iguala a cero las dos potencias más altas de x.

Por ejemplo, si queremos hallar las asíntotas oblicuas de la curva de ecuación $x^3 - xy^2 + 2y^2 = 0$, sustituimos el valor $y = mx + k$

$$x^3 - x(mx + k)^2 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - m^2)x^3 - 2mkx^2 - k^2x + 2y^2 = 0$$

Las potencias más altas de x son x^3 y x^2

Luego, según la regla : $1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

$$-2mk = 0 \Rightarrow k = 0$$

Por tanto, las asíntotas oblicuas son : $y = x$ ó $y = -x$

EJERCICIOS : *Grupo 6*

1 Construir una gráfica correspondiente a la ecuación : $xy - 2y - 3 = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : xy - 2y - 3 = 0$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje X : Si $y = 0 \Rightarrow f(x, 0) : x(0) - 2(0) - 3 = 0 \Rightarrow -3 = 0$

$\therefore \nexists$ X - intersección

b) Con el eje Y : Si $x = 0 \Rightarrow f(0, y) : (0)y - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3/2$

$\therefore$ Y - intersección = A(0 , -3/2)

2. *Simetría*

a) Con el eje X . $f(x, -y) : x(-y) - 2(-y) - 3 = 0 \Rightarrow -xy + 2y - 3 = 0 \neq f(x, y)$

b) Con el eje Y. $f(-x, y) : (-x)y - 2y - 3 = 0 \Rightarrow -xy - 2y - 3 = 0 \neq f(x, y)$

c) Con el origen. $f(-x, -y) : (-x)(-y) - 2(-y) - 3 = 0 \Rightarrow xy + 2y - 3 = 0 \neq f(x, y)$

Luego la curva no es simétrica con los ejes coordenados, ni con el origen.

3. *Extensión*

a) Dominio de la ecuación : $y = f(x)$

$$y = \frac{3}{x - 2} \Rightarrow x \in R - \{2\}$$

$$\Rightarrow Dom(f) = \langle -\infty , 2\rangle \cup \langle 2 , +\infty\rangle$$

b) Rango de la ecuación : $x = g(y)$

$$x = \frac{2y + 3}{y} \Rightarrow x \in R - \{2\}$$

$$\Rightarrow Ran(f) = \langle -\infty , 0\rangle \cup \langle 0 , +\infty\rangle$$

6. *Trazado de la curva*

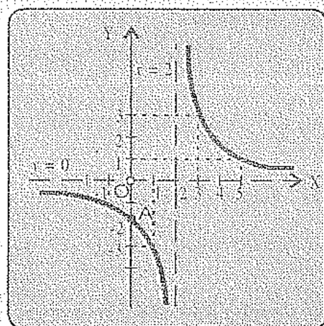


FIGURA 2.1

4. *Asíntotas*

a) Asíntotas horizontales : $yx - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 0$ es A. H.

b) Asíntotas verticales : $(x - 2)y - 3 = 0 \Rightarrow x = 2$ es A. V.

5. *Tabla de valores*

Si $x > 2 \Rightarrow y$ es (+)

Si $x < 2 \Rightarrow y$ es (-)

$$y = \frac{3}{x - 2}$$

x	3	5	1	-1
y	3	1	-3	-1

■

2 Construir la curva correspondiente a la ecuación $xy - 2x - 1 = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : xy - 2x - 1 = 0$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje X : Si $y = 0 \Rightarrow f(x, 0) : x(0) - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$

$\therefore$ X - intersección = A(-1/2 , 0)

b) Con el eje Y : Si $x = 0 \Rightarrow f(0, y) : (0)y - 2(0) - 1 = 0 \Rightarrow -1 = 0$

$\therefore \nexists$ Y - intersección

2. *Simetría*

a) Con el eje X . $f(x, -y) : x(-y) - 2x - 1 = 0 \Rightarrow -xy - 2x - 1 = 0 \neq f(x, y)$

b) Con el eje Y. $f(-x, y) : (-x)y - 2(-x) - 1 = 0 \Rightarrow -xy + 2x - 1 = 0 \neq f(x, y)$

c) Con el origen. $f(-x, -y) : (-x)(-y) - 2(-x) - 1 = 0 \Rightarrow xy + 2x - 1 = 0 \neq f(x, y)$

Luego, la curva no es simétrica con los ejes coordenados, ni con el origen.

3. *Extensión*

a) Dominio de la ecuación : $y = f(x)$

$$y = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty , 0\rangle \cup \langle 0 , +\infty\rangle$$

b) Rango de la ecuación : $x = g(y)$

$$x = \frac{1}{y-2} \Rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty , 2\rangle \cup \langle 2 , +\infty\rangle$$

4. *Asíntotas*

a) Asíntotas horizontales : $yx - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 0$ es una A. H.

b) Asíntotas verticales : $(y - 2)x - 1 = 0$

$\Rightarrow y = 2$ es una A. V.

5. *Tabla de valores*

$$y = \frac{2x+1}{x}$$

x	-2	-1	1	2
y	1.5	1	3	2.5

6. *Trazado de la gráfica*

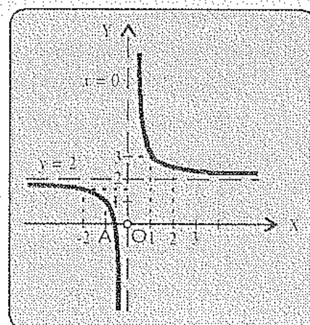


FIGURA 2.2

Con estos puntos y la información previa se dibuja la gráfica mostrada en la Figura 2.2 ■

3 Construir la curva cuya ecuación es : $x^4 + y^4 = 16$

Solución. Sea $f(x, y) : x^4 + y^4 = 16$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje X : Si $y = 0 \Rightarrow f(x, 0) : x^4 + (0)^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\therefore$ X - intersecciones = A(2 , 0) , B(-2 , 0)

b) Con el eje Y : Si $x = 0 \Rightarrow f(0, y) : (0)^4 + y(4) = 16 \Leftrightarrow y = \pm 2$

$\therefore$ Y - intersecciones = C(0 , 2) , D(0 , -2)

2. ***Simetría.*** Como las variables x e y tienen potencia de grado par, la gráfica de la ecuación es simétrica respecto a los ejes coordenados y al origen.

3. ***Extensión***

a) Dominio de la ecuación : $y = f(x)$

$y = \sqrt[4]{16 - x^4} \Rightarrow$ y es real $\Leftrightarrow 16 - x^4 \geq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in [-2, 2]$

b) Rango de la ecuación : $x = g(y)$

$x = \sqrt[4]{16 - y^4} \Rightarrow x$ es real $\Leftrightarrow y \in [-2, 2]$

Dado que los intervalos del dominio y rango son de extensión finitas, la gráfica de la ecuación es una curva cerrada, por tanto, no tiene asíntotas.

4. ***Tabla de Valores***

x	0	-1	1	±2
y	±2	± 1.96	± 1.96	0

5. ***Trazado de la gráfica***

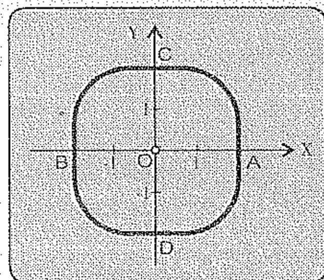


FIGURA 2.3

■

4 Construir la curva cuya ecuación es : $x^3 + x - y = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : x^3 + x - y = 0$

1. ***Intersecciones.*** Cuando una ecuación, como la dada, carece de término independiente, su gráfica contiene el origen y éste es la única intersección de la curva con los ejes coordenados.

2. ***Simetría.***

a) Con el eje X. $f(x, -y) : x^3 + x + y = 0 \neq f(x, y)$

b) Con el eje Y. $f(-x, y) : -x^3 - x - y = 0 \neq f(x, y)$

c) Con el origen. $f(-x, -y) : -x^3 - x + y = 0 = f(x, y)$

Luego, la curva es simétrica respecto del origen.

3. ***Extensión.*** La función polinómica tiene como dominio y rango al conjunto de los números reales. Esto es, Dom (f) = Ran (f) = R. Su gráfica carece de toda clase de asíntotas.

4. ***Tabla de Valores***

$y = x^3 + x$

x	-1	-2	1	2
y	-2	- 10	2	10

Con estos puntos y la información previa se dibuja la gráfica mostrada en la Figura 2.4. Obsérvese que se han elegido unidades de magnitud diferente sobre el eje Y con respecto a las del eje X. ■

5. ***Trazado de la gráfica***

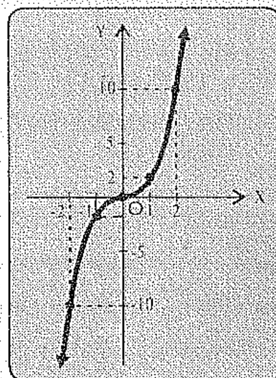


FIGURA 2.4

5 Discutir y dibujar la gráfica de la ecuación : $xy - 3y - x = 0$

Solución. Sea $f(x\,,\,y) : xy - 3y - x = 0$

1. *Intersecciones.* Como la ecuación carece de término independiente, su gráfica pasa por el origen.

2. *Simetría.*
   a) Con el eje X. $f(x\,,-y) : x(-y) - 3(-y) - x = 0 \Rightarrow -xy + 3y - x = 0 \neq f(x\,,y)$
   b) Con el eje Y. $f(-x\,,\,y) : (-x)y - 3y - (-x) = 0 \Rightarrow -xy - 3y + x = 0 \neq f(x\,,y)$
   c) Con el origen. $f(-x\,,-y) : (-x)(-y) - 3(-y) + x = 0 \Rightarrow xy + 3y + x = 0 \neq f(x\,,\,y)$
   Luego, la curva no es simétrica con los ejes coordenados, ni con el origen.

3. *Extensión.*
   a) Dominio de la ecuación. $y = f(x)$
   $y = \dfrac{x}{x-3} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty\,, 3\rangle \cup \langle 3\,, +\infty\rangle$
   b) Rango de la ecuación. $x = g(y)$
   $x = \dfrac{3y}{y-1} \Rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty\,, 1\rangle \cup \langle 1\,, +\infty\rangle$

4. *Asíntotas.*
   a) Asíntotas horizontales
   $(y-1)x - 3y = 0 \Rightarrow y = 1$ es una A. H.
   b) Asíntotas verticales
   $(x-3)y - x = 0 \Rightarrow x = 3$ es una A. V.

5. *Tabla de valores.* $y = \dfrac{x}{x-3}$

Si $x > 3$, la curva se extiende encima de la recta $y = 1$
Si $x < 3$, la curva se extiende debajo de la recta $y = 1$

x	4	6	2	-3
y	4	2	-2	1/2

Con todos estos puntos y la información previa se dibuja la gráfica mostrada en la Figura 2.5 ■

6. *Trazado de la gráfica*

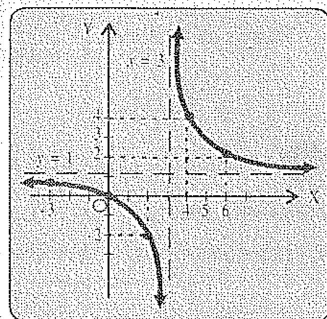


FIGURA 2.5

6 Construir la curva correspondiente a la ecuación : $xy - 3x - y = 0$

Solución. Sea $f(x\,,\,y) : xy - 3x - y = 0$

1. *Intersecciones.* Dado que la ecuación carece de término independiente, el único punto de intersección de la curva con los ejes coordenados es el origen.

2. *Simetría.*
   a) Con el eje X. $f(x\,,-y) : x(-y) - 3x - (-y) = 0 \Rightarrow -xy - 3x + y = 0 \neq f(x\,,\,y)$

b) Con el eje Y. $f(-x, y) : (-x)y - 3(-x) - y = 0 \Rightarrow -xy + 3x - y = 0 \neq f(x, y)$

c) Con el origen. $f(-x, -y) : (-x)(-y) + 3x + y = 0 \Rightarrow xy + 3x + y = 0 \neq f(x, y)$

Por tanto, la curva no es simétrica con los ejes coordenados, ni con el origen.

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación

$$y = \frac{3x}{x-1} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty , 1\rangle \cup \langle 1 , +\infty\rangle$$

b) Rango de la ecuación

$$x = \frac{y}{y-3} \Rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty , 3\rangle \cup \langle 3 , +\infty\rangle$$

4. *Asíntotas.* Del paso (3) obtenemos, en (a), la asíntota vertical $x = 1$, y en (b), la asíntota horizontal $y = 3$

5. *Tabla de valores*

$$y = \frac{3x}{x-1}$$

x	-2	0	2	4
y	2	0	6	4

6. *Trazado de la gráfica*

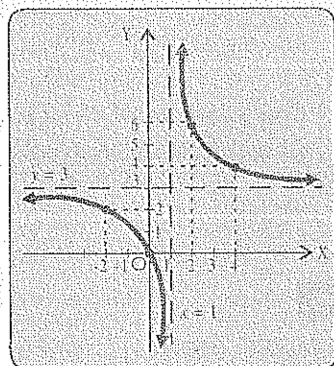


FIGURA 2.6

Con la ayuda de esta tabla de valores y la información ya determinada, dibujamos la gráfica mostrada en la Figura 2.6 ∎

7 Construir la curva cuya ecuación es : $xy - 2x - 2y + 2 = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : xy - 2x - 2y + 2 = 0$

1. *Intersecciones.*

a) Con el eje X. Si $y = 0 \Rightarrow f(x, 0) : x(0) - 2x - 2(0) + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ X - intersección = A(1 , 0)

b) Con el eje Y. Si $x = 0 \Rightarrow f(0, y) : (0)y - 2(0) - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

$\Rightarrow$ Y - intersección = B(0 , 1)

2. *Simetría.* La curva no es simétrica respecto a los ejes coordenados y al origen.

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación : $y = f(x)$

$$y = \frac{2x-2}{x-2} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty , 2\rangle \cup \langle 2 , +\infty\rangle$$

b) Rango de la ecuación : $x = g(y)$

$$x = \frac{2y-2}{y-2} \Rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty , 2\rangle \cup \langle 2 , +\infty\rangle$$

4. *Asíntotas.*

De (3a) obtenemos la asíntota vertical $x = 2$, y de (3b), la asíntota horizontal $y = 2$

5. *Tabla de valores.*

$$y = \frac{2x - 2}{x - 2}$$

x	-2	1.5	3	6
y	1.5	-2	4	2.5

Con estos puntos y con la discusión previa se dibuja la gráfica mostrada en la Figura 2.7 ■

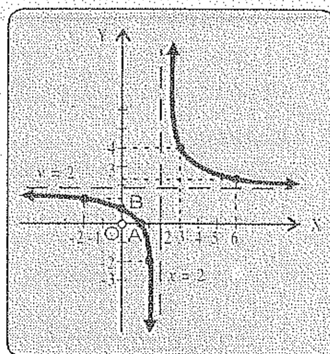


FIGURA 2.7

8 Discutir y esbozar la gráfica de la ecuación : $x^4 - 4x^2 - y = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : x^4 - 4x^2 - y = 0$

1. *Intersecciones.* La curva pasa por el origen. Además, para $y = 0$, se tiene

$$x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 2 \Rightarrow X\text{ - intersección} = (\pm 2, 0)$$

2. *Simetría.* La curva solamente es simétrica con respecto al eje Y, pues : $f(-x, y) = f(x, y)$

3. *Extensión.*

a) El dominio de la ecuación es R

b) Rango de la ecuación : $x = g(y)$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2 \pm \sqrt{4 + y}} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in [-4, +\infty\rangle$$

4. *Asíntotas.* La curva carece de asíntotas

5. *Tabla de valores*

$$y = x^2(x^2 - 4)$$

x	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$
y	-4	-3	-3	-4

■

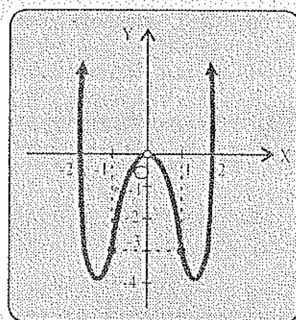


FIGURA 2.8

9 Construir la curva cuya ecuación es : $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje X. Si $y = 0 \Rightarrow f(x, 0) : x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

$$\Rightarrow X\text{ - intersecciones} = A(-1 + \sqrt{2}, 0), B(-1 - \sqrt{2}, 0)$$

b) Con el eje Y. Si $x = 0 \Rightarrow f(0, y) : y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{2}$

$$\Rightarrow Y\text{ - intersecciones} = C(0, 1 + \sqrt{2}), D(0, 1 - \sqrt{2})$$

2. *Simetría.* La curva no es simétrica con los ejes X e Y, ni con el origen, pues $f(x, -y) \neq f(x, y)$, $f(-x, y) \neq f(x, y)$ y $f(-x, -y) \neq f(x, y)$

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación. $y^2 + 2(x-1)y + (x^2 + 2x - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -(x-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 - (x^2+2x-1)} = (1-x) \pm \sqrt{2-4x}$

$\Rightarrow y \in R \Leftrightarrow 2 - 4x \geq 1/2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty , 1/2]$

b) Rango de la ecuación. $x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y - 1 = 0$

$\Rightarrow x = -(y+1) \pm \sqrt{(y+1)^2 - (y^2 - 2y - 1)} = -(y+1) \pm \sqrt{4y+2}$

$\Rightarrow x \in R \Leftrightarrow 4y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1/2 \Rightarrow \text{Ran}(f) = [-1/2 , +\infty\rangle$

4. *Asíntotas.* Como los coeficientes de x^2 e y^2 son constantes, la curva de la ecuación dada no tiene asíntotas horizontales ni verticales.

5. *Tabla de valores*

$y = (1-x) \neq \sqrt{2-4x}$

x	1/4	1/4	-1/2	-1/2
y	3/4	-1/4	7/2	-1/2

Con estos puntos y toda la información previa, construimos la gráfica de la ecuación mostrada en la Figura 2.9 ■

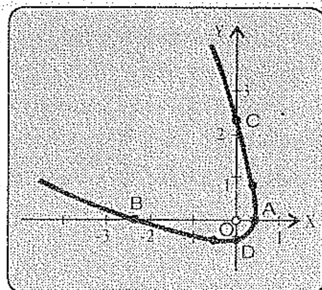


FIGURA 2.9

Nota. La construcción de la gráfica de la ecuación del Ejercicio 10 : $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$, es similar a la del Ejercicio 9. Se deja como ejercicio para el lector.

11 Discutir y dibujar la gráfica de la ecuación : $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$

1. *Intersecciones.*

a) Con el eje X : Si $y = 0 \Rightarrow f(x, 0) : x^3 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-4}$

$\Rightarrow$ Y - intersección = A$(\sqrt[3]{-4}, 0)$

b) Con el eje Y : Si $x = 0 \Rightarrow f(0, y) : y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

$\Rightarrow$ Y - intersección = B(0 , 2)

2. *Simetría.* La curva no es simétrica con respecto a los ejes x e y , ni con el origen pues : $f(x, -y) \neq f(x, y)$, $f(-x, y) \neq f(x, y)$ y $f(-x, -y) \neq f(x, y)$

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación. $y = f(x)$

$(y-2)^2 = -x^3 \Rightarrow y = 2 \pm x\sqrt{-x}$

$\Rightarrow y \in \mathrm{R} \Leftrightarrow -x \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \langle -\infty, 0]$

b) Rango de la ecuación: $x = g(y)$

$x = -\sqrt[3]{(y-2)^2} \Rightarrow x \in \mathrm{R}, \forall y \in \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{Ran}(f) = \mathrm{R}$

4. *Asíntotas.* Dado que los coeficientes de las variables x^3 e y^2 son constantes, la curva no tiene asíntotas horizontales ni verticales.

5. *Tabla de valores.*

$y = 2 \pm x\sqrt{-x}$

x	-1	-1	-2	-2
y	1	3	-0.82	4.82

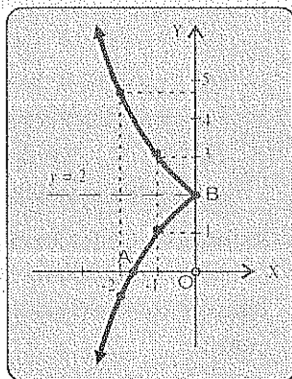


FIGURA 2.10

Con estos puntos y toda la información previa dibujamos la gráfica de la curva mostrada en la Figura 2.10. Obsérvese la simetría de la curva con respecto a la recta $y = 2$. Esto se debe a que si trasladamos el eje X hasta dicha recta y hacemos $y - 2 = y'$ la ecuación $(y-2)^2 = -x^3$ se transforma en $(y')^2 = (x')^3 \Rightarrow f(x', -y') = f(x', y')$ ■

12 Construir la curva cuya ecuación es : $y^3 - x^2 + 3y^2 + 2x + 3y = 0$

Solución. Mediante el artificio de sumar y restar la unidad podemos escribir

$$(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - (x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow f(x, y) : (y+1)^3 = (x-1)^2$$

1. *Intersecciones.*

a) Con el eje X. Si $y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ ó $x = 0$

$\Rightarrow$ X - intersección = A(2 , 0)

b) Con el eje Y. Si $x = 0 \Rightarrow (y+1)^3 = 1 \Rightarrow y = 0$. La curva pasa por el origen

2. *Simetría.* La curva no es simétrica con los ejes coordenados, ni con el origen, pues, $f(x, -y) \neq f(x, y)$; $f(-x, y) \neq f(x, y)$ y $f(-x, -y) \neq f(x, y)$

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación. $y = f(x)$

$y + 1 = \sqrt[3]{(x-1)^2} \Rightarrow y \in \mathrm{R}, \forall x \in \mathrm{R}$, esto es : $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{R}$

b) Rango de la ecuación. $x = g(y)$

$x - 1 = \sqrt{(y+1)^3} \Rightarrow x \in \mathrm{R} \Leftrightarrow y + 1 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Ran}(f) = [-1, +\infty\rangle$

4. *Asíntotas.* Los coeficientes de x^2 e y^3 son constantes, por lo tanto, la curva no tiene asíntotas horizontales y verticales.

5. *Tabla de valores.* $y = -1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

x	1	3	-3	-2
y	-1	0.58	0.58	1.08

Con estos puntos toda la información ya determinada se dibuja la gráfica de la curva mostrada en la Figura 2.11 ■

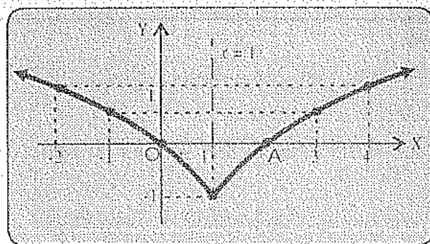


FIGURA 2.11

Nota. La discusión y construcción de la gráfica de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x - 2y - 2 = 0$$

correspondiente al Ejercicio 13 se deja como tarea para el estudiante.
Sugerencia : Transformar la ecuación a la forma $(x-1)^3 = (y+1)^2$, cuya gráfica es muy parecida a la del Ejercicio 11, con la diferencia de que ésta se abre hacia la derecha , $\forall x \geq 1$.

14 Construir la curva cuya ecuación es : $x^2y - 4y - x = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : x^2y - 4y - x = 0$

1. *Intersecciones.*
Como la ecuación carece de término independiente, el único punto de intersección de la curva con los ejes coordenados es el origen.

2. *Simetría.* La curva solamente es simétrica con respecto al origen, pues se cumple que : $f(-x, -y) = f(x, y)$

3. *Extensión.*
a) Dominio de la ecuación. $y = f(x)$

$$y = \frac{x}{x^2-4} \Rightarrow y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \neq \pm 2$$, esto es, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) Rango de la ecuación. $x = g(y)$

$$x = \frac{\pm\sqrt{1+16y^2}}{2y} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow y \neq 0$, es decir , $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

4. *Asíntotas.*
a) Asíntotas horizontales : $yx^2 - 4x - 4y = 0$
$\Rightarrow y = 0$ es una A. H.
b) Asíntotas verticales: $(x^2-4)y - x = 0$
$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ son dos A. V.

5. *Tabla de valores.* $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

x	1	-1	3	-3
y	-1/3	1/3	3/5	-3/5

■

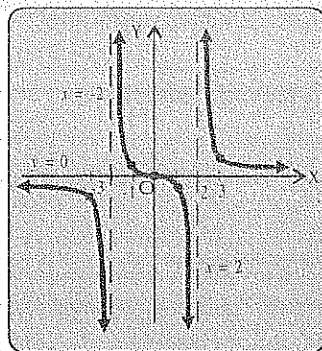


FIGURA 2.12

15 Discutir y construir la gráfica de la ecuación : $xy^2 - 9x - y - 1 = 0$

Solución. Sea $f(x\,,y) : x^2y^2 - 9x - y - 1 = 0$

1. ***Intersecciones.***

a) Con el eje X. Si $y = 0 \Rightarrow f(x\,,0) : 9x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/9$

$\Rightarrow$ X - intersección = A(-1/9 , 0)

b) Con el eje Y: Si $x = 0 \Rightarrow f(0\,,y) : -y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

$\Rightarrow$ Y - intersección = B(0 , -1)

2. ***Simetría.*** Como $f(x\,,-y) \neq f(x\,,y)$; $f(-x\,,y) \neq f(x\,,y)$ y $f(-x\,,-y) \neq f(x\,,y)$ la gráfica de $f(x\,,y)$ no es simétrica respecto a los ejes X e Y, ni respecto al origen.

3. ***Extensión.***

a) Dominio de la ecuación : $y = f(x)$

$$xy^2 - y - (9x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4x\,(9x + 1)}}{2x} = \frac{1 \pm \sqrt{36x^2 + 4x + 1}}{x}$$

Dado que $36x^2 + 4x + 1 > 0$, $\forall x \in R \Rightarrow \text{Dom}(f) = R - \{0\}$

Obsérvese que $x = 0 \notin \text{Dom}(f)$, por tanto, es absurdo decir que el punto B(0 , -1), llamado *punto ciego*, sea Y - intersección, aunque en el paso (1b) se diga lo contrario.

b) Rango de la ecuación. $x = g(y)$

$$x = \frac{y + 1}{y^2 - 9} \Rightarrow x \in R \Leftrightarrow y \neq \pm 3$$
$$\Rightarrow \text{Ran}(f) = R - \{-3\,,3\}$$

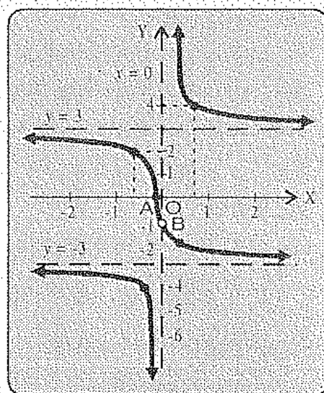


FIGURA 2.13

4. ***Asíntotas.***

a) Asíntotas horizontales

$(y^2 - 9)x - (y + 1) = 0 \Rightarrow y^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow y = -3$ o $y = 3$

b) Asíntotas verticales

$xy^2 - y - (9x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ es una A. V.

5. ***Tabla de valores.***

$$x = \frac{y + 1}{(y + 3)\,(y - 3)}$$

x	-2	-4	2	4
y	1/7	-3/7	-3/5	5/7

Con la ayuda de estos puntos y la información previa se dibuja la gráfica mostrada en la Figura 2.13, en la que se observa la elección de unidades de magnitud diferente sobre el eje X con respecto a las del eje Y. ■

16 Construir la gráfica de la ecuación $x^2y - xy - 2y - 1 = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : x^2y - xy - 2y - 1 = 0$

1. ***Intersecciones.***
   a) Con el eje X. Si $y = 0 \Rightarrow f(x, 0) : -1 = 0 \Rightarrow \nexists$ X - intersección
   b) Con el eje Y. Si $x = 0 \Rightarrow f(0, y) : -2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1/2$
   $\Rightarrow$ Y - intersección = A(0 , -1/2)
2. ***Simetría.*** La curva no es simétrica a los ejes X e Y, y al origen, pues :
   $f(x, -y) \neq f(x, y)$, $f(-x, y) \neq f(x, y)$ y $f(-x, -y) \neq f(x, y)$
3. ***Extensión.***
   a) Dominio de la ecuación. $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$
   $\Rightarrow y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \neq -1 , x \neq 2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1 , 2\}$
   b) Rango de la ecuación. $x = g(y) \Rightarrow yx^2 - yx - (2y + 1) = 0$
   $\Rightarrow x = \dfrac{y \pm \sqrt{9y^2 + 4x}}{2y} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (9y^2 + 4y \geq 0) \wedge (y \neq 0)$
   $\Leftrightarrow y > 0 \vee y \leq -4/9$
   $\Rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty , -4/9] \cup \langle 0 , +\infty \rangle$
4. ***Asíntotas.***
   a) Asíntotas horizontales.
   $yx^2 - yx - (2y + 1) = 0 \Rightarrow y = 0$ es una A. H.
   b) Asíntotas verticales.
   $(x^2 - x - 2)y - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$
   $\Rightarrow x = -1$ ó $x = 2$ son dos A. V.
5. ***Tabla de valores.***

$y = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

x	-3	-2	1	3
y	1/10	1/4	-1/2	1/4

Con estos puntos y la discusión ya determinada, se dibuja la gráfica mostrada en la Figura 2.14 ■

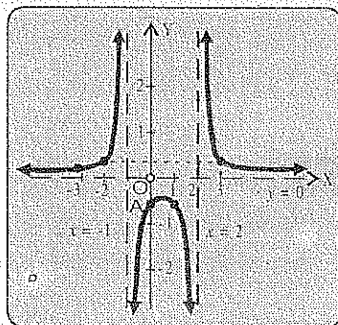


FIGURA 2.14

17 Construir la gráfica de la ecuación $xy^2 + xy - 2x - 2 = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : xy^2 + xy - 2x - 2 = 0$

1. ***Intersecciones.***
   a) Con el eje X. Si $y = 0 \Rightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow$ X - intersección = A(-1 , 0)

b) Con el eje Y . Si $x = 0 \Rightarrow -2 = 0 \Rightarrow \nexists$ Y - intersección

2. *Simetría.* La curva no es simétrica con los ejes X e Y , ni con el origen pues ,

$$f(x , -y) \neq f(x , y) , f(-x , y) \neq f(x , y) \text{ y } f(-x , -y) \neq f(x , y)$$

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación. $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{-x \pm \sqrt{9x^2 + 8x}}{2x}$

$\Rightarrow y \in R \Leftrightarrow (9x^2 + 8x \geq 0) \wedge (x \neq 0)$

$\Leftrightarrow x \leq -8/9 \vee x > 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty , -8/9] \cup \langle 0 , +\infty \rangle$

b) Rango de la ecuación. $x = g(y) \Rightarrow x = \dfrac{2}{(y + 2)(y - 1)}$

$\Rightarrow x \in R \Leftrightarrow y \neq -2 \text{ , } y \neq 1 \Rightarrow \text{Ran}(f) = R - \{-2 ; 1\}$

4. *Asíntotas.*

a) Asíntotas horizontales. $(y^2 + y - 2)x - 2 = 0$

Si $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ ó $y = 1$ son las asíntotas horizontales

b) Asíntotas verticales. $xy^2 + xy - 2x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ es una asíntota vertical (Eje Y)

5. *Tabla de valores.*

$$x = \frac{2}{(y + 2)(y - 1)}$$

x	-1	1/2	1/2	8/7	8/7
y	-1	-3	2	3/2	-5/2

6. La gráfica de la curva se muestra en la Figura 2.15 

18 Discutir y construir la gráfica de la ecuación $x^2 - xy + 5y = 0$

Solución. Sea $f(x , y) : x^2 - xy + 5y = 0$

1. *Intersecciones.* Como la ecuación carece de término independiente, la curva pasa por el origen.

2. *Simetría.* La curva no es simétrica respecto de los ejes coordenados, ni con el origen, pues : $f(x , -y) \neq f(x , y)$, $f(-x , y) \neq f(x , y)$ y $f(-x , -y) \neq f(x , y)$

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación. $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{x - 5}$

$y \in R \Leftrightarrow x \neq 5 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty , 5 \rangle \cup \langle 5 , +\infty \rangle$

b) Rango de la ecuación . $x = g(y) \Rightarrow x = \frac{1}{2} (y \pm \sqrt{y^2 - 20y})$

$x \in R \Leftrightarrow y^2 - 20y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$ ó $y \geq 20 \Rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty , 0] \cup [20 , +\infty \rangle$

4. *Asíntotas.*

a) Asíntotas horizontales . No tiene

b) Asíntotas verticales. $(5 - x)y + x^2 = 0 \Rightarrow 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

c) Asíntotas oblicuas. $y = mx + b$, $m \neq 0$ (1)

Sustituyendo en la ecuación dada y ordenando términos se tiene :

$(1 - m)x^2 + (5m - b)x + 5b = 0 \Rightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$, $5m - b = 0 \Rightarrow b = 5$

Luego, en (1), obtenemos las asíntota oblicua $\mathscr{L} : y = x + 5$

5. *Tabla de valores.*

$y = \dfrac{x^2}{x - 5}$

x	4	6	8	-2	-5
y	-16	36	64/3	-4/7	-5/2

Con estos puntos y la discusión previa, se dibuja la gráfica de la curva mostrada en la Figura 2.16, donde se puede observar la elección de unidades de magnitud diferente sobre el eje Y con respecto a los del eje X. ■

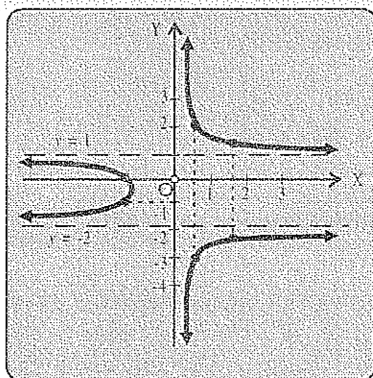


FIGURA 2.15

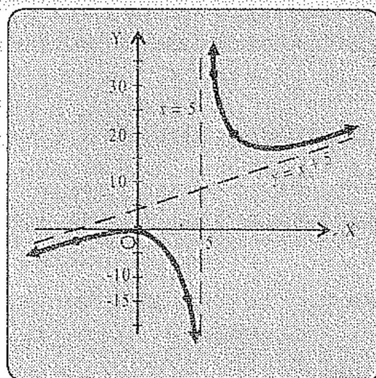


FIGURA 2.16

19 Construir la curva de la ecuación : $x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0$

Solución. Sea $f(x , y) : x^2y - x^2 - 4xy + 4y = 0$

1. *Intersecciones.* El único punto de intersección de la curva con los ejes coordenados es el origen. (La curva carece de término constante).

2. *Simetría.* Como $f(x , -y) \neq f(x , y)$, $f(-x , y) \neq f(x , y)$ y $f(-x , -y) \neq f(x , y)$, la curva no es simétrica respecto de los ejes X e Y, ni con el origen.

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación. $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{(x - 2)^2} \Rightarrow y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Rango de la ecuación. $x = g(y)$: $(y - 1)x^2 - 4yx + 4y = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - (y-1)(4y)}}{y - 1} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y}}{y-1} \Rightarrow \text{Ran}(f) = [0, +\infty\rangle - \{1\}$$

4. ***Asíntotas.***

a) Asíntotas horizontales
De (3b) : $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ es una A. H.

b) Asíntotas verticales
De (3a) : $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ es una A. V.

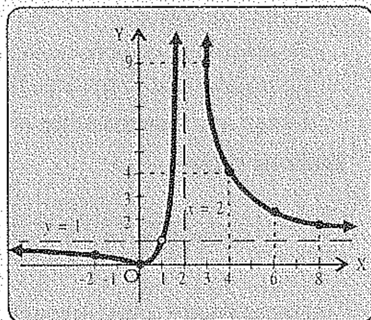


FIGURA 2.17

5. ***Tabla de valores.***

$y = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2$

x	-2	3	4	6	8
y	1/4	9	4	9/4	16/9

Nótese que para $x = 1$ se obtiene $y = 1$, pero $y = 1 \notin \text{Ran}(f)$; por tanto , (1 , 1) es un *punto ciego.*

6. La gráfica de la ecuación se muestra en la Figura 2.17 

20 Construir la gráfica de la ecuación : $xy^2 + 2xy - y^2 + x = 0$

Solución. Sea $f(x, y) : x^2y^2 + 2xy - y^2 + x = 0$

1. ***Intersecciones.*** Como la ecuación dada carece de término independiente, la curva pasa por el origen.

2. ***Simetría.*** La curva no es simétrica respecto de los ejes coordenados, ni con el origen.

3. ***Extensión.***

a) Dominio de la ecuación. $y = f(x)$: $(x - 1)y^2 + 2xy + x = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - (x-1)x}}{x - 1} = \frac{-x \pm \sqrt{x}}{x-1} \Rightarrow \text{Dom}(f) = [0, +\infty\rangle - \{1\}$$

b) Rango de la ecuación. $x = g(y)$: $x(y^2 + 2y + 1) = y^2$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{y}{y+1}\right)^2 \Rightarrow \text{Ran}(f) = \text{R} - \{-1\}$$

4. ***Asíntotas.***

a) Asíntotas horizontales.
De (3b) : $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$ es una A. H.

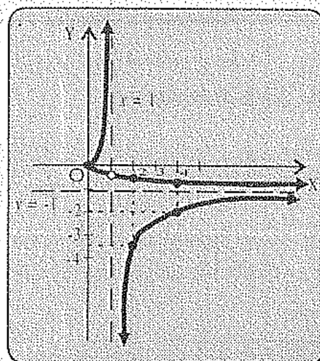
b) Asíntotas verticales.
De (3a) : $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ es una A. V.

5. ***Tabla de Valores.***

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x}}{x-1}$$

x	2	2	4	4
y	-0.58	-3.42	-2	-2/3

6. Con la ayuda de estos puntos y la información previa se dibuja la gráfica de la ecuación mostrada en la Figura 2.18 donde se puede observar el *punto ciego* (1 , -1/2)


FIGURA 2.18

Nota. La discusión y construcción de las gráficas correspondientes a los ejercicios.

21. $x^2y - x^2 + xy + 3x = 2$ y **22.** $xy^2 - y^2 - xy + y = 0$ (Ecuación factorizable), se dejan como tarea para el lector. ■

23 Construir la gráfica de la ecuación : $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$

Solución. Sea $f(x , y) : x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$

1. ***Intersecciones.***

a) Con el eje X. Si $y = 0 \Rightarrow f(x , 0) : -4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) Con el eje Y. Si $x = 0 \Rightarrow f(0 , y) : -4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$$\therefore\ (0 , 0) \in \text{Graf}(f)$$

2. ***Simetría.*** Como todos los términos de la ecuación dada son de grado par, la curva es simétrica respecto a los ejes X e Y, y al origen.

3. ***Extensión.***

a) Dominio de la ecuación. $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{\pm 2x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

$\Rightarrow y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow < -2$ ó $x > 2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \langle -\infty , -2\rangle \cup \langle 2 , +\infty\rangle$

b) Rango de la ecuación. $x = g(x)$

$$\Rightarrow x = \frac{\pm 2y}{\sqrt{y^2 - 4}}$$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y^2 - 4 > 0$

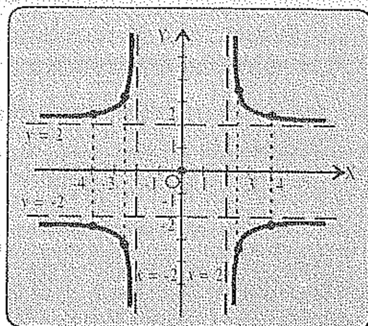
$\Rightarrow \text{Ran}(f) = \langle -\infty , -2\rangle \cup \langle 2 , +\infty\rangle$

4. ***Asíntotas.***

a) Asíntotas horizontales: $(y^2 - 4)x^2 - 4y^2 = 0$

Si $y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ ó $y = 2$

son dos A. H.


FIGURA 2.19

b) Asíntotas Verticales : $(x^2-4)y^2-4x^2=0$

Si $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ó $x=2$ son dos A. V.

5. *Tabla de valores.*

$$y=\frac{\pm 2x}{\sqrt{x^2-4}}$$

x	5/2	4	-5/2	-4
y	± 3.3	± 2.3	± 3.3	± 2.3

6. Con la ayuda de estos puntos y la información previa se dibuja la gráfica de la ecuación mostrada en la Figura 2.19 ▪

24 Construir la gráfica de la ecuación : $x^3-xy^2+2y^2=0$

Solución. Sea $f(x,y): x^3-xy^2+2y^2=0$

1. *Intersecciones.*

a) Con el eje X. Si $y=0 \Rightarrow f(x,0): x^3=0 \Rightarrow x=0$

b) Con el eje Y. Si $x=0 \Rightarrow f(0,y): 2y^2=0 \Rightarrow y=0$

Por tanto, la curva pasa por el origen de coordenadas.

2. *Simetría.* Como la variable y es de grado par, la curva es simétrica sólo respecto del eje X.

3. *Extensión.*

a) Dominio de la ecuación. $y=f(x) \Rightarrow y=\pm x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$

$$y\in \mathrm{R} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2}\geq 0 \Rightarrow x=0 \text{ ó } x>2 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=\langle -\infty, 0] \cup \langle 2, +\infty\rangle$$

4. *Asíntotas.*

a) Asíntotas horizontales. No existe.

b) Asíntotas verticales. $(2-x)y^2+x^3=0$

$\Rightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ es una A. V.

c) Asíntotas oblicuas. Sea $y=\mathrm{m}x+\mathrm{k}$ (1)

Sustituyendo en la ecuación dada y ordenando términos obtenemos :

$(1-\mathrm{m}^2)x^3+2(\mathrm{m}^2-\mathrm{mk})x^2-(\mathrm{k}^2-4\mathrm{mk})x+2\mathrm{k}^2=0$

Según la regla :

$1-\mathrm{m}^2=0 \Leftrightarrow \mathrm{m}_1=1$ ó $\mathrm{m}_2=-1$

$\mathrm{m}^2-\mathrm{mk}=0 \Leftrightarrow \mathrm{k}_1=1$ ó $\mathrm{k}_2=-1$

Luego, en (1), las asíntotas oblicuas de las curva son; $\mathscr{L}_1: y=x+1$ y $\mathscr{L}_2: y=-x-1$

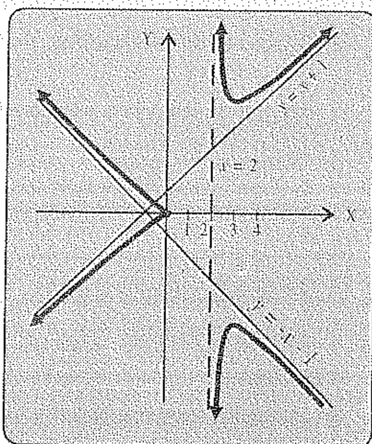


FIGURA 2.20

5. *Tabla de valores.*

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

x	-1	-2	3	4
y	±0.57	±1.41	±5.2	±5.6

Con estos puntos y la información determinada se dibuja la gráfica de la curva mostrada en la Figura 2.20 ■

2.1.5 ECUACIONES FACTORIZABLES

Son aquellas ecuaciones que pueden escribirse en forma del producto de dos o más factores variables igualadas a cero. Esto es , si $F(x , y) = u . v . w$, y si $F(x , y) = 0$, entonces

$$u = f(x , y) = 0$$
$$v = g(x , y) = 0$$
$$z = h(x , y) = 0$$

La gráfica de $F(x , y) = 0$ constará de la unión de las gráficas de las ecuaciones obtenidas al igualar a cero cada uno de las factores.

EJERCICIOS . Grupo 7

1 Trazar la gráfica de la ecuación : $x^2 - 4y^2 = 0$

Solución. Sea $F(x , y) = x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y)$

$$\text{Si } F(x , y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

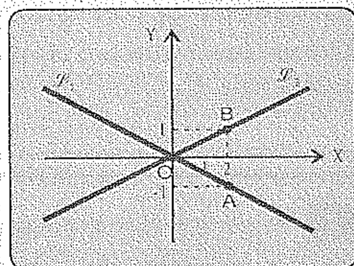


FIGURA 2.21

Como se puede observar, la gráfica de F consta de las gráficas de las rectas $\mathscr{L}_1 : x + 2y = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x - 2y = 0$, que pasan por el origen. Para dibujar necesitamos conocer otro punto de ellas.

En $\mathscr{L}_1$, si $x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(2 , -1) \in \mathscr{L}_1$

En $\mathscr{L}_2$, si $x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(2 , 1) \in \mathscr{L}_2$

Uniendo estos puntos con el origen obtenemos las gráficas de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ mostradas en la Figura 2.21

$$\therefore \text{ Graf(F)} = \text{Graf}(\mathscr{L}_1) \cup \text{Graf}(\mathscr{L}_2)$$ ■

2 Trazar la gráfica de la ecuación : $9x^2 - 2y^2 = 0$

Solución. Sea $F(x , y) = 9x^2 - 2y^2 = (3x + \sqrt{2}y)(3x - \sqrt{2}y)$

$$\text{Si } F(x , y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x + \sqrt{2}y = 0 \\ 3x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$$

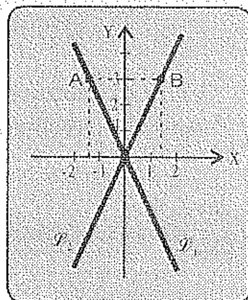


FIGURA 2.22

La gráfica de F consta de las gráficas de dos rectas que pasan por el origen. Por lo que si :

En $\mathscr{L}_1 : 3x + \sqrt{2}y = 0 , x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow A(-\sqrt{2} , 3) \in \mathscr{L}_1$

En $\mathscr{L}_2 : 3x - \sqrt{2}y = 0 , x = \sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3 \Rightarrow B(\sqrt{2} , 3) \in \mathscr{L}_2$

Uniendo estos puntos con el origen tendremos las gráficas de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ mostradas en la Figura 2.22

$$\therefore \text{Graf}(F) = \text{Graf}(\mathscr{L}_1) \cup \text{Graf}(\mathscr{L}_2)$$ ■

3 Dibujar la gráfica de la ecuación : $x^3 - x^2y - 2xy^2 = 0$

Solución. Sea $F(x , y) = x^3 - x^2y - 2xy^2 = x(x + y)(x - 2y)$

$$\text{Si } F(x , y) = \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (Eje Y)} \\ x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

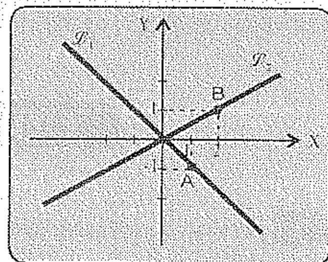


FIGURA 2.23

La gráfica de F consta de las gráficas del Eje Y ($x = 0$) y de las rectas que pasan por el origen $\mathscr{L}_1 : x + y = 0$, $\mathscr{L}_2 : x - 2y = 0$

En $\mathscr{L}_1$, si $x = 1 \Leftrightarrow y = -1 \Rightarrow A(1 , -1) \in \mathscr{L}_1$

En $\mathscr{L}_2$, si $x = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow B(2 , 1) \in \mathscr{L}_2$

Uniendo estos puntos con el origen obtendremos las gráficas de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ mostradas en la Figura 2.23

$$\therefore \text{Graf}(F) = \text{Graf(Eje Y)} \cup \text{Graf}(\mathscr{L}_1) \cup \text{Graf}(\mathscr{L}_2)$$ ■

4 Trazar la gráfica de la ecuación : $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

Solución. Sea $F(x , y) = (x + y)^2 - 1 = (x + y + 1)(x + y - 1)$

$$\text{Si } F(x , y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathscr{L}_1 : x + y + 1 = 0 \\ \mathscr{L}_2 : x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Se trata de dos rectas paralelas. Para graficarlas bastará interceptarlas con los ejes coordenados.

En $\mathscr{L}_1$: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A(0,-1) \in \mathscr{L}_1 \\ y=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow B(-1,0) \in \mathscr{L}_1 \end{cases}$

En $\mathscr{L}_2$: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow C(0,1) \in \mathscr{L}_2 \\ y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D(1,0) \in \mathscr{L}_2 \end{cases}$

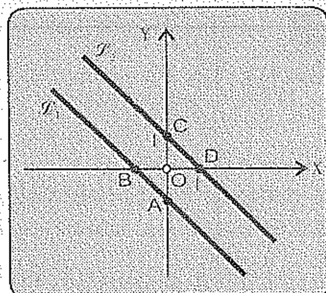


FIGURA 2.24

Uniendo las intersecciones correspondientes obtendremos las gráficas de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ mostradas en la Figura 2.24

$\therefore$ Graf(F) = Graf($\mathscr{L}_1$) ∪ Graf($\mathscr{L}_2$) ■

5 Factorizar y trazar la gráfica de la ecuación : $6x^2 + xy - 2y^2 + 7x + 7y = 3$

Solución. Sea $F(x, y) = 6x^2 + xy - 2y^2 + 7x + 7y - 3 = (3x + 2y - 1)(2x - y + 3)$

$$\begin{matrix} 3x & & 2y & & -1 \\ 2x & & -y & & 3 \end{matrix}$$

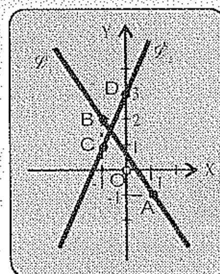


FIGURA 2.25

Si $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathscr{L}_1 : 3x + 2y - 1 = 0 \\ \mathscr{L}_2 : 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

Para dibujar $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ construimos las siguientes tablas :

$\mathscr{L}_1$: $y = \frac{1-3x}{2}$

	A	B
x	1	-1
y	-1	2

, $\mathscr{L}_2$: $y = 2x + 3$

	C	D
x	-1	0
y	1	3

Uniendo los puntos A y B, luego C y D obtendremos las gráficas de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ respectivamente.

$\therefore$ Graf(F) = Graf($\mathscr{L}_1$) ∪ Graf($\mathscr{L}_2$) ■

6 Dibujar la gráfica de la ecuación : $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 4x - 4y = 0$

Solución. Sea $F(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - 4x - 4y = 0$

$$\Rightarrow F(x, y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy(x+y) - 4(x+y) = 0$$
$$= (x+y)(x^2 + y^2 - 4)$$

Si $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathscr{L} : x + y = 0 \\ \mathscr{C} : x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

La gráfica de $\mathscr{L}$ es la recta de pendiente m = -1 , bisectriz del II y IV cuadrantes, y la gráfica de $\mathscr{C}$ es la de una circunferencia de radio 2 unidades, mostradas en la Figura 2.26

$\therefore$ Graf(F) = Graf($\mathscr{L}$) ∪ Graf($\mathscr{C}$) ■

7 Construir la gráfica de la ecuación : $x^3 - x^2y - xy + y^2 = 0$

Solución. Sea $F(x, y) = x^3 - x^2y - xy + y^2 = x^2(x - y) - y(x - y) = (x - y)(x^2 - y)$

$$\text{Si } F(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \mathscr{L}: x - y = 0 \\ \mathscr{P}: x^2 - y = 0 \end{cases}$$

La gráfica de $\mathscr{L}$ es la recta bisectriz del I y III cuadrantes, y la de $\mathscr{P}$ es la parábola con vértice en el origen, simétrica respecto del eje Y; mostradas en la Figura 2.27.

$$\therefore \text{ Graf(F)} = \text{Graf}(\mathscr{L}) \cup \text{Graf}(\mathscr{P})$$ ■

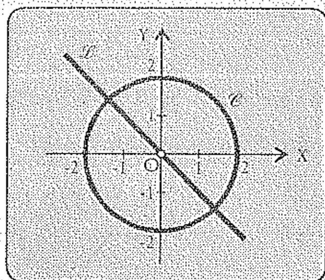


FIGURA 2.26

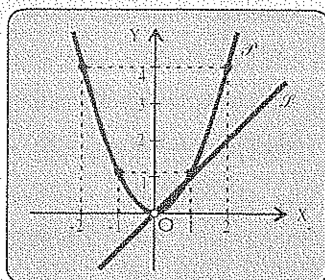


FIGURA 2.27

8 Trazar la gráfica de la ecuación : $x^2y^2 - 4x^3 + 4xy^2 - y^4 = 0$

Solución. Sea $F(x, y) = x^2y^2 - 4x^3 + 4xy^2 - y^4 = x^2(y^2 - 4x) - y^2(y^2 - 4x)$

$$= (x + y)(x - y)(y^2 - 4x)$$

$$\text{Si } F(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \mathscr{L}_1 : x + y = 0 \\ \mathscr{L}_2 : x - y = 0 \\ \mathscr{P} : y^2 = 4x \end{cases}$$

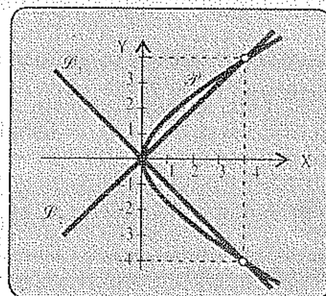


FIGURA 2.28

Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son las bisectrices de los cuadrantes del plano coordenado y la gráfica de $\mathscr{P}$ es el de una parábola con vértice en el origen y simétrica respecto del Eje X; todas mostradas en la Fig. 2.28.

$$\therefore \text{ Graf(F)} = \text{Graf}(\mathscr{L}_1) \cup \text{Graf}(\mathscr{L}_2) \cup \text{Graf}(\mathscr{P})$$ ■

9 Trazar la gráfica de la ecuación : $x^2y + x^2 - xy^2 + xy + 2x = 0$

Solución. Sea $F(x, y) = x^2y + x^2 - xy^2 + xy + 2x = x(xy + x - y^2 + y + 2)$

$$= x[x(y + 1) - (y + 1)(y - 2)] = x(y + 1)(x - y + 2)$$

$$\text{Si } F(x\,,y)=0 \iff \begin{cases} x=0 \text{ (Eje Y)} \\ \mathscr{L}_1 : y+1=0 \\ \mathscr{L}_2 : x-y+2=0 \end{cases}$$

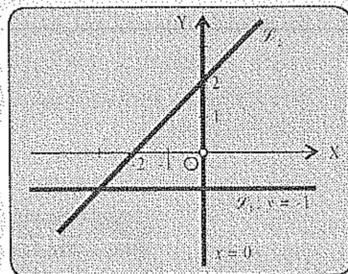


FIGURA 2.29

La recta $x = 0$ es el eje Y, la gráfica de $\mathscr{L}_1 : y + 1 = 0$ es la de una recta horizontal, una unidad debajo del eje X, y la gráfica de $\mathscr{L}_2 : x - y + 2 = 0$ es la de una recta que intercepta a los ejes X e Y en los puntos (-2 , 0) y (0 , 2), respectivamente.

$$\therefore \text{ Graf(F)} = \text{Graf(Eje Y)} \cup \text{Graf}(\mathscr{L}_1) \cup \text{Graf}(\mathscr{L}_2)$$ ■

10 Construir la gráfica de la ecuación : $x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 4 = 0$

Solución. Sea $F(x\,,y) = x^3 + x^2 + 2xy^2 + 2y^2 - 4x - 4$

$$= x^2(x+1) + 2y^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2+2y^2-4)$$

$$\text{Si } F(x\,,y)=0 \iff \begin{cases} \mathscr{L} : x+1=0 \\ \mathscr{E} : x^2+2y^2=4 \end{cases}$$

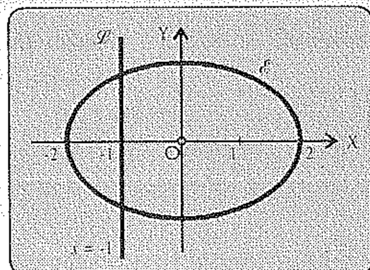


FIGURA 2.30

La gráfica de $\mathscr{L}$ es una recta vertical, una unidad a la izquierda del eje Y, y la de $\mathscr{E}$ es una curva cerrada, llamada *elipse*, simétrica con respecto a los ejes X e Y, y al origen.

$$\therefore \text{ Graf(F)} = \text{Graf}(\mathscr{L}) \cup \text{Graf}(\mathscr{E})$$ ■

2.2 SEGUNDO PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA ANALITICA

ECUACION DE UN LUGAR GEOMETRICO

Se denomina ecuación de un lugar geométrico a una ecuación de la forma

$$f(x\,,y) = 0 \qquad (\alpha)$$

cuyas soluciones reales para valores correspondientes de x e y son todas las coordenadas de aquellos puntos que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico. El procedimiento para obtener la ecuación de un lugar geométrico es como sigue :

1. Se supone que el punto P, de coordenadas (x , y) es un punto cualquiera que satisface la condición o condiciones dadas, y , por lo tanto, un punto del lugar geométrico.

2. Se expresa analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables x e y.

3. Se simplifica, si es necesario, la ecuación obtenida en el paso (2) de tal manera que tome la forma (α).

EJERCICIOS . *Grupo 8*

En cada uno de los ejercicios siguientes se recomienda al lector que, después de obtener la ecuación del lugar geométrico, construya la curva de acuerdo con lo dicho en la Sección 2.1.

3 Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje Y disminuida en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje X. Hallar la ecuación del lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto de L. G. , que satisface la condición geométrica

$$\overline{BP} - 3 = 2\,\overline{AP}$$

2. Expresión analítica : $(x - 0) - 3 = 2\,(y - 0)$
3. De donde obtenemos la ecuación

$$\mathscr{L} : x - 2y - 3 = 0$$

La ecuación del L. G. es una recta cuya gráfica se muestra en la Figura 2.31 ■

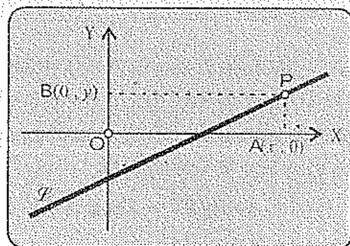


FIGURA 2.31

4 Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a 2. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto de L. G. que satisface la condición geométrica

$$|\overline{OP}| = 2$$

2. Expresión analítica : $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$
3. Elevando al cuadrado la ecuación se reduce a

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 4$$

El lugar geométrico es una circunferencia. ■

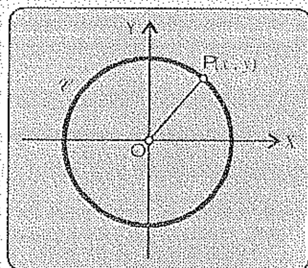


FIGURA 2.32

5 Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto A(2 , 3) es siempre igual a 5. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y dar su interpretación geométrica.

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto del L. G. que satisface la condición geométrica

$$|\overline{AP}| = 5$$

2. Cuya forma analítica es : $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 5$
3. Elevando al cuadrado ambos miembros, la ecuación se reduce a $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

   El lugar geométrico es una circunferencia de centro A(2 , 3) y radio 5 unidades. ■

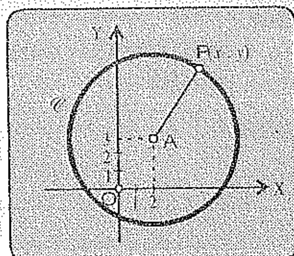


FIGURA 2.33

6 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los puntos A(1 , -2) y B(5 , 4). Identificar el L. G. y construirlo gráficamente.

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto del L. G. que satisface la condición geométrica

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$$

2. Cuya expresión analítica es :

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros la ecuación se reduce a $\mathscr{L}: 2x + 3y - 9 = 0$

   El L. G. , mostrado en la Figura 2.34, es la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$. ■

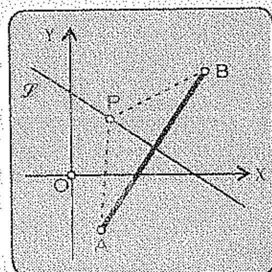


FIGURA 2.34

7 Una recta contiene a los puntos A(-1 , 5) y B(1 , 3). Expresar analíticamente, el hecho de que un punto cualquiera $P(x , y)$ está sobre la recta. Deducir la ecuación de la recta.

Solución. 1. Si $P(x , y)$, A(-1 , 5) y B(1 , 3) son puntos colineales, deben satisfacer la condición geométrica :

$$m_{AP} = m_{BP} = m_{AB}$$

2. Por definición de pendiente, esta condición se expresa analíticamente por

$$\frac{y-5}{x+1} = \frac{y-3}{x-1} = \frac{3-5}{1+1}$$

3. Por tanto, si $\frac{y-3}{x-1} = -1 \Leftrightarrow \mathscr{L}: x + y - 4 = 0$, es la ecuación de la recta. ■

8 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto A(4 , 1) es siempre igual a su distancia del eje Y.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que satisface la condición geométrica : $|\overline{AP}|^2 = d(P, \text{eje } Y)$

2. La expresión analítica es : $(\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2})^2 = x$, $x > 0$

3. Ejecutando operaciones, la ecuación se reduce a

$$x^2 + y^2 - 9x - 2y + 17 = 0 \;,\; x > 0$$ ■

9 Una recta $\mathscr{L}$, que pasa por el punto A(-5 , 1) es perpendicular a otra recta de pendiente 1/2. Expresar analíticamente, el hecho de que un punto cualquiera P(x , y) está sobre la recta $\mathscr{L}$, y deducir, de aquí, su ecuación.

Solución. 1. Si P(x , y) ∈ $\mathscr{L}$, debe satisfacer la condición geométrica

$m \cdot m_{AP} = -1$ (condición de perpendicularidad)

2. Cuya expresión analítica es : $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y-1}{x+5}\right) = -1 \Rightarrow \frac{y-1}{x+5} = -2$

3. De donde obtenemos la ecuación de la recta $\mathscr{L}: 2x + y + 9 = 0$. ■

10 Una circunferencia de radio r = 3 tiene su centro en el punto C(-3 , -2). A partir de la definición, hallar la ecuación de esta circunferencia.

Solución. 1. Sea P(x , y) el punto genérico de la circunferencia, que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{CP}| = r$ (Def. de circunferencia)

2. Que está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = 3$$

3. De donde obtenemos la ecuación de la circunferencia

$$\mathscr{C}: x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$$ ■

11 Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje X es siempre igual a su distancia del punto A(0 , 4). Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto de L. G. Sea B el pie de la perpendicular bajada del

punto P al eje X. Luego, P debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{BP}| = |\overline{AP}|$

2. Por definición de ordenada y el teorema de la distancia, la condición geométrica está expresada, analíticamente, por la ecuación

$$|y| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros, la ecuación se reduce a $\mathscr{P}: x^2 - 8y + 16 = 0$, una parábola, trazada en la Figura 2.35. ■

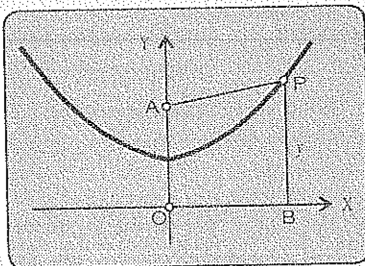


FIGURA 2.35

12 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a las dos puntos A(3 , 5) y B(-4 , 2) es siempre igual a 30.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|AP|^2 + |BP|^2 = 30$

2. Por el teorema de la distancia, esta condición geométrica está expresada, analíticamente, por la ecuación :

$$(\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2})^2 + (\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2})^2 = 30$$

3. Efectuando operaciones obtenemos la ecuación del lugar geométrico.

$$x^2 + y^2 + x - 7y + 12 = 0$$ ■

13 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(2 , -2) y B(4 , 1) es siempre igual a 12 (Dos casos).

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica ; $|\overline{AP}|^2 - |\overline{BP}|^2 = 12$ (Primer caso)

$|\overline{BP}|^2 - |\overline{AP}|^2 = 12$ (Segundo caso)

2. Forma analítica : $(\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2})^2 - (\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2})^2 = 12$

$$(\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2})^2 - (\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2})^2 = 12$$

3. De donde obtenemos : $4x + 6y - 21 = 0$ ó $4x + 6y + 3 = 0$ ■

14 Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto A(2 , 4) es siempre igual a su distancia del eje Y aumentada en 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica : $|\overline{AP}| = |d(P, \text{eje Y}) + 3|$

2. Por el teorema de la distancia y la definición de abscisa esta condición geométrica está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = |x+3|$$

3. De donde, elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos la ecuación del lugar geométrico : $y^2 - 10x - 8y + 11 = 0$ ■

15 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos A(3 , 0) y B(-3 , 0) es siempre igual a 8.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}| + |\overline{BP}| = 8$

2. Por el teorema de la distancia esta condición geométrica está expresada analíticamente por la ecuación :

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 8 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 8 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros se tiene :

$$4\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 3x + 16$$

Elevando nuevamente al cuadrado obtenemos la ecuación del L. G.

$$7x^2 + 16y^2 = 112$$ ■

16 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos A(0 , 3) y B(0 , -3) es siempre igual a 8. Compárese el resultado con el obtenido en el ejercicio 15.

Solución: 1. Sea P(x , y) un punto del lugar que debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| = 8$$

2. Por el teorema de la distancia esta condición está expresada analíticamente por la ecuación

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 8 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 8 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros se tiene

$$4\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 3y + 16$$

Elevando nuevamente al cuadrado y simplificando obtenemos la ecuación del lugar geométrico

$$16x^2 + 7y^2 = 112$$ ■

17 Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos A(3 , 0) y B(-3 , 0) es siempre igual a 4. Hallar la ecuación del lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del geométrico que debe cumplir la condición geométrica : $|\overline{AP}| - |\overline{BP}| = 4$

2. Por el teorema de la distancia, la forma analítica de esta condición es :

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} - \sqrt{(x+3)^2+y^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 4 + \sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros se tiene :

$$2\sqrt{x^2+6x+9+y^2} = 4+3x$$

Elevando nuevamente al cuadrado obtenemos la ecuación del L. G.

$$5x^2 - 4y^2 = 20$$

■

18 Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos A(0 , 3) y B(0 , -3) es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{AP}| - |\overline{BP}| = 4$$

2. Por el teorema de la distancia, la forma analítica de esta condición es

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2} - \sqrt{x^2+(y+3)^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 4 + \sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

3. Elevando al cuadrado ambos extremos se tiene :

$$2\sqrt{x^2+(y+3)^2} = 3y+4$$

Elevando nuevamente al cuadrado y simplificando obtenemos la ecuación del lugar geométrico :

$$5y^2 - 4x^2 = 20$$

■

19 Un círculo de radio 4 tiene su centro en el punto C(1 , -1). Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de todos sus radios.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico y sea Q un punto de la circunferencia de centro C(1 , -1), entonces $|\overline{QC}| = 4$; por tanto, la condición geométrica que debe cumplir el punto P es

$$|\overline{CP}| = 2$$

2. Expresión analítica : $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 2$

3. De donde, elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos la ecuación del lugar geométrico : $x^2+y^2-2x+2y-2=0$

■

20 Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto A(3 , 1) es siempre igual a la mitad de su distancia al eje Y. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica : $|\overline{AP}| = \frac{1}{2}\, d(P\,,\text{eje Y})|$

2. Por el teorema de la distancia y la definición de abscisa, la expresión analítica de esta condición geométrica es :

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} = \frac{1}{2}\,|x|$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos la ecuación del lugar geométrico : $3x^2+4y^2-24x-8y+40=0$ ■

21 Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto A(-1 , 2) es siempre el doble de su distancia al eje X. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica : $|\overline{AP}| = 2\, d(P\,,\text{eje X})$

2. Por el teorema de la distancia y la definición de ordenada, la expresión analítica de esta condición geométrica es

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = 2\,|y|$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos la ecuación del L. G.

$$x^2-3y^2+2x-4y+5=0$$ ■

22 Un segmento rectilíneo de longitud 4 se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje X y el otro permanece siempre sobre el eje Y. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del L. G. y sean A(0 , y_1) y B(x_1 , 0) los extremos del segmento rectilíneo. Dado que $|\overline{AB}| = 4$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}} = 4 \qquad (1)$$

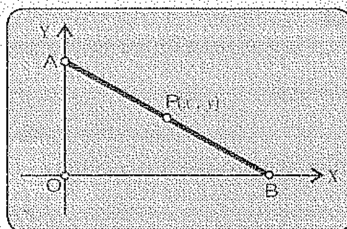


FIGURA 2.36

2. Condición geométrica del punto P

$$|\overline{AP}| = |\overline{PB}|$$

Forma analítica : $x_1 = 2x$ e $y_1 = 2y$

que sustituidas en (1) se tiene : $\sqrt{(2x)^2+(2y)^2} = 4$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos la ecuación del lugar geométrico : $$x^2 + y^2 = 4$$ ■

23 Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos A(-1 , 3) y B(5 , 1). Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la pendiente del lado $\overline{AC}$ es siempre el doble de la del lado $\overline{BC}$.

Solución. 1. Si C(*x* , *y*) es el punto genérico de la curva, debe cumplir la condición geométrica

$$m_{\overline{AC}} = 2\, m_{\overline{BC}}$$

2. Forma analítica : $\frac{y-3}{x+1} = 2\left(\frac{y-1}{x-5}\right)$

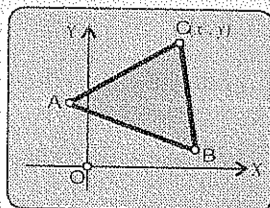


FIGURA 2.37

3. Efectuando operaciones obtenemos la ecuación del lugar geométrico

$$xy + x + 7y - 17 = 0$$ ■

24 Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos A(1 , 0) y B(5 , 0). Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la diferencia entre las magnitudes de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ es siempre igual a la mitad de la longitud del lado $\overline{AB}$.

Solución. 1. Si C(*x* , *y*) es el punto del lugar geométrico, debe satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{AC}| - |\overline{BC}| = \frac{1}{2}\,|\overline{AB}|$$

2. Forma analítica :

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\,|5-1|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} = 2 + \sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$$

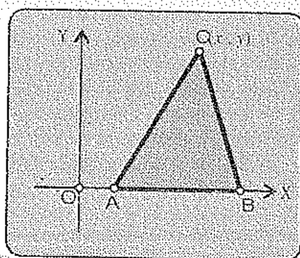


FIGURA 2.38

3. Elevando al cuadrado ambos miembros se tiene :

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} = 2x - 7$$

Nuevamente, elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos la ecuación del lugar geométrico : $3x^2 - y^2 - 18x + 24 = 0$ ■

25 Los extremos de la base de un triángulo son los puntos A(0 , 0) y B(3 , 0). Hallar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto C si se mueve de tal mane-

ra que el ángulo de la base CAB es siempre igual al doble del ángulo de la base CBA.

Solución. 1. Si C(x , y) es el punto genérico de la curva debe satisfacer la condición geométrica :

$$\beta = 2\alpha$$

Tomando tangentes se tiene : $\text{Tg}\,\beta = \dfrac{2\,\text{Tg}\alpha}{1 - \text{Tg}^2\alpha}$ (1)

$\text{Tg}\beta = m_{AC} = \dfrac{y}{x}$, $\text{Tg}\theta = m_{BC} = \dfrac{y}{x-3} \Rightarrow \text{Tg}\alpha = -\dfrac{y}{x-3}$

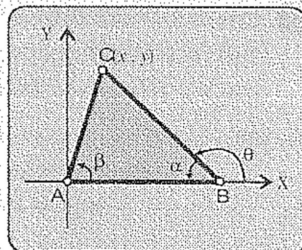


FIGURA 2.39

2. Sustituyendo en (1) cada uno de estos valores, obtendremos la forma analítica : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2\left(-\dfrac{y}{x-3}\right)}{1-\left(-\dfrac{y}{x-3}\right)^2}$

3. De donde se tiene la ecuación del lugar geométrico :

$$3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0$$

■

Capítulo 3

LA LINEA RECTA

3.1 FORMAS DE LA ECUACION DE UNA RECTA

1. *Forma Punto - Pendiente.* La recta que pasa por un punto dado P1(x1 , y1) y cuya pendiente dada es m, tiene por ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2. *Forma Pendiente-ordenada en el origen.*
La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b, tiene por ecuación

$$y = mx + b$$

3. *Recta que pasa por dos puntos.*
La recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ tiene por ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)\ ,\ x_1 \neq x_2$$

Esta ecuación puede escribirse también en la forma de determinantes

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. *Forma simétrica.* La recta cuyas intercepciones con los ejes X e Y son a y b respectivamente, tiene por ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

EJERCICIOS . *Grupo 9*

1 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1 , 5) y tiene pendiente igual a 2.

Solución. Según la forma (1), la ecuación de la recta es

$$y - 5 = 2(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 2x - y + 3 = 0$$ ■

2 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-6 , -3) y tiene un ángulo de inclinación de 45°

Solución. La pendiente de la recta es m = Tg 45° = 1, luego, por la forma (1), su ecuación es : $y + 3 = 1(x + 6) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x - y + 3 = 0$ ■

3 Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intersección con el eje Y es -2

Solución. Como datos tenemos : m = -3 y $b = -2$, luego por la forma (2), la ecuación de la recta es : $y = -3x - 2 \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x + y + 2 = 0$ ■

4 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(4 , 2) y B(-5 , 7).

Solución. Por la forma (3), la ecuación de la recta es

$$y - 2 = \frac{2-7}{4+5}(x - 4) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 5x + 9y - 38 = 0$$ ■

5 Los vértices de un cuadrilátero son A(0 , 0) , B(2 , 4) , C(6 , 7) y D(8 , 0). Halle las ecuaciones de sus lados.

Solución. Usaremos la forma (3) para hallar la ecuación de cada lado del cuadrilátero.

$\overline{AB}$: $y - 0 = \frac{4-0}{2-0}(x - 0) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB} : 2x - y = 0$

$\overline{BC}$: $y - 7 = \frac{7-4}{6-2}(x - 6) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BC} : 3x - 4y + 10 = 0$

$\overline{CD}$: $y - 0 = \frac{0-7}{8-6}(x - 8) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{CD} : 7x + 2y - 56 = 0$

$\overline{AD}$: $y = 0$ (Ecuación del eje X) ■.

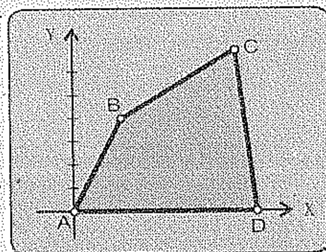


FIGURA 3.1

14 Hallar la ecuación de sus lados.

Solución. Según la forma (3), la ecuación que cada lado es

$$\overline{AB}: \ y - 1 = \frac{7-1}{4+2}(x+2) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB}: x - y + 3 = 0$$

$$\overline{BC}: \ y - 7 = \frac{-3-7}{6-4}(x-4) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BC}: 5x + y - 27 = 0$$

$$\overline{AC}: \ y - 1 = \frac{-3-1}{6+2}(x+2) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AC}: x + 2y = 0$$

15 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto $\overline{BC}$.

Solución. Datos : A(-2 , 1) , B(4 , 7) , C(6 , -3)

$$\text{Pendiente del lado } \overline{BC}: \ m_{BC} = \frac{7+3}{4-6} = -5$$

Luego, la ecuación de la recta $\mathscr{L} \,||\, \overline{BC}$, y que pasa por A es

$$y - 1 = -5(x+2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 5x + y + 9 = 0$$

■

16 Hallar las ecuaciones de la rectas que pasan por el vértice B y trisecan la lado opuesto $\overline{AC}$.

Solución. Datos : A(-2 , 1) , B(4 , 7) , C(6 , -3)

Sean P y Q los puntos de trisección de $\overline{AC}$

$$\text{Si } \frac{AP}{PC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x+2}{6-x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2/3 \\ \dfrac{y-1}{-3-y} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = -1/3 \end{array} \right\} \Rightarrow P(2/3 \, , -1/3)$$

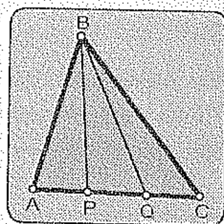


FIGURA 3.3

Q es el punto medio de $\overline{PC} \Rightarrow Q(10/3 \, , -5/3)$

Luego, según la forma (3), las ecuaciones de $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ son

$$\overline{BP}: \ y - 7 = \frac{-1/3 - 7}{2/3 - 4}(x-4) \Leftrightarrow \overrightarrow{BP}: 11x - 5y - 9 = 0 \ (x-4)$$

$$\overline{BQ}: \ y - 7 = \frac{7 + 5/3}{4 - 10/3}(x-4) \Leftrightarrow \overrightarrow{BQ}: 13x - y - 45 = 0$$

■

17 Hallar los vértices del triángulo formado por las rectas que pasan por los vérti-

ces A , B , y C y son paralelas a los lados opuestos.

Solución. Datos : A(-2 , 1) , B(4 , 7) , C(6 , -3)

Recta que pasa por A y es paralela a $\overline{BC}$:

$$y - 1 = -5(x + 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 5x + y + 9 = 0$$

Recta que pasa por B y es paralela a $\overline{AC}$:

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : x + 2y - 18 = 0$$

Recta que pasa por C y es paralela a $\overline{AB}$:

$$y + 3 = 1(x - 6) \Leftrightarrow \mathscr{L}_3 : x - y - 9 = 0$$

Luego : $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = (-4 , 11)$; $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 = (0 , -9)$; $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = (12 , 3)$ ■

18 Hallar las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.

Solución. Datos del triángulo : A(-2 , 1) , B(4 , 7) y C(6 , -3)

Las coordenadas de los puntos medios de cada lado son : M(1 , 4) , N(2 , -1) y P(5 , 2)

Por la forma (3), las ecuaciones de las medianas son :

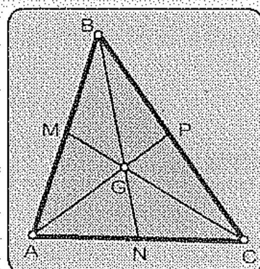


FIGURA 3.4

Mediana $\overline{AP}$: $y - 1 = \dfrac{2 - 1}{5 + 2}(x + 2) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AP} : x - 7y + 9 = 0$

Mediana $\overline{BN}$: $y - 7 = \dfrac{7 + 1}{4 - 2}(x - 4) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BN} : 4x - y - 9 = 0$

Mediana $\overline{CM}$: $y + 3 = \dfrac{4 + 3}{1 - 6}(x - 6) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{CM} : 7x + 5y - 27 = 0$

Coordenadas del baricentro : $(x - 7y + 9 = 0) \cap (4x - y - 9 = 0) = G(8/3 , 5/3)$

Como comprobación podemos hallar las coordenadas del baricentro aplicando la fórmula del Ejercicio 20 , Grupo 2.

$$G\left(\frac{-2 + 4 + 6}{3} , \frac{1 + 7 - 3}{3}\right) \Leftrightarrow G(8/3 , 5/3)$$ ■

19 Hallar las ecuaciones de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de intersección. Este punto se llama *circuncentro*.

Solución. Las coordenadas de los puntos medios de cada lado del triángulo son :

$$M(1 , 4) , N(2 , -1) \text{ y } P(5 , 2)$$

y las respectivas pendientes son :

$$m_{AB} = \frac{7 - 1}{4 + 2} = 1 , \; m_{AC} = \frac{-3 - 1}{6 + 2} = -\frac{1}{2} , \; m_{BC} = \frac{-3 - 7}{6 - 4} = -5$$

Ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AB}$:

$$y - 4 = -1(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + y - 5 = 0$$

Ecuación de la mediatriz del lado $\overline{AC}$:

$$y + 1 = 2(x - 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : 2x - y - 5 = 0$$

Ecuación de la mediatriz del lado $\overline{BC}$:

$$y - 2 = \frac{1}{5}(x - 5) \Leftrightarrow \mathscr{L}_3 : x - 5y + 5 = 0$$

$\therefore\ \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = (x + y - 5 = 0) \cap (2x - y - 5 = 0) = I(10/3, 5/3)$ ■

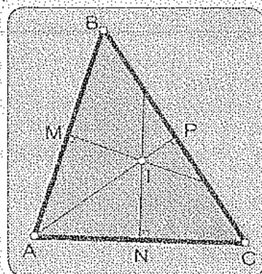


FIGURA 3.5

20 Hallar las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección. Este punto se llama *ortocentro*.

Solución. Datos del triángulo : A(-2 , 1) , B(4 , 7) y C(6 , -3)

Las pendientes de cada lado son :

$m_{AB} = 1$, $m_{AC} = -1/2$, $m_{BC} = -5$

y las pendientes de las alturas correspondientes a cada lado son : $m_{CF} = -1$, $m_{BE} = 2$, $m_{AD} = 1/5$

y sus ecuaciones, según la forma (1), son :

Altura $\overline{CF}$: $y + 3 = -1(x - 6) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{CF} : x + y - 3 = 0$

Altura $\overline{BE}$: $y - 7 = 2(x - 4) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BE} : 2x - y - 1 = 0$

Altura $\overline{AD}$: $y - 1 = \frac{1}{5}(x + 2) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AD} : x - 5y + 7 = 0$

$$\therefore\ (x + y - 3 = 0) \cap (2x - y - 1 = 0) = H(4/3, 5/3)$$ ■

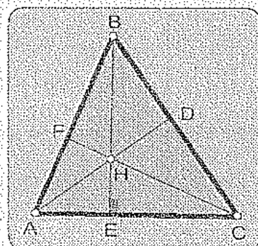


FIGURA 3.6

21 Hallar las coordenadas del pie de la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$. A partir de estas coordenadas hállese la longitud de la altura y luego el área del triángulo.

Solución. Datos del triángulo: A(-2 , 1) , B(4 , 7) y C(6 , -3)

Ecuación de $\overline{AC}$: $x + 2y = 0$ (Ejercicio 14)

Ecuación de $\overline{BE}$: $2x - y - 1 = 0$ (Ejercicio 20)

Luego : $(x + 2y = 0) \cap (2x - y - 1 = 0) = E(2/5, -1/5)$

$h = |\overline{BE}| = \sqrt{(4 - 2/5)^2 + (7 + 1/5)^2} = 18\sqrt{5}/5$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(6 + 2)^2 + (-3 - 1)^2} = 4\sqrt{5}$

$\therefore\ a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\,|\overline{AC}|\,h = \frac{1}{2}\,(4\sqrt{5})\left(\frac{18\sqrt{5}}{5}\right) = 36\ u^2$ ■

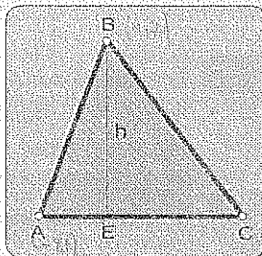


FIGURA 3.7

22 Hallar la ecuación de la recta de pendiente -4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : 2x + y = 8$ y $\mathscr{L}_2 : 3x - 2y + 9 = 0$

Solución. $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = (2x + y = 8) \cap (3x - 2y + 9 = 0) = P(1, 6)$

Por la forma (1) : $y - 6 = -4(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 4x + y - 10 = 0$ ■

23 Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son : $3x - 8y + 36 = 0$, $x + y - 10 = 0$, $3x - 8y - 19 = 0$, $x + y + 1 = 0$. Demostrar que la figura es un paralelogramo y hallar las coordenadas de sus vértices.

Solución. Pasemos cada una de las ecuaciones a la forma $y = mx + b$

$$\mathscr{L}_1 : 3x - 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : y = \frac{3}{8}x + \frac{9}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{3}{8}$$

$$\mathscr{L}_2 : x + y - 10 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : y = -x + 10 \Rightarrow m_2 = -1$$

$$\mathscr{L}_3 : 3x - 8y - 19 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_3 : y = \frac{3}{8}x - \frac{19}{8} \Rightarrow m_3 = \frac{3}{8}$$

$$\mathscr{L}_4 : x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_4 : y = -x - 1 \Rightarrow m_4 = -1$$

Se observa que $m_1 = m_3$ y $m_2 = m_4 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \| \mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_2 \| \mathscr{L}_4$

Por lo que, el cuadrilátero cuyos lados están contenidos en las rectas dadas es un paralelogramo. $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = A(4, 6)$, $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = B(9, 1)$

$\mathscr{L}_3 \cap \mathscr{L}_4 = C(1, -2)$, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_4 = D(-4, 3)$ ■

24 Hallar el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $5x + 4y + 20 = 0$

Solución. Interceptando la recta dada con los ejes coordenados se tiene :

Si $y = 0 \Rightarrow 5x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = a = -4$; si $x = 0 \Rightarrow 4y + 20 = 0 \Leftrightarrow y = b = -5$

Area del triángulo : $S = \frac{1}{2}|a\,b| = \frac{1}{2}|(-4)(-5)| = 10\ u^2$. ■

25 Las coordenadas de un punto P son (2 , 6) , y la ecuación de una recta $\mathscr{L}$ es $4x + 3y = 12$. Hallar la distancia del punto P a la recta $\mathscr{L}$ siguiendo el orden de los siguientes pasos : a) Hallar la pendiente de $\mathscr{L}$. b) Hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}_1$ que pasa por P y es perpendicular a $\mathscr{L}$. c) Hallar las coordenadas del punto P_1, punto de intersección de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_1$. d) Hallar la longitud del segmento $\overline{PP_1}$.

Solución. a) $\mathscr{L}: 4x + 3y = 12 \Leftrightarrow \mathscr{L}: y = -\frac{4}{3}x + 4 \Rightarrow m = -4/3$

b) Si $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1 \Rightarrow m_1 = 3/4$

Ecuación de $\mathscr{L}_1 : y - 6 = \quad (x - 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 3x - 4y + 18 = 0$

c) $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1 = (4x + 3y - 12 = 0) \cap (3x - 4y + 18 = 0) = P_1(-6/25\ ,\ 108/25)$

$$\therefore |\overline{PP_1}| = d(P\ ,\ \mathscr{L}) = \sqrt{\left(2 + \frac{6}{25}\right)^2 + \left(6 - \frac{108}{25}\right)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{(56)^2 + (42)^2}$$

$$\therefore\ d(P\ ,\ \mathscr{L}) = 14/5$$

■

El punto P de ordenada 10 está sobre la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto A(7 , -2). Calcular la abscisa de P.

Solución. La ecuación de la recta que pasa por A(7 , -2) , es :

$$y + 2 = 3(x - 7) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x - y - 23 = 0$$

$$P(x\ ,\ 10) \in \mathscr{L} \Rightarrow 3x - 10 - 23 = 0 \Leftrightarrow x = 11$$

■

27 Determinar el valor de los coeficientes A y B de la ecuación de una recta $\mathscr{L}$: $Ax - By + 4 = 0$, se debe pasar por los puntos C(-3 , 1) y D(1 , 6)

Solución. Si $C(-3\ ,\ 1) \in \mathscr{L} \Rightarrow -3A - B + 4 = 0$ (1)

$D(1\ ,\ 6) \in \mathscr{L} \Rightarrow A - 6B + 4 = 0$ (2)

Resolviendo (1) y (2) por simultáneas obtenemos : A = 20/19 , B = 16/19 ■

28 Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $\mathscr{L}_1: 5x - 7y + 27 = 0$, $\mathscr{L}_2: 9x - 2y - 15 = 0$, $\mathscr{L}_3: 4x + 5y + 11 = 0$. Hallar sus ángulos y comprobar los resultados.

Solución. Pasemos cada una de las ecuaciones dadas a la forma $y = mx + b$

$$\mathscr{L}_1 : y = \frac{5}{7}x + \frac{27}{7} \Rightarrow m_1 = 5/7$$

$$\mathscr{L}_2 : y = \frac{9}{2}x - \frac{15}{2} \Rightarrow m_2 = 9/2$$

$$\mathscr{L}_3 : y = -\frac{4}{5}x - \frac{11}{5} \Rightarrow m_1 = -4/5$$

Ahora, para cada vértice, aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas.

$$TgA = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{9/2 - 5/7}{1 + 45/47} = \frac{53}{59} = 0.898$$

$$\Rightarrow A = arc\,Tg(0.898) = 41°55'$$

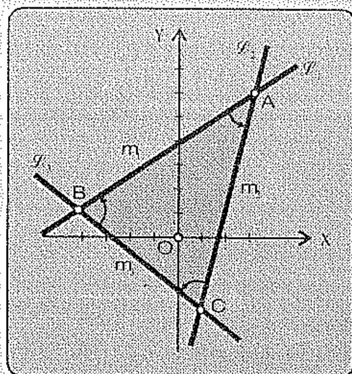


FIGURA 3.8

$$TgB = \frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 \cdot m_3} = \frac{5/7 + 4/5}{1 - 20/35} = \frac{53}{15} = 3.533 \Rightarrow B = 74°12'$$

$$TgC = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 \cdot m_3} = \frac{-4/5 - 9/2}{1 - 36/10} = \frac{53}{26} = 2.038 \Rightarrow C = 63°53'$$

Comprobación : $A + B + C = 41°55' + 74°12' + 63°53' = 180°$ ■

3.2 FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA RECTA

TEOREMA 3.5. La ecuación $\mathscr{L} : Ax + By + C = 0$ siempre representa una recta, a condición de que ambos A y B no sean cero.

Demostración. En la demostración del teorema se consideran los siguientes casos :

a) Si $B = 0$, la ecuación se convierte en $x = -\frac{C}{A}$ o $x = h$, y es satisfecha por puntos sobre la recta que está a h unidades del eje Y, es decir, la recta $\mathscr{L}$ es paralela al eje Y.

b) Si $B \neq 0$, podemos resolver la ecuación despejando y, obteniendo

$$\mathscr{L} : y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Expresión que es de la forma $y = mx + b$, por lo tanto, es la ecuación de una recta cuya pendiente es $m = -\frac{A}{B}$ y cuya ordenada en el origen es $b = -\frac{C}{B}$

3.3 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

TEOREMA 3.6. Dada las ecuaciones de dos rectas $\mathscr{L}_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, las relaciones siguientes son condiciones necesarias y suficientes para :

a) Paralelismo : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, o sea, $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

b) Perpendicularidad : $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

c) Coincidencia : $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, $C_1 = kC_2$, $k \neq 0$

d) Intersección en uno y solamente un punto : $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

EJERCICIOS . *Grupo 10*

2 Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que pasa por el punto P(-2 , 4) y tiene una pendiente igual a -3.

Solución. Sea la recta buscada. $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$

Si $P(-2, 4) \in \mathscr{L} \Rightarrow -2A + 4B + C = 0$ (1)

Pendiente de la recta $\mathscr{L}$: $m = -\frac{A}{B} = -3 \Rightarrow A = 3B$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) se tiene : $-6B + 4B + C = 0 \Rightarrow C = 2B$ (3)

Reemplazando (2) y (3) en $\mathscr{L}$ obtenemos : $3Bx + By + 2B = 0$

$\Rightarrow B(3x + y + 2) = 0$, como $B \neq 0 \Rightarrow \mathscr{L}: 3x + y + 2 = 0$ ■

3 Hallar la ecuación de una recta, determinando los coeficientes de la forma general, si los segmentos que determina sobre los ejes X e Y, es decir, sus intercepciones, son 3 y -5, respectivamente.

Solución. Sea la recta $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$

Si $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A} = 3 \Rightarrow C = -3A$ (1)

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B} = -5 \Rightarrow C = 5B$ (2)

De (1) y (2) se deduce que : $-3A = 5B \Rightarrow B = -\frac{3}{5}A$ (3)

Sustituyendo (1) y (3) en $\mathscr{L}$ obtenemos : $Ax - \frac{3}{5}Ay - 3A = 0$

$\Rightarrow A(5x - 3y - 15) = 0$, como $A \neq 0 \Rightarrow \mathscr{L}: 5x - 3y - 15 = 0$ ■

4 Hallar la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general, que es perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1: 3x - 4y + 11 = 0$ y pasa por el punto P(-1 , -3).

Solución. Sea la recta $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$

Si $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1 \Rightarrow m \cdot m_1 = -1 \Rightarrow \left(-\frac{A}{B}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow A = \frac{4}{3}B$ (1)

Si $P(-1, -3) \in \mathscr{L} \Rightarrow A(-1) + B(-3) + C = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}B - 3B + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{13}{3}B$ (2)

Sustituyendo (1) y (2) en $\mathscr{L}$ se tiene : $\frac{4}{3}Bx + By + \frac{13}{3}B = 0$

de donde : $B(4x + 3y + 13) = 0$; como $B \neq 0 \Rightarrow \mathscr{L}: 4x + 3y + 13 = 0$ ■

5 Halle el valor de k para que la recta $kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$

Solución. Si $\mathscr{L}_1 : kx + (k - 1)y - 18 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 4x + 3y + 7 = 0$ son rectas paralelas,

entonces, $m_1 = m_2 \Leftrightarrow -\frac{k}{k-1} = -\frac{4}{3}$, de donde obtenemos $k = 4$. ■

6 Determinar el valor de k para que la recta $k^2x + (k + 1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$

Solución. Si $\mathscr{L}_1 : k^2x + (k + 1)y + 3 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 3x - 2y - 11 = 0$ son rectas perpendiculares

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \left(-\frac{k^2}{k+1}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -1 \Rightarrow 3k^2 - 2k - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos $k = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ ■

7 Hallar la pendiente e intersecciones de la recta $\mathscr{L}: 7x - 9y + 2 = 0$

Solución. Si $m = -\frac{A}{B} \Rightarrow m = \frac{7}{9}$ es la pendiente de $\mathscr{L}$

Intersecciones : a) Con el eje X : $y = 0 \Rightarrow 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2/7$

b) Con el eje Y : $x = 0 \Rightarrow -9y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2/9$ ■

8 Hallar la pendiente, ángulo de inclinación y las intercepciones de la recta que pasa por el punto (2 , 3) y es perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1 : 2x - 7y + 2 = 0$

La solución se deja como tarea para el lector. Rpta. : -7/2 , 105° 57' , 20/7 , 10

9 Determinar el valor de k para que la recta $\mathscr{L}: 4x + 5y + k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de área igual a 5/2 u^2.

Solución. La forma simétrica de la recta dada es , $\mathscr{L} : \frac{x}{-k/4} + \frac{y}{-k/5} = 1$

Entonces , $a = -k/4$ y $b = -k/5$, y como el Area del triángulo $= \frac{1}{2}|a\,b|$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{k}{4}\right)\left(-\frac{k}{5}\right)\right| \Rightarrow k^2 = 100 \Leftrightarrow k = \pm 10$$ ■

10 En las rectas $\mathscr{L}_1 : ax + (2 - b)y - 23 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : (a - 1)x + by + 15 = 0$, hallar los valores de a y b para que representen rectas que pasan por el punto A(2 , -3)

Solución. Si $A(2 , -3) \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow 2a + (2 - b)(-3) - 23 = 0 \Rightarrow 2a + 3b - 29 = 0$ (1)

$A(2 , -3) \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow 2(a - 1) + b(-3) + 15 = 0 \Rightarrow 2a - 3b + 13 = 0$ (2)

Resolviendo (1) y (2), por simultáneas, obtenemos : $a = 4$ y $b = 7$ ■

11 Demostrar que la recta que pasa por los puntos A(4 , -1) y B(7 , 2), biseca al segmento cuyos extremos son los puntos C(8 - 3) y D(-4 , -3).

Demostración. Por la forma (3), la ecuación de la recta que pasa por A y B es :

$$y + 1 = \left(\frac{2+1}{7-4}\right)(x - 4) \Leftrightarrow \mathscr{L} : x - y - 5 = 0$$

Punto medio del segmento $\overline{CD}$: $M = \left(\frac{8-4}{2} , \frac{-3-3}{2}\right) = (2 , -3)$

Bastará probar que $M \in \mathscr{L}$, en efecto : $2 - (-3) - 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Por tanto , la recta $\mathscr{L}$ biseca al segmento $\overline{CD}$. ■

12 Demostrar que las recta $\mathscr{L}_1 : 2x - y - 1 = 0$, $\mathscr{L}_2 : x - 8y + 37 = 0$, $\mathscr{L}_3 : 2x - y - 16 = 0$ y $\mathscr{L}_4 : x - 8y + 7 = 0$ forman un paralelogramo y hallar las ecuaciones de sus diagonales.

Demostración. En efecto, por simple inspección,

$$m_1 = m_3 = 2 \text{ y } m_2 = m_4 = 1/8$$

Entonces ; $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_2 \parallel \mathscr{L}_4$, por tanto, el cuadrilátero formado por las intersecciones de las rectas dadas es un paralelogramo.

$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = A(3 , 5)$, $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = B(11 , 6)$

$\mathscr{L}_3 \cap \mathscr{L}_4 = C(9 , 2)$, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_4 = D(1 , 1)$

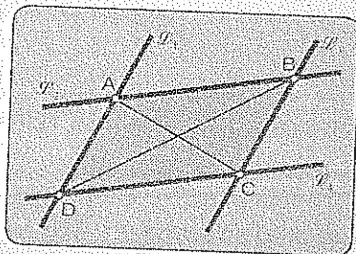


FIGURA 3.9

Ecuación de la diagonal $\overline{AC}$: $y - 5 = \frac{2-5}{9-3}(x - 3)$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} : x + 2y - 13 = 0$$

Ecuación de la diagonal $\overline{DB}$: $y - 1 = \frac{6-1}{11-1}(x - 1) \Leftrightarrow \overline{DB} : x - 2y + 1 = 0$ ■

13 Demostrar que las rectas $\mathscr{L}_1 : 5x - y - 6 = 0$, $\mathscr{L}_2 : x + 5y - 22 = 0$, $\mathscr{L}_3 : 5x - y = 32$ y $\mathscr{L}_4 : x + 5y + 4 = 0$, forman un cuadrado.

Demostración. En efecto, $m_1 = m_3 = 5$ y

$$m_2 = m_4 = -1/5$$

Luego : $m_1 \cdot m_2 = (5)(-1/5) = -1 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$

$$m_3 \cdot m_4 = (5)(-1/5) = -1 \Rightarrow \mathscr{L}_3 \perp \mathscr{L}_4$$

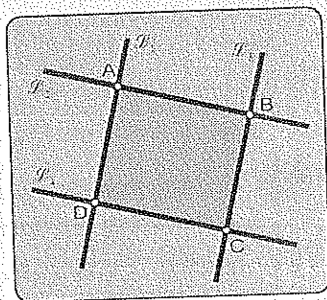


FIGURA 3.10

Debemos probar ahora que las longitudes de los lados del cuadrilátero son iguales, esto es :

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = A(2, 4) \ , \ \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = B(7, 3)$$
$$\mathscr{L}_3 \cap \mathscr{L}_4 = C(6, -2) \ , \ \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_4 = D(1, -1)$$

Por el teorema de la distancia :

$|\overline{AB}| = \sqrt{(7-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{26}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{(7-6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{26}$

$|\overline{CD}| = \sqrt{(1-6)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{26}$, $|\overline{DA}| = \sqrt{(2-1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{26}$

Por tanto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado. ■

14 Demostrar que los ángulos suplementarios formados por las dos rectas $\mathscr{L}_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, están dadas por las fórmulas

$$Tg\theta = \pm \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

Demostración. En efecto, las pendientes de las rectas dadas son: $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ y $m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$

Si $Tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow Tg\theta = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1A_2}{B_1B_2}}$

de donde obtenemos : $Tg\theta = -\frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$ (1)

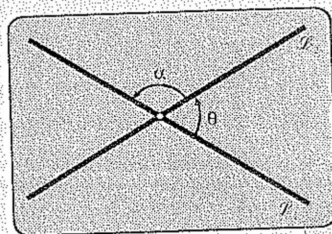


FIGURA 3.11

Pero, $\alpha = \pi - \theta \Rightarrow Tg\alpha = Tg(\pi - \theta) = -Tg\theta$ (2)

En consecuencia, por (1) y (2), los ángulos suplementarios α y θ están dadas por

$$Tg\theta = \pm \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}$$ ■

15 Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $4x - 9y + 11 = 0$ y $3x + 2y - 7 = 0$

Solución. Previamente grafiquemos ambos rectas orientando positivamente el ángulo θ. La Figura 3.12 muestra claramente que $\mathscr{L}_1: 3x + 2y - 7 = 0$ y $\mathscr{L}_2: 4x - 9y + 11 = 0 \Rightarrow m_1 = -3/2$ y $m_2 = 4/9$

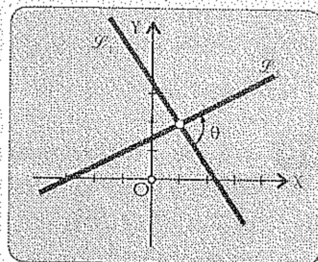


FIGURA 3.12

Luego, si $\text{Tg}\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \text{Tg}\theta = \dfrac{4/9 + 3/2}{1 - 12/18} = \dfrac{35}{6}$

$$\therefore\ \text{Tg}\theta = 5.883 \Leftrightarrow \theta = 80°\,16'$$ ■

16 Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(2, -1)$ y que forman cada una un ángulo de 45° con la recta $2x - 3y + 7 = 0$

Solución. Sea m la pendiente de una de las rectas buscadas y supongamos que $\mathscr{L}_1: 2x - 3y + 7 = 0 \Rightarrow m_1 = 2/3$. Las fórmulas del Ejercicio 14 pueden ser resumidas por la fórmula

$$\text{Tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \quad \text{o} \quad \text{Tg}\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

donde las barras de valor absoluto elimina la duda de saber cual es la pendiente inicial o cual es la pendiente final.

Luego, si $\text{Tg}45° = \left|\dfrac{m - 2/3}{1 + (2/3)m}\right| \Rightarrow |3 + 2m| = |3m - 2|$

$$\Leftrightarrow 3 + 2m = 3m - 2 \text{ ó } 3 + 2m = -3m + 2$$
$$\Leftrightarrow m = 5 \text{ ó } m = -1/5$$

Por tanto, las ecuaciones de las rectas buscadas son :

$$y + 1 = 5(x - 2) \text{ ó } y + 1 = -\tfrac{1}{5}(x - 2) \Leftrightarrow 5x - y - 11 = 0 \text{ ó } x + 5y + 3 = 0$$ ■

17 A partir del resultado del Ejercicio 14, deducir las condiciones necesarias y suficientes para el paralelismo y perpendicularidad de dos rectas, dadas en los apartados (a) y (b) del Teorema 3.6, Sección 3.3.

Solución. Geométricamente podemos decir que dos rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelas, cuando su ángulo de intersección θ es cero. Luego, si

$\text{Tg}\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = 0 \Leftrightarrow m_2 - m_1 = 0$, esto es : $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

También, si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Rightarrow \mathrm{Tg}\theta = \infty \Rightarrow \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \infty$

esto es : $1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow \left(-\dfrac{A_1}{B_1}\right)\left(-\dfrac{A_2}{B_2}\right) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ ■

18 Si k es una constante cualquiera diferente de cero, demuéstrese que todo punto que está sobre la recta $Ax + By + C = 0$ también estará sobre la recta $kAx + kBy + kC = 0$. Por tanto, deduzcase la condición necesaria y suficiente para la coincidencia de dos rectas, dado en el apartado (c) del Teorema 3.6, Sección 3.3.

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

19 Por medio de determinantes obténgase la condición necesaria y suficiente para que las dos rectas $\mathscr{L}_1 : A_1x + B_1y + C_1$ y $\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2x + C_2 = 0$ se corten en uno y solamente un punto.

Solución. Geométricamente, sabemos que dos rectas se cortan en uno y solamente un punto en el caso de que no sean paralelas, esto es, si :

$m_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$ y $m_2 = -\dfrac{A_2}{B_2} \Rightarrow m_1 \neq m_2$, implica que : $-\dfrac{A_1}{B_1} \neq \dfrac{A_2}{B_2}$

$\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, que escrito en forma de determinantes se tiene.

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$ ■

20 Si tres rectas se cortan en un punto común se dice que son *concurrentes*. Si las tres rectas $\mathscr{L}_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ y $\mathscr{L}_3 : A_3x + B_3y + C_3 = 0$ son concurrentes, demuéstrese que sus coeficientes satisfacen la condición :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración. Si $P_1(x_1 , y_1)$ es el punto común, debe satisfacer a las tres rectas, esto es :

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0 \qquad (1)$$
$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0 \qquad (2)$$
$$A_3x_1 + B_3y_1 + C_3 = 0 \qquad (3)$$

La solución de las ecuaciones (2) y (3), por el método de determinantes es

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -C_2 & B_2 \\ -C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \;,\quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_2 & -C_2 \\ A_3 & -C_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \;,\ \text{donde } \Delta = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene :

$$A_1 \left(\frac{\begin{vmatrix} -C_2 & B_2 \\ -C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \right) + B_1 \left(\frac{\begin{vmatrix} A_2 & -C_2 \\ A_3 & -C_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \right) + C_1 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

La expresión (4) es el desarrollo por los elementos de la primera fila del determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

que es la condición para que tres rectas sean concurrentes. ■

21 Demostrar que las rectas $\mathscr{L}_1$: $3x - 5y + 7 = 0$, $\mathscr{L}_2$: $2x + 3y - 8 = 0$ y $\mathscr{L}_3$: $6x - 7y + 8 = 0$, son concurrentes.

Demostración. Por la condición hallada en el Ejercicio 20, el determinante de los coeficientes debe ser cero ($\Delta = 0$). En efecto :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & -8 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(24 - 56) + 5(16 + 48) + 7(-14 - 18)$$
$$= 3(-32) + 5(64) + 7(-32)$$
$$= -96 + 320 - 224 = 0$$

Por lo tanto, las tres rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ son concurrentes. ■

22 Demostrar analíticamente que las medianas de cualquier triángulo son concurrentes.

Demostración. Las coordenadas de los puntos medios de los dados del ΔABC de la Figura 3.13 son :

$M\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $N\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ y $P\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

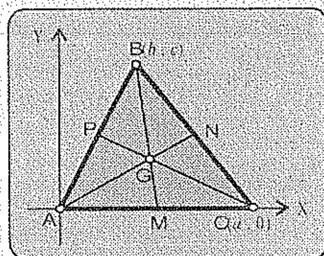


FIGURA 3.13

Ecuación de la mediana $\overline{AN}$: $y = \left(\frac{c/2}{\frac{a+b}{2}}\right)x$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AN} : cx - (a+b)y = 0$

Ecuación de la mediana $\overline{BM}$: $y = \left(\frac{c-0}{b - a/2}\right)(x - a/2)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BM} : 2cx + (a - 2b)y - ac = 0$

Ecuación de la mediana $\overline{CP}$: $y = \left(\frac{c/2}{b/2 - a}\right)(x - a) \Rightarrow \overleftrightarrow{CP} : cx + (2a - b)y - ac = 0$

Si las medianas halladas son concurrentes, el determinante de los coeficientes de sus ecuaciones debe ser cero. En efecto :

$$\Delta = \begin{vmatrix} c & -(a+b) & 0 \\ 2c & (a-2b) & -ac \\ c & (2a-b) & -ac \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a-2b & -ac \\ 2a-b & -ac \end{vmatrix} + (a+b)\begin{vmatrix} 2c & -ac \\ c & -ac \end{vmatrix} + 0$$

$$= c[-ac(a-2b) + ac(2a-b)] + (a+b)(-2ac^2 + ac^2)$$

$$= ac^2(a+b) - ac^2(a+b) = 0$$

Por tanto, las tres medianas del triángulo ABC son concurrentes. ■

23 Demostrar analíticamente que las mediatrices perpendiculares a los lados en su punto medio en cualquier triángulo son concurrentes.

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

24 Demostrar analíticamente que las alturas de cualquier triángulo son concurrentes.

Demostración. Sea el ΔABC cuyas coordenadas de sus vértices se indican en la Fig. 3.14. La altura $\overline{BR}$ es paralelo al eje Y, por lo que se ecuación es , $\overleftrightarrow{BR} : x - a = 0$ (1)

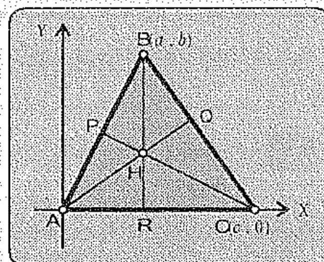


FIGURA 3.14

Pendiente del lado $\overline{AB}$: $m_{AB} = b/a \Rightarrow m_{PC} = -a/b$

Ecuación de la altura $\overline{PC}$:

$y - 0 = (-a/b)(x - c) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{PC} : ax + by - ac = 0$ (2)

Pendiente del lado $\overline{BC}$: $m_{BC} = \frac{b}{a-c} \Rightarrow m_{AQ} = -\frac{a-c}{b}$

Ecuación de la altura $\overline{AQ}$: $y - 0 = -\left(\frac{a-c}{b}\right)(x-0) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AQ} : (a-c)x + by = 0$ (3)

Si las alturas del ΔABC son concurrentes, el determinante de los coeficientes de las ecuaciones (1) , (2) y (3) debe ser cero. En efecto

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ a-c & b & 0 \\ a & b & -ac \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} b & 0 \\ b & -ac \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a-c & b \\ a & b \end{vmatrix} = -abc - a(ab - bc - ab) = 0$$

Por lo que queda demostrado el teorema. ■

25 Los vértices de un triángulo son R(1 , 1) , S(4 , 7) y T(6 , 3). Demostrar que el baricentro (punto de intersección de las medianas), el circuncentro (punto de intersección de las mediatrices) y el ortocentro (punto de intersección de las alturas) son colineales.

Demostración. Sean G , C y H, el baricentro, circuncentro y ortocentro, respectivamente.

Las coordenadas del baricentro son : $G\left(\frac{1+4+6}{3}, \frac{1+7+3}{3}\right) \Leftrightarrow G(11/3, 11/3)$

Como el circuncentro $C(x, y)$ equidista de los vértices del triángulo se tiene :

$|\overline{RC}| = |\overline{TC}| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 10x + 4y - 43 = 0$

$|\overline{RC}| = |\overline{SC}| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : 2x + 4y - 21 = 0$

Si $C(x, y) \in (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2) \Rightarrow (10x + 4y - 43 = 0) \cap (2x + 4y - 21 = 0) = C(11/4, 31/8)$

Ecuaciones de las alturas $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$

$$m_{RT} = \frac{3-1}{6-1} = \frac{2}{5} \quad , \quad m_{TS} = \frac{7-3}{4-6} = -2$$

Altura $\overline{PS}$: $y - 7 = -\frac{5}{2}(x-4) \Rightarrow \overleftrightarrow{PS} : 5x + 2y - 34 = 0$

Altura $\overline{QR}$: $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow \overleftrightarrow{QR} : x - 2y + 1 = 0$

$H \in \overleftrightarrow{PS} \cap \overleftrightarrow{QR}$

$\Rightarrow (5x + 2y - 34 = 0) \cap (x - 2y + 1 = 0) = H(11/2, 13/4)$

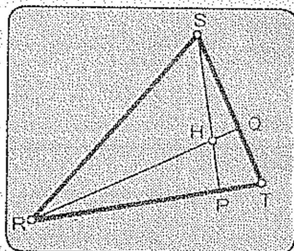


FIGURA 3.15

Probaremos que G(11/3 , 11/3) , C(11/4 , 31/8) y H(11/2 , 13/4) son colineales.

En efecto : $m_{GC} = \frac{(31/8) - (11/3)}{(11/4) - (11/3)} = -\frac{5}{22}$

$$m_{GH} = \frac{(13/4)-(11/3)}{(11/2)-(11/3)} = -\frac{5}{22} \quad ; \quad m_{CH} = \frac{(13/4)-(31/8)}{(11/2)-(11/4)} = -\frac{5}{22}$$

Como las pendientes son iguales, los puntos C , G y H son colineales. ■

26 Demostrar analíticamente que el baricentro, circuncentro y ortocentro de cualquier triángulo son colineales. La recta que los une se llama *recta de Euler*.

Se deja al lector la tarea de demostrar el ejercicio.

27 Desde el punto A(6 , 0) se trazan perpendiculares a los lados $\mathscr{L}_1 : 5x - y - 4 = 0$, $\mathscr{L}_2 : y - 1 = 0$ y $\mathscr{L}_3 : x - y - 4 = 0$ de un triángulo. Demostrar que los pies de estas perpendiculares son colineales.

Demostración. La ecuación de la recta que pasa por A y perpendicular a $\mathscr{L}_1$ es :

$$y - 0 = -\frac{1}{5}(x - 6) \Leftrightarrow x + 5y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (5x - y - 4 = 0) \cap (x + 5y - 6 = 0) = P_1(1 , 1)$$

Ecuación de la recta que pasa por A y perpendicular a $\mathscr{L}_2$ es : $x - 6 = 0 \Rightarrow (y - 1 = 0) \cap (x - 6 = 0) = P_2(6 , 1)$

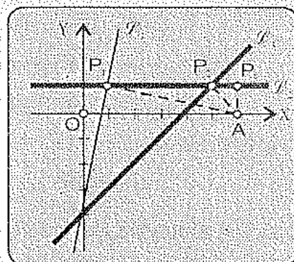


FIGURA 3.16

Ecuación de la recta que pasa por A y perpendicular a $\mathscr{L}_3$ es :

$$y - 0 = -1(x - 6) \Leftrightarrow x + y - 6 = 0 \Rightarrow (x - y - 4 = 0) \cap (x - y - 6 = 0) = P_3(5 , 1)$$

Como los puntos P_1 , P_2 y P_3 tienen la misma ordenada, están sobre una línea horizontal a una unidad del eje X; por tanto, son colineales. ■

28 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(a , b) y por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ y $\mathscr{L}_2 : \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$

Solución. Si $\mathscr{L}_1 : bx + ay = ab$ y $\mathscr{L}_2 : ax + by = ab \Rightarrow \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P\left(\frac{ab}{a+b} , \frac{ab}{a+b}\right)$

$$\text{Pendiente de } \overline{AP} : \quad m = \frac{\frac{ab}{a+b} - b}{\frac{ab}{a+b} - a} = \frac{b^2}{a^2}$$

Ecuación de la recta buscada : $y - b = \frac{b^2}{a^2}(x - a) \Rightarrow \mathscr{L} : b^2x - a^2y = ab(b - a)$ ■

29 Una recta se mueve de tal manera que la suma de los recíprocos de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es siempre igual a una constante $k \neq 0$. Demostrar que la recta pasa siempre por el punto $P\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$

Demostración. Sea la recta $\mathscr{L}: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (1)

$$\text{Según el enunciado: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = k \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{ak-1}{a}$$

Sustituyendo en (1) se tiene : $\frac{x}{a} + \left(\frac{ak-1}{a}\right)y = 1 \Leftrightarrow \mathscr{L}: x + (ak-1)y = a$

Debemos probar que $\mathscr{L}$ pasa por el punto P(1/k , 1/k)

En efecto, si $P \in \mathscr{L} \Rightarrow \frac{1}{k} + (ak-1)\left(\frac{1}{k}\right) = a \Rightarrow \frac{1}{k} + a - \frac{1}{k} = a$

$\Rightarrow a = a$ l. q. q. d. ■

30 Hallar la longitud de la perpendicular bajada del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$. Demostrar, a partir de esto, que la distancia d del punto P_1 a la recta $\mathscr{L}$ esta dada por

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Solución. La ecuación de la recta perpendicular a $\mathscr{L}$, que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ es :

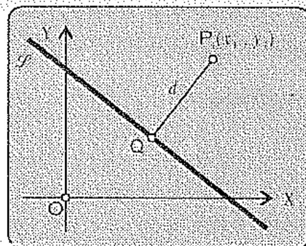


FIGURA 3.17

$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1: Bx - Ay + (Ay_1 - Bx_1) = 0$

$\Rightarrow \mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1 =$

$$Q\left(\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{-ABx_1 + A^2y_1 - AC}{A^2 + B^2}\right)$$

Si $d = d(P_1, \mathscr{L}) = |\overline{QP_1}| \Rightarrow d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Luego, $d^2 = \left[x_1 - \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2}\right]^2 + \left[y_1 - \frac{-ABx_1 + A^2y_1 - AC}{A^2 + B^2}\right]^2$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{A^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{B^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2(A^2 + B^2)}{(A^2 + B^2)^2}$$

$$= \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2} \Leftrightarrow d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ ■

3.4 FORMA NORMAL DE LA ECUACION DE UNA RECTA

TEOREMA 3.7. La forma normal de la ecuación de una recta es

$$x \text{ Cos } \omega + \text{Sen } \omega - p = 0$$

en donde p es un número positivo, numéricamente igual a la longitud de la normal trazada desde el origen a la recta, y ω es el ángulo positivo menor que 360°, medido a partir de la parte positiva del eje X a la normal.

Demostración. Deduciremos la ecuación evaluando la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ y las coordenadas (x_1, y_1) del punto P_1 sobre la recta en términos de p y ω, sustituyéndolas en la forma punto-pendiente. Por trigonometría, para cualquier posición de la recta $\mathscr{L}$, excepto aquellos en que la recta pasa por el origen, tenemos :

$$x_1 = p\text{Cos}\omega \quad , \quad y_1 = p\text{Sen}\omega$$

Luego, P_1 tendrá por coordenadas (pCosω , pSenω). Como la recta $\mathscr{L}$ es perpendicular a su normal, su pendiente es la recíproca negativa de la pendiente de la normal, esto es

$$m = \frac{1}{\text{Tg}\omega} = -\text{Cotg}\,\omega = -\frac{\text{Cos}\,\omega}{\text{Sen}\,\omega}$$

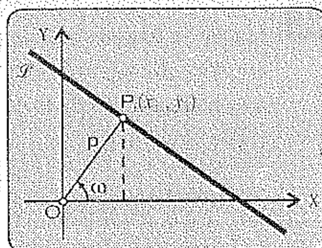


FIGURA 3.18

Por tanto, por la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta tenemos :

$$y - p\,\text{Sen}\,\omega = -\frac{\text{Cos}\,\omega}{\text{Sen}\,\omega}(x - p\text{Cos}\omega) \Rightarrow y\,\text{Sen}\,\omega - p\text{Sen}^2\omega = -x\,\text{Cos}\,\omega + p\text{Cos}^2\omega$$

$$\Rightarrow x\,\text{Cos}\omega + y\,\text{Sen}\omega - p(\text{Sen}^2\omega + \text{Cos}^2\omega) = 0$$

$$\Rightarrow x\,\text{Cos}\omega + y\,\text{Sen}\omega - p = 0$$

3.5 REDUCCION A LA FORMA NORMAL

TEOREMA 3.8. La forma general de la ecuación de una recta $\mathscr{L}$: $Ax + By + C = 0$ puede reducirse a la forma normal , $x\,\text{Cos}\omega + y\,\text{Sen}\,\omega - p = 0$ dividiendo cada término de $\mathscr{L}$ por $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$, en donde el signo que precede al radical r se escoge como sigue :

a) Si $C \neq 0$, r es de signo contrario al de C

b) Si $C = 0$ y $B \neq 0$, r y B tienen el mismo signo

c) Si $C = B = 0$, r y A tienen el mismo signo.

Demostración. Como las ecuaciones $Ax + By + C = 0$ y $x\,\text{Cos}\,\omega + y\,\text{Sen}\,\omega - p = 0$ representan la misma recta, entonces por la condición de rectas coincidentes

$$\frac{\text{Cos}\,\omega}{A} = \frac{\text{Sen}\,\omega}{B} = \frac{-p}{C}$$

Si representamos el valor común de estas razones por k tendremos

$$\text{Cos}\,\omega = kA \ , \ \text{Sen}\,\omega = kB \ , \ -p = kC$$

y si elevamos al cuadrado ambos miembros de las dos primeras ecuaciones, y sumamos, obtenemos :

$$\text{Cos}^2\omega + \text{Sen}^2\omega = k^2(A^2 + B^2) \Rightarrow k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \ , \ A^2 + B^2 \neq 0$$

Si multiplicamos cada miembro de la ecuación de $\mathscr{L}$ por este valor se tiene :

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

EJERCICIOS . *Grupo 11*

1 Hallar la ecuación de una recta en la forma normal, siendo $\omega = 60°$ y $p = 6$

Solución. Si $\omega = 60° \Rightarrow \text{Cos}\,\omega = \frac{1}{2}$ y $\text{Sen}\,\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Luego, la ecuación de la recta

en su forma normal es , $\mathscr{L}$: $\frac{1}{2}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y - 6 = 0$ ■

2 Una recta es tangente a un círculo de centro en el origen y radio 3. Si el punto de tangencia es $P(2\,,-\sqrt{5})$, hállese la ecuación de la tangente en la forma normal.

Solución. Por Geometría elemental sabemos que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Por tanto ,

$$p = 3\ ,\ \text{Sen}\,\omega = \frac{y}{p} = \frac{-\sqrt{5}}{3} \ \text{ y } \ \text{Cos}\,\omega = \frac{x}{p} = \frac{2}{3}$$

Luego , la ecuación de la tangente $\mathscr{L}$ en la forma normal es , $\mathscr{L}$: $\frac{2}{3}\,x + \frac{-\sqrt{5}}{3}\,y - 3 = 0$ ■

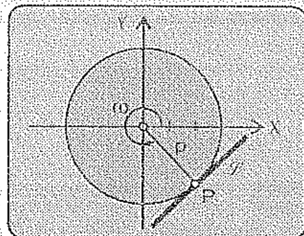


FIGURA 3.19

3 La ecuación de una recta en la forma normal es x Cos ω + Sen ω - 5 = 0. Hallar el valor de ω para que la recta pase por el punto A(-4 , 3).

Solución. De la forma normal se tiene, p = 5

$$\text{Entonces : } \operatorname{Cos}\omega = \frac{x}{p} = -\frac{4}{5} \text{ y } \operatorname{Sen}\omega = \frac{y}{p} = \frac{3}{5}$$

Como $\operatorname{Cos}\omega < 0$ y $\operatorname{Sen}\omega > 0 \Rightarrow \omega \in [0 , \pi]$

Luego, si $\operatorname{Sen}\omega = 0.6 \Rightarrow \omega = 180° - 36°51' = 143°8'$ ■

4 Reducir la ecuación $\mathscr{L}$: $12x - 5y - 52 = 0$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω.

Solución. Si A = 12 , B = -5 y C = -52 $\Rightarrow r = \pm\sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{144 + 25} = \pm 13$

Como C es negativo , debemos elegir r = 13 ; luego , por el Teorema 8 , la ecuación de $\mathscr{L}$ en su forma normal es , $\mathscr{L} : \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 4 = 0$

De donde obtenemos p = 4 , y si $\operatorname{Cos}\omega > 0$ y $\operatorname{Sen}\omega < 0 \Rightarrow 270° \leq \omega \leq 360°$

Por tanto, si $\operatorname{Cos}\omega = 0.923 \Rightarrow \omega = 360° - 22°37' = 337°23'$ ■

5 Hallar la distancia del origen a la recta $\mathscr{L}$: $2x - 3y + 9 = 0$

Solución. Si A = 2 , B = -3 y C = 9 $\Rightarrow r = \sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{4 + 9} = \pm\sqrt{13}$

$$\text{Luego, } p = d(0 , \mathscr{L}) = \left|\frac{C}{r}\right| = \frac{9\sqrt{13}}{13}$$ ■

6 Determinar el valor de k para que la distancia del origen a la recta $\mathscr{L}$: $x + ky - 7 = 0$ sea 2.

Solución. Si A = 1 , B = k y C = -7 $\Rightarrow r = \pm\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1 + k^2}$

$$\text{Luego, } p = d(0 , \mathscr{L}) \Rightarrow 2 = \left|\frac{C}{r}\right| = \frac{7}{\sqrt{1 + k^2}} \text{ , de donde } k = \pm\frac{2}{3}\sqrt{5}$$ ■

7 Reducir la ecuación $y = mx + b$ a la forma normal, y hallar los valores de p y ω.

Solución. Si $\mathscr{L}$: $mx - y + b = 0 \Rightarrow$ A = m , B = -1 , C = b y $r = \pm\sqrt{m^2 + 1}$

Luego, la forma normal de $\mathscr{L}$ es :

$$\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+1}}\,x+\frac{-1}{\pm\sqrt{m^2+1}}\,y-\frac{b}{\pm\sqrt{m^2+1}}=0$$

de donde $p=\dfrac{b}{\sqrt{m^2+1}}$, y si $\text{Cos}\,\omega=\dfrac{m}{\pm r}\Rightarrow\omega=\text{arc Cos}(\pm m/r)$ ■

8 Hallar la ecuación de la recta cuya distancia del origen es 5 y que pasa por el punto P(1 , 7). (Dos soluciones).

Solución. La ecuación de la recta que pasa por P(1 , 7), de pendiente m, es

$$y-7=m(x-1)\Leftrightarrow\mathscr{L}: mx-y+(7-m)=0 \qquad (1)$$

de donde se tiene : $A=m$, $B=-1$ y $C=7-m\Rightarrow r=\pm\sqrt{m^2+1}$

Si $d(0,\mathscr{L})=\left|\dfrac{C}{r}\right|\Rightarrow 5=\left|\dfrac{7-m}{\sqrt{m^2+1}}\right|\Leftrightarrow 5\sqrt{m^2+1}=|7-m|$

Elevando al cuadrado ambos miembros y efectuando operaciones obtenemos

$$12m^2+7m-12=0\Leftrightarrow m=3/4 \text{ ó } m=-4/3$$

Sustituyendo cada valor de m en (1) obtendremos las ecuaciones pedidas, esto es

$$\mathscr{L}: 3x-4y+15=0 \text{ ó } \mathscr{L}: 4x+3y-25=0$$ ■

9 El ángulo de inclinación de una recta es de 45°. Hallar su ecuación si su distancia del origen es 4. (Dos soluciones).

Solución. Si $m=\text{Tg}\,45°=1$, la ecuación de la recta es

$$y=x+b\Leftrightarrow\mathscr{L}: x-y+b=0 \qquad (1)$$

Dado que $d(0,\mathscr{L})=4\Rightarrow\left|\dfrac{C}{r}\right|=4\Rightarrow\dfrac{|b|}{\sqrt{1+1}}=4$, de donde $b=\pm4\sqrt{2}$

Sustituyendo en (1) obtenemos las rectas $\mathscr{L}: x-y\pm4\sqrt{2}=0$ ■

10 La pendiente de una recta es -3. Hallar su ecuación si su distancia del origen es 2. (Dos soluciones).

Solución. La ecuación de la recta es $y=-3x+b\Rightarrow\mathscr{L}: 3x+y-b=0$ (1)

$$\text{Si } d(0,\mathscr{L})=2\Rightarrow\frac{|C|}{r}=2\Rightarrow\frac{|-b|}{\sqrt{9+1}}=2\Leftrightarrow b=\pm2\sqrt{10}$$

Sustituyendo en (1), se tienen las dos rectas, $\mathscr{L}: 3x+y\pm2\sqrt{10}=0$ ■

11 Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-1 , 7) y B(4 , 2).

Solución. La ecuación de la recta que pasa por A y B es

$$y - 7 = \left(\frac{2-7}{4+1}\right)(x+1) \Rightarrow \mathscr{L} : x + y - 6 = 0$$

$r = \pm\sqrt{A^2+B^2} = \pm\sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2}$. Como $C < 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

Dividiendo cada término de $\mathscr{L}$ entre r, obtendremos su forma normal

$$\mathscr{L}: \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{6}{\sqrt{2}} = 0$$ ■

12 Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\mathscr{L}_1$: $x - 5y + 11 = 0$ y pasa por A(-7 , 2).

Solución. La pendiente de $\mathscr{L}_1$ es $m_1 = 1/5$; entonces la ecuación de la recta $\mathscr{L} \parallel \mathscr{L}_1$

que pasa por A es : $y - 2 = \frac{1}{5}(x + y) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x - 5y + 17 = 0$

$r = \pm\sqrt{A^2+B^2} = \pm\sqrt{1+25} = \pm\sqrt{26}$. Como $C > 0 \Rightarrow r = -\sqrt{26}$

Dividiendo cada término de $\mathscr{L}$ entre r obtenemos :

$$\mathscr{L}: \frac{1}{\sqrt{26}}x + \frac{5}{\sqrt{26}}y - \frac{17}{\sqrt{26}} = 0$$ ■

13 Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la que tiene por ecuación $\mathscr{L}_1$: $3x + 2y - 9 = 0$ y cuya distancia del origen es 8. (Dos soluciones)

Solución. Pendiente de $\mathscr{L}_1$, $m_1 = -3/2$; entonces la ecuación de la recta $\mathscr{L} \parallel \mathscr{L}_1$ es:

$$y = -\frac{3}{2}x + b \Rightarrow \mathscr{L} : 3x + 2y - 2b = 0 \qquad (1)$$

Si $d(0, \mathscr{L}) = 8 \Rightarrow \left|\frac{C}{r}\right| = 8 \Rightarrow \frac{|-2b|}{\sqrt{9+4}} = 8$, de donde : $2b = \pm 8\sqrt{13}$

Sustituyendo en (1) se tienen las rectas buscadas , $\mathscr{L}: 3x + 2y \pm 8\sqrt{13} = 0$ ■

14 Hallar la forma normal de la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1$: $2x - 3y + 7 = 0$ y determina sobre el eje X el segmento -9.

Solución. La pendiente de la recta $\mathscr{L}_1$ es $m_1 = 2/3$

Luego, la ecuación de la recta $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1$, que pasa por el punto (-9 ; 0) es :

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 9) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x + 2y + 27 = 0 \qquad (1)$$

Si $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow r = \pm\sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \pm\sqrt{13}$. Como $C > 0 \Rightarrow r = -\sqrt{13}$

Entonces, en (1) se tiene : $\mathscr{L}: -\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{-2}{\sqrt{13}}y - \frac{27}{\sqrt{13}} = 0$ ■

15 Los vértices de un triángulo son A(-4 , 2) , B(-1 , 5) y C(2 , -1). Hállense las ecuaciones de las alturas en la forma normal.

Solución. Pendiente del lado $\overline{AB}$: $m = \frac{5 - 2}{-1 + 4} = 1$

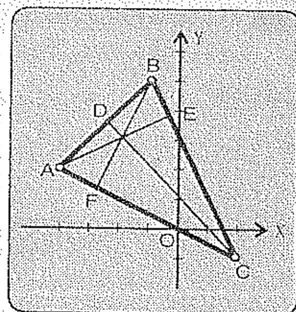


FIGURA 3.20

La ecuación de la altura $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ es

$$y + 1 = -(x - 2) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{CD}: x + y - 1 = 0$$

Si $C = -1 < 0 \Rightarrow r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{CD}: \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Pendiente del lado $\overline{BC}$: $m = \frac{-1 - 5}{2 + 1} = -2$

Ecuación de la altura $\overline{AE}$: $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 4) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AE}: x - 2y + 8 = 0$

Si $C = 8 > 0 \Rightarrow r = -\sqrt{A^2 + B^2} = -\sqrt{1 + 4} = -\sqrt{5}$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{AE}: -\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{8}{\sqrt{5}} = 0$$

Pendiente del lado $\overline{AC}$: $m = \frac{-1 - 2}{2 + 4} = -\frac{1}{2}$

Ecuación de la altura $\overline{BF} \perp \overline{AC}$: $y - 5 = 2(x + 1) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BF}: 2x - y + 7 = 0$

Como $C = 7 > 0 \Rightarrow r = -\sqrt{A^2 + B^2} = -\sqrt{4 + 1} = -\sqrt{5}$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{BF}: -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{7}{\sqrt{5}} = 0$$ ■

16 Hallar la distancia del origen a cada una de las rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : 3x + 5y - 11 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 6x + 10y - 5 = 0$. Deducir de este resultado la distancia entre las dos rectas.

Solución. En $\mathscr{L}_1$, $C = -11 < 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{32 + 5} = \sqrt{34}$

En $\mathscr{L}_2$, $C = -5 < 0 \Rightarrow r_2 = \sqrt{62 + 102} = 2\sqrt{34}$

Entonces : $d(0, \mathscr{L}_1) = \left|\frac{C_1}{r_1}\right| = \frac{11}{\sqrt{34}}$ y $d(0, \mathscr{L}_2) = \left|\frac{C_2}{r_2}\right| = \frac{5}{2\sqrt{34}}$

$$\therefore\ d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = d(0, \mathscr{L}_1) - d(0, \mathscr{L}_2) = \frac{17}{2\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$ ■

17 Hallar la distancia del origen a cada una de las rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : 2x + 3y - 4 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 6x + 9y + 11 = 0$. A partir de esto calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución. En $\mathscr{L}_1$, $C_1 = -4 < 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

En $\mathscr{L}_2$, $C_2 = 11 > 0 \Rightarrow r_2 = -\sqrt{(6)^2 + (9)^2} = -3\sqrt{13}$

Luego : $d(0, \mathscr{L}_1) = \left|\frac{C_1}{r_1}\right| = \frac{4}{\sqrt{13}}$ y $d(0, \mathscr{L}_2) = \left|\frac{C_2}{r_2}\right| = \frac{11}{3\sqrt{13}}$

$$\therefore\ d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = d(0, \mathscr{L}_1) - d(0, \mathscr{L}_2) = \frac{4}{\sqrt{13}} - \frac{11}{-3\sqrt{13}} = \frac{23\sqrt{13}}{39}$$ ■

18 La ecuación de una recta $\mathscr{L}$ es $x + 3y - 6 = 0$, y las coordenadas de un punto P son (4 , 7). Hallar la ecuación de la recta que pasa por P y es paralela a $\mathscr{L}$. A partir de este resultado hallar la distancia de P a $\mathscr{L}$.

Solución. La pendiente de la recta $\mathscr{L}$ es $m = -1/3$ y la ecuación de la recta $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}$ que pasa por P(4 , 7) es : $y - 7 = -1/3(x - 4) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + 3y - 25 = 0$

En $\mathscr{L}_1$, $C_1 = -25 < 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

Luego, $d(0, \mathscr{L}) = \left|\frac{C}{r}\right| = \frac{6}{\sqrt{10}}$ y $d(0, \mathscr{L}_1) = \left|\frac{C_1}{r_1}\right| = \frac{25}{\sqrt{10}}$

$$\therefore\ d(P, \mathscr{L}) = d(\mathscr{L}, \mathscr{L}_1) = d(0, \mathscr{L}_1) - d(0, \mathscr{L}) = \frac{25}{\sqrt{10}} - \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{19\sqrt{10}}{10}$$ ■

3.6 APLICACIONES DE LA FORMA NORMAL

1. *Cálculo de la distancia de una recta a un punto dado*

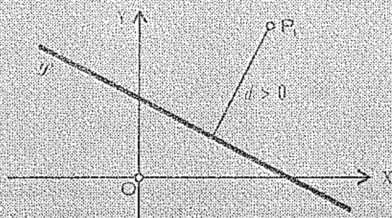
TEOREMA 3.9. La distancia *no dirigida d* de una recta $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$ a un punto $P_1(x_1, y_1)$ puede obtenerse sustituyendo coordenadas del punto en el primer extremo de la forma normal de la ecuación de la recta. El valor está dado entonces por

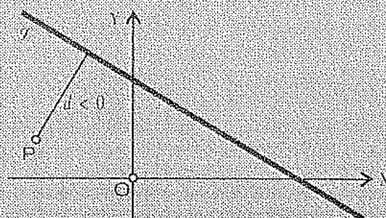
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

TEOREMA 3.10. La distancia *dirigida d* de la recta $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$ al punto $P_1(x_1, y_1)$ se obtiene por la fórmula

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo con el Teorema 8. Si la recta $\mathscr{L}$ pasa por el origen , d es positiva o negativa según que el punto P_1 y el origen están en lados opuestos o del mismo lado de la recta. Si la recta pasa por el origen, d es positiva o negativa según que el punto P_1 esté arriba o abajo de la recta $\mathscr{L}$.





2. *Determinación de las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas que se cortan.*

TEOREMA 2.11. Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas que cortan , $\mathscr{L}_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

y $\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, son :

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

y

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

en donde los signos de los radicales se escogen de acuerdo con el Teorema 8.

EJERCICIOS . *Grupo 12*

1 Hallar la distancia de la recta $\mathscr{L}: 4x - 4y + 10 = 0$ al punto P(2 , -3).

Solución. Haciendo uso del Teorema 9, tenemos :

$$d(P , \mathscr{L}) = \frac{|4(2) - 5(-3) + 10|}{\sqrt{153(4)^2 + (-5)^2}} = \frac{|33|}{\sqrt{41}} = \frac{33\sqrt{41}}{41}$$ ■

2 Hallar la distancia dirigida de la recta $\mathscr{L}: x + 2y + 7 = 0$ al punto P(1 , 4)

Solución. En la Figura 3.21 se observa que el punto P y el origen O están a un mismo lado de la recta $\mathscr{L}$, luego, por el Teorema 10 se tiene

$$d(P , \mathscr{L}) = \frac{(1) + 2(4) + 7}{-\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = -\frac{16\sqrt{5}}{5}$$ ■

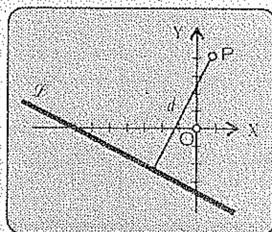


FIGURA 3.21

3 Los vértices de un triángulo son A(-4 , 1) , B(-3 , 3) y C(3 , -3). Hallar la longitud de la altura del vértice A sobre el lado $\overline{BC}$ y el área del triángulo.

Solución. La ecuación del lado $\overline{BC}$ es

$$y - 3 = \left(\frac{-3 - 3}{3 + 3}\right)(x + 3) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x + y = 0$$

La altura $|\overline{AH}| = d(A, \mathscr{L}) \Rightarrow |\overline{AH}| = \dfrac{|-4+1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Base del triángulo : $|\overline{BC}| = \sqrt{(3+3)^2 + (-3-3)^2} = 6\sqrt{2}$

Luego : $a(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}\,|\overline{BC}| \times |\overline{AH}| = \dfrac{1}{2}\,(6\sqrt{2})\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$$\therefore \; a(\Delta ABC) = 9 \text{ u}^2$$ ■

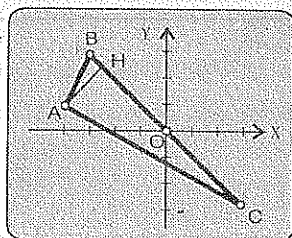


FIGURA 3.22

4 Hallar la distancia comprendida entre las rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : 3x - 4y + 8 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 6x - 8y + 9 = 0$

Solución. Un dibujo preliminar de las rectas nos muestra que : $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = |\overline{PR}| = |\overline{OP}| - |\overline{OR}|$ o bien :

$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = d(0, \mathscr{L}_1) - d(0, \mathscr{L}_2) = \left|\frac{C_1}{r_1}\right| - \left|\frac{C_2}{r_2}\right|$$

$$= \frac{8}{\sqrt{9+16}} - \frac{9}{\sqrt{36+64}} = \frac{8}{5} - \frac{9}{10}$$

$$= \frac{7}{10}$$ ■

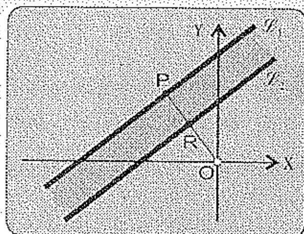


FIGURA 3.23

5 Hallar la distancia entre las rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : x + 2y - 10 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x + 2y + 6 = 0$

Solución. En la Figura 3.24 se observa que la

$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = |\overline{OP}| + |\overline{OR}|$$

$$= |d(0, \mathscr{L}_1)| + |d(0, \mathscr{L}_2)|$$

$$\Rightarrow d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \left|\frac{C_1}{r_1}\right| + \left|\frac{C_2}{r_2}\right| = \frac{|6|}{\sqrt{1+4}} + \frac{|-10|}{\sqrt{1+4}}$$

$$\therefore \; d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$ ■

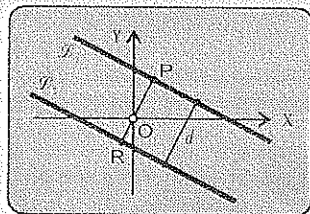


FIGURA 3.24

6 Hallar la ecuación de la paralela a la recta $\mathscr{L}_1 : 5x + 12y - 12 = 0$ y distante 4 unidades de ella. (Dos soluciones.)

Solución. Si $m_1 = -5/12$, la ecuación de la recta $\mathscr{L} \parallel \mathscr{L}_1$ es

$$y = -\frac{5}{12}x + b \Leftrightarrow \mathscr{L}: 5x + 12y - 12b = 0 \text{ , o bien , } \mathscr{L}: 5x + 12y + k = 0 \quad (1)$$

Si $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}) = 4 \Rightarrow \dfrac{|k - C_1|}{r} = 4$, esto es : $\dfrac{|k - (-12)|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 4$

de donde se tiene : $|k + 12| = 52 \Leftrightarrow k + 12 = 52$ ó $k + 12 = -52$

$$\Leftrightarrow k = 40 \text{ ó } k = -64$$

Sustituyendo en (1) obtenemos las dos soluciones

$$\mathscr{L}: 5x + 12y + 40 = 0 \text{ ó } \mathscr{L}: 5x + 12y - 64 = 0$$ ■

7 La distancia dirigida de la recta $\mathscr{L}: 2x + 5y - 10 = 0$ al punto P es -3. Si la abscisa de P es 2, hállese su ordenada.

Solución. Sean $(2 , y)$ las coordenadas del punto P, y si $d(P , \mathscr{L}) = -3$, entonces por el Teorema 3.10 :

$$\frac{2(2) + 5y - 10}{\sqrt{(2)^2 + (5)^2}} = -3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}(6 - 3\sqrt{29})$$ ■

8 La distancia de la recta $\mathscr{L}: 4x - 3y + 1 = 0$ al punto P es 4. Si la ordenada de P es 3, hállese su abscisa. (Dos soluciones)

Solución. Si $P(x , 3)$ y $d(P , \mathscr{L}) = 4$, entonces por el Teorema 3.9, se tiene

$$\frac{|4x - 3(3) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4 \Rightarrow |4x - 8| = 20$$
$$\Leftrightarrow 4x - 8 = 20 \text{ ó } 4x - 8 = -20$$
$$\Leftrightarrow x = 7 \text{ ó } x = -3$$ ■

9 Hallar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan de las dos rectas paralelas $\mathscr{L}_1 : 12x - 5y + 3 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 12x - 5y - 6 = 0$.

Solución. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas paralelas $y = mx + b_1$ e $y = mx + b_2$, es la *paralela media*

$$y = mx + \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$$

Luego, si, $\mathscr{L}_1 : y = \frac{12}{5}x + \frac{3}{5}$ y $\mathscr{L}_2 : y = \frac{12}{5}x - \frac{6}{5}$, entonces la paralela media de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es : $y = \frac{12}{5}x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\right) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 24x - 10y - 3 = 0$ ■

10 En la ecuación $\mathscr{L}: kx + 3y + 5 = 0$, hallar el valor del coeficiente k de manera que la distancia dirigida de la recta que representa al punto P(2 , -2) sea igual a - 1.

Solución. Si $d(P, \mathscr{L}) = -1$, por el Teorema 3.10 se tiene

$$\frac{k(2) + 3(-2) + 5}{-\sqrt{k^2+9}} = -1 \Rightarrow 2k + 1 = \sqrt{k^2+9}$$

$$\Rightarrow 3k^2 - 3k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}(2 \pm 2\sqrt{7})$$

Como k debe ser positiva para que la $d(P, \mathscr{L})$ sea negativa, elegimos

$$k = \frac{1}{3}(2 + 2\sqrt{7})$$ ■

11 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3 , 1) y tal que la distancia de esta recta al punto A(-1 , 1) sea igual a $2\sqrt{2}$.

Solución. La recta que pasa por el punto P(3 , 1) tiene por ecuación.

$$y - 1 = m(x - 3) \Leftrightarrow \mathscr{L}: mx - y + 1 - 3m = 0 \qquad (1)$$

Si $d(A, \mathscr{L}) = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|-m - 1 + 1 - 3m|}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt{2}$, de donde : $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Sustituyendose estos valores en (1) obtenemos dos soluciones

$$\mathscr{L}: x - y - 2 = 0 \text{ ó } \mathscr{L}: x + y - 4 = 0$$ ■

12 Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $\mathscr{L}_1 : x + y - 1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 2x - y + 1 = 0$, y demostrar que son perpendiculares entre si.

Solución. Si P(x , y) es un punto genérico de una de las bisectrices, entonces por definición de bisectriz : $|d(P, \mathscr{L}_1)| = |d(P, \mathscr{L}_2)|$

$$\Rightarrow \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{4+1}} \Leftrightarrow \sqrt{5}\,|x + y - 1| = \sqrt{2}\,|2x - y + 1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}(x+y-1) = \sqrt{2}(2x-y+1) \text{ ó } \sqrt{5}(x+y-1) = -\sqrt{2}(2x-y+1)$$

de donde obtenemos las ecuaciones de las bisectrices

$$\overleftrightarrow{B}_1 : (2\sqrt{2} - \sqrt{5})x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})y + (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 0$$

$$\overleftrightarrow{B}_2 : (2\sqrt{2} + \sqrt{5})x - (\sqrt{2} - \sqrt{5})y + (\sqrt{2} - \sqrt{5}) = 0$$

Si $\overleftrightarrow{B}_1$ y $\overleftrightarrow{B}_2$ son perpendiculares, el producto de sus pendientes debe ser igual a - 1. En efecto :

$$m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}\right)\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}\right) = \frac{8-5}{2-5} = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{B}_1 \perp \overleftrightarrow{B}_2$$ ■

13 Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas $\mathscr{L}_1 : x - 3y - 4 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 4x - y - 4 = 0$

Solución. Representamos por d_1 y d_2 las distancias dirigidas del punto $P \in \overleftrightarrow{B}$ a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, respectivamente. En la Figura 3.25, por el Teorema 3.10, se deduce que : $-d_1 = d_2$

$$\Rightarrow -\frac{x-2y-4}{\sqrt{1+4}} = \frac{4x-y-4}{\sqrt{16+1}}$$

de donde obtenemos la ecuación de la bisectriz

$$\overleftrightarrow{B}_1 : (\sqrt{17} + 4\sqrt{5})x - (2\sqrt{17} + \sqrt{5})y - 4(\sqrt{17} + \sqrt{5}) = 0$$ ■

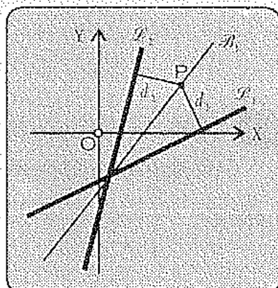


FIGURA 3.25

14 En el triángulo del Ejercicio 3, hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores y demostrar que concurren en un punto.

Solución. Datos del triángulo : A(-4 , 1) , B(-3 , 3) , C(3 , -3)

Las ecuaciones de los lados son

$$\overleftrightarrow{AB} : y - 1 = \left(\frac{3-1}{-3+4}\right)(x+4) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 2x - y + 9 = 0$$

$$\overleftrightarrow{BC} : y - 3 = \left(\frac{-3-3}{3+3}\right)(x+3) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : x + y = 0$$

$$\overleftrightarrow{CA} : y - 1 = \left(\frac{1+3}{-4-3}\right)(x+4) \Leftrightarrow \mathscr{L}_3 : 4x + 7y + 9 = 0$$

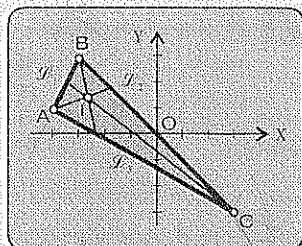


FIGURA 3.26

Representemos por d_1, d_2 y d_3 las distancias dirigidas

del incentro I a cada uno de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, respectivamente. Obsérvese que las tres distancias son negativas. Ahora, del Teorema 3.10 se deduce que :
Para la bisectriz del ángulo A : $-d_1 = -d_3$

$$\Rightarrow -\frac{2x-y+9}{-\sqrt{4+1}} = -\frac{4x+7y+9}{-\sqrt{16+49}} \Leftrightarrow \frac{2x-y+9}{\sqrt{5}} = \frac{4x+7y+9}{\sqrt{5}\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow \overleftrightarrow{B}_1 : (2\sqrt{13}-4)x-(\sqrt{13}+7)y+9(\sqrt{13}-1)=0$$

Para la bisectriz del ángulo B : $-d_1 = -d_2$

$$\Rightarrow \frac{2x-y+9}{-\sqrt{4+1}} = \frac{x+y}{+\sqrt{1+1}} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{B}_2 : (2\sqrt{2}+\sqrt{5})x+(\sqrt{5}-\sqrt{2})y+9\sqrt{2}=0$$

Para la bisectriz del ángulo C : $-d_2 = -d_3$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \frac{4x+7y+9}{-\sqrt{65}} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{B}_3 : (4\sqrt{2}+\sqrt{65})x+(7\sqrt{2}+\sqrt{65})y+9\sqrt{2}=0$$

Si $\overleftrightarrow{B}_1$, $\overleftrightarrow{B}_2$ y $\overleftrightarrow{B}_3$ son concurrentes, el determinante de los términos constantes debe ser cero (Ejercicio 20. Grupo 10). Se deja al lector la tarea de verificar el resultado. ■

15 Demostrar analíticamente, que en un triángulo cualquiera las bisectrices de los ángulos interiores se cortan en un punto que equidista de los tres lados. Este punto se llama *incentro*.

Demostración. Sea el ΔABC de la Figura 3.27, una de cuyas bisectrices coincide con el eje Y. Las ecuaciones de los lados son

$\overline{AB} : y - 0 = \frac{b}{a}(x-a) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : bx - ay + ab = 0$

$\overline{BC} : y - 0 = -\frac{b}{a}(x-a) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : bx + ay - ab = 0$

$\overline{AC}$, es la ecuación del eje X. $\mathscr{L}_3 : y = 0$

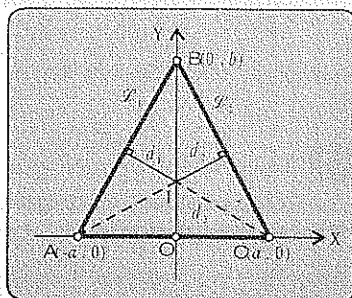


FIGURA 3.27

Representemos por d_1, d_2 y d_3 las distancias dirigidas del incentro a cada lado respectivo del triángulo.
Para la bisectriz del ángulo A : $-d_1 = d_3$

$$\Rightarrow -\frac{bx-ay+ab}{-\sqrt{b^2+a^2}} = y \Leftrightarrow \overleftrightarrow{B}_1 : bx-(a+\sqrt{(a^2+b^2})\,y+ab=0$$

Para la bisectriz del ángulo C : $-d_2 = d_3$

$$\Rightarrow -\frac{bx + ay - ab}{+\sqrt{b^2+a^2}} = y \Leftrightarrow \overleftrightarrow{B}_2 : bx + (a + \sqrt{a^2+b^2})y - ab = 0$$

La bisectriz del ángulo B tiene por ecuación $\overleftrightarrow{B}_3 : x = 0$

Interceptando $\overleftrightarrow{B}_1$ y $\overleftrightarrow{B}_2$ obtenemos el incentro $I\left(0 \,,\, \dfrac{ab}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Como $I \in \overleftrightarrow{B}_3$, entonces las tres bisectrices se cortan en un solo punto.

Debemos probar ahora que $|d_1| = |d_2| = |d_3|$. En efecto

$$d_1 = d(I, \mathscr{L}_1) = \frac{\left|0 - \dfrac{a^2 b}{a+\sqrt{a^2+b^2}} + ab\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d_2 = d(I, \mathscr{L}_2) = \frac{\left|0 + \dfrac{a^2 b}{a+\sqrt{a^2+b^2}} - ab\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d_3 = d(I, \mathscr{L}_3) = \text{ordenada del baricentro} = \frac{ab}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$$

Por tanto, I equidista de los tres lados del triángulo. ■

16 Demostrar, analíticamente, que es un triángulo cualquiera la bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores en los otros dos vértices son concurrentes.

Se deja al lector la tarea de demostrar el teorema.

17 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $\mathscr{L}: 4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia del eje X.

Solución. 1. Sea $P(x\,,\; y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $d(P, \mathscr{L}) = 2d(P, \text{Eje X})$

2. Expresión analítica : $\dfrac{|4x - 3y + 12|}{\sqrt{16+9}} = 2y$

3. De donde : $|4x - 3y + 12| = 10y \Leftrightarrow (4x - 3y + 12 = 10y) \vee (4x - 3y + 12 = -10y)$

$\Leftrightarrow 4x - 13y + 12 = 0 \vee 4x + 7y + 12 = 0$ ■

18 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $\mathscr{L}: 4x - 3y + 12 = 0$ es siempre igual a la mitad de su distancia del eje Y.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica : $d(P, \mathscr{L}) = \frac{1}{2} d(P, \text{Eje Y})$

2. Expresión analítica : $\dfrac{|4x - 3y + 12|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{1}{2}(x)$

3. De donde : $2|4x - 3y + 12| = 5x \Leftrightarrow 2(4x - 3y + 12) = 5x \vee 2(4x - 3y + 12) = -5x$

$\Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0 \vee 13x - 6y + 24 = 0$ ■

19 Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias de las dos rectas $\mathscr{L}_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ es una constante. Demostrar que el lugar geométrico es una recta.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $d(P, \mathscr{L}_1) + d(P, \mathscr{L}_2) = k$

2. Expresión analítica : $\dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{r_1} + \dfrac{A_2x + B_2y + C_2}{r_2} = k$

3. Efectuando se tiene : $(A_1x + B_1y + C_1)r_2 + (A_2x + B_2y + C_2)r_1 = k\, r_1 r_2$

$\Leftrightarrow (A_1r_2 + A_2r_1)x + (B_1r_2 + B_2r_1)y + C_1r_2 + C_2r_1 = kr_1r_2$

Por lo tanto, el lugar geométrico es una recta. ■

20 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $\mathscr{L}: x + 2 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto $A(2, 0)$.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe cumplir la propiedad geométrica : $d(P, \mathscr{L}) = d(A, P)$

2. Expresión analítica : $|x + 2| = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2}$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos : $y^2 = 8x$ ■

21 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $y + 2 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto A(0 , 2)

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica : $d(\text{P} , \mathscr{L}) = d(\text{A} , \text{P})$

2. Expresión analítica : $|y + 2| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos : $x^2 = 8y$ ■

22 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $\mathscr{L}: x - 2 = 0$ es siempre 3 unidades mayor que su distancia del punto A(-1 , -3).

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $d(\text{P} , \text{R}) + 3 = d(\text{A} , \text{P})$

2. Expresión analítica : $|x - 2| + 3 = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 3)^2}$

3. a) Si $x > 2 \Rightarrow |x - 2| = (x - 2) \Rightarrow x + 1 = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 3)^2}$

Elevando ambos extremos al cuadrado se tiene : $y + 3 = 0$

La ecuación del lugar geométrico es una recta horizontal

b) Si $x < 2 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) \Rightarrow 5 - x = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 3)^2}$

De donde obtenemos la ecuación : $y^2 - 6y + 12x - 15 = 0$ ■

23 Un punto se mueve de tal manera que su distancia de la recta $\mathscr{L}: x + y + 1 = 0$ es siempre igual a su distancia del punto A(-2 , -1). Hallar la ecuación del lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que satisface la condición geométrica : $d(\text{P} , \mathscr{L}) = d(\text{A} , \text{P})$

2. Expresión analítica : $\dfrac{|x + y + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 1)}$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado, la ecuación se reduce a

$$x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$$ ■

24 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $\mathscr{L}: x + 3 = 0$ es siempre igual al triple de su distancia

del punto A(2 , -4).

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $d(P , \mathscr{L}) = 3d(A , P)$

2. Expresión analítica : $|x + 3| = 3\sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2}$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado y efectuando operaciones, la ecuación se reduce a : $8x^2 + 9y^2 - 42x + 72y + 171 = 0$ ■

25 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto A(-2 , 1) es siempre igual al triple de su distancia a la recta $\mathscr{L}: y + 4 = 0$

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica : $d(A , P) = 3\,d(P , \mathscr{L})$

2. Expresión analítica : $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 3\,|y + 4|$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos la ecuación

$$x^2 - 8y^2 + 4x - 74y - 139 = 0$$ ■

26 Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto A(1 , -1) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $\mathscr{L}: 3x - 2y + 6 = 0$.Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $d(A , P) = 2\,d(P , \mathscr{L})$

2. Expresión analítica : $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2\,\dfrac{|3x - 2y + 6|}{\sqrt{9+4}}$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos la ecuación del L. G.

$$23x^2 - 48xy + 3y^2 + 170x - 122y + 118 = 0$$ ■

27 El ángulo de inclinación de cada una de dos rectas paralelas es α. Si una de ellas pasa por el punto $P(a , b)$ y la otra pasa por el punto Q(h , k), demostrar que la distancia que hay entre ellas es

$$|(h - a)\,\text{Sen}\,\alpha - (k - b)\,\text{Cos}\,\alpha|$$

Demostración. Ecuación de la recta $\mathscr{L}_1$

$$y - b = \frac{\text{Sen}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha}\,(x - a)$$

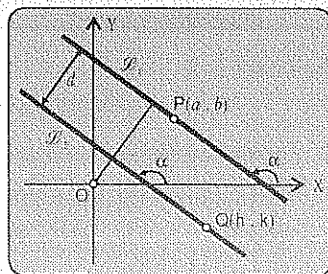


FIGURA 3.28

$\Rightarrow\ \mathscr{L}_1 : x\ \text{Sen}\alpha - y\ \text{Cos}\alpha + b\ \text{Cos}\alpha - a\ \text{Sen}\alpha = 0$

Ecuación de $\mathscr{L}_2$: $y - \text{k} = \dfrac{\text{Sen}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha}\,(x - \text{h})$

$\Rightarrow\ \mathscr{L}_2 : x\ \text{Sen}\alpha - y\ \text{Cos}\alpha + \text{k}\ \text{Cos}\alpha - \text{h}\ \text{Sen}\alpha = 0$

$$d(0\,,\mathscr{L}_1) = \frac{\text{C}_1}{\text{r}_1} = \frac{b\ \text{Cos}\alpha - a\ \text{Sen}\alpha}{\sqrt{\text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha}} = b\ \text{Cos}\alpha - a\ \text{Sen}\alpha$$

$$d(0\,,\mathscr{L}_2) = \frac{\text{C}_2}{\text{r}_2} = \frac{\text{k}\ \text{Cos}\alpha - \text{h}\ \text{Sen}\alpha}{\sqrt{\text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha}} = \text{k}\ \text{Cos}\alpha - \text{h}\ \text{Sen}\alpha$$

$$\Rightarrow d(\mathscr{L}_1\,,\mathscr{L}_2) = |\,d(0\,,\mathscr{L}_1) - d(0\,,\mathscr{L}_2)\,| = |\,b\ \text{Cos}\alpha - a\ \text{Sen}\alpha - \text{k}\ \text{Cos}\alpha + \text{h}\ \text{Sen}\alpha\,|$$

$$\therefore\ d(\mathscr{L}_1\,,\mathscr{L}_2) = |\,(\text{h} - a)\ \text{Sen}\alpha - (\text{k} - b)\ \text{Cos}\alpha\,|$$ ■

28 Hallar el área del trapecio formado por las rectas $\mathscr{L}_1 : 3x - y - 5 = 0$, $\mathscr{L}_1 : x - 2y + 5 = 0$, $\mathscr{L}_3 : x + 3y = 20$ y $\mathscr{L}_4 : x - 2y = 0$

Solución. Sea el trapecio ABCD mostrado en la Figura 3.29

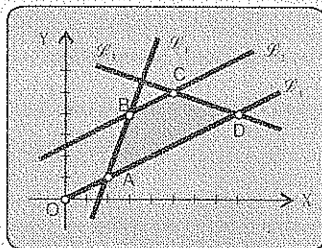


FIGURA 3.29

$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_4 = \text{A}(2\,,1)$, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \text{B}(3\,,4)$

$\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = \text{C}(5\,,5)$, $\mathscr{L}_3 \cap \mathscr{L}_4 = \text{D}(8\,,4)$

$|\overline{\text{AD}}| = \sqrt{(8-2)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{5}$

$|\overline{\text{BC}}| = \sqrt{(5-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{5}$

Altura del trapecio :

$$\text{h} = d(\text{B}\,,\mathscr{L}_4) = \frac{|3 - 2\,(4)|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore a\,(\text{ABCD}) = \tfrac{1}{2}\,(|\overline{\text{AD}}| + |\overline{\text{BC}}|)\,\text{h} = \tfrac{1}{2}\,(3\sqrt{5} + \sqrt{5})\sqrt{5} = 10\ \text{u}^2$$ ■

29 Desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan perpendiculares a los lados iguales. Demostrar, analíticamente , que la suma de las longitudes de estas perpendiculares es constante e igual a la longitud de la altura de uno de los vértices de la base sobre el lado opuesto.

Demostración. Sea el ΔABC cuyos vértices se indican en la Figura 3.30 , y sea P(a/2 , 0) un punto cualquiera de la base $\overline{AC}$.

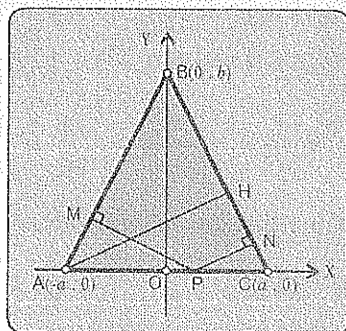


FIGURA 3.30

Ecuación de $\overline{AB}$:

$$y = \frac{b}{a}(x+a) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : bx - ay + ab = 0$$

Ecuación de $\overline{BC}$:

$$y = -\frac{b}{a}(x-a) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : bx + ay - ab = 0$$

$$|\overline{PM}| = d(P , \mathscr{L}_1) = \frac{|b(a/2) + ab|}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{3ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$|\overline{PN}| = d(P , \mathscr{L}_2) = \frac{|b(a/2) - ab|}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Luego, $|\overline{PM}| + |\overline{PN}| = \frac{3ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (1)

$$|\overline{AH}| = d(A , \mathscr{L}_2) = \frac{|b(-a) - ab|}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2)$$

Por tanto, de (1) y (2) se deduce que : $|\overline{PM}| + |\overline{PN}| = |\overline{AH}|$ ∎

30 Demostrar, analíticamente, que la bisectriz de cualquier ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados contiguos a los respectivos segmentos.

Demostración. Sea el ΔABC cuyos vértices se indican en la Figura 3.31

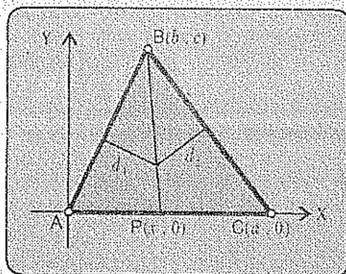


FIGURA 3.31

Ecuación de $\overline{AB}$: $y = \frac{c}{b}x \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : cx - by = 0$

Ecuación de $\overline{BC}$:

$$y = \frac{c}{b-a}(x-a) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : cx + (a-b)y - ac = 0$$

Teniendo en cuenta que a , b y c son números reales positivos, se tiene; para la bisectriz del ángulo B

$$-d_1 = -d_2 \Leftrightarrow \frac{cx - by}{-r_1} = -\frac{cx + (a-b)y - ac}{+r_2}$$

De donde obtenemos la ecuación de la bisectriz

$$\overleftrightarrow{BP} : c(r_1 + r_2)x - (br_1 + br_2 - ar_1)\,y - acr_1 = 0$$

Si $y = 0 \Rightarrow x = \overline{AP} = \dfrac{ar_1}{r_1 + r_2}$, luego, si $\overline{PC} = a - x \Rightarrow \overline{PC} = \dfrac{ar_2}{r_1 + r_2}$

Entones dividiendo : $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sqrt{c^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + (a-b)^2}}$ (1)

Por el teorema de la distancia : $\overline{AB} = \sqrt{b^2 + c^2}$ y $\overline{BC} = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$

Finalmente, sustituyendo en (1) : $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

Por lo que el teorema queda demostrado. ∎

3.7 AREA DE UN TRIANGULO

TEOREMA 3.12. El área del triángulo que tiene por vértices los puntos $A(x_1 , y_1)$, $B(x_2 , y_2)$ y $C(x_3 , y_3)$ es :

$$a(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

debiendo tomarse el valor absoluto del determinante.

Si tres puntos diferentes son colineales, pueden ser considerados como los vértices de un triángulo cuya área es cero. Por lo que, el corolario del Teorema 3.12 es el siguiente.

Corolario. Una condición necesaria y suficiente para que tres puntos diferentes de coordenadas $A(x_1 , y_1)$, $B(x_2 , y_2)$ y $C(x_3 , y_3)$, sean colineales es que :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.8 FAMILIA DE RECTAS

La totalidad de las rectas que satisfacen una condición geométrica se llama *familia o haz de rectas*. Entre las más importante podemos citar :

1. *Familia de rectas paralelas a una recta dada.*
Si $\mathscr{L}$: $Ax + By + C = 0$ es una recta dada, la familia de rectas paralelas a $\mathscr{L}$ se expresa por la ecuación

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

2. *Familia de rectas perpendiculares a una recta dada.*
Si $\mathscr{L}$: $Ax + By + C = 0$ es la recta dada, la familia de rectas perpendiculares a $\mathscr{L}$ se expresa por la ecuación

$$\mathbf{B}x - \mathbf{A}y + \mathbf{k} = 0 \qquad (2)$$

Vemos en (1) y (2) que una recta de una familia puede obtenerse asignando un valor particular a la constante arbitraria k, razón por la cual, k recibe el nombre de parámetro de la familia.

3. *Rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas.*
Si $\mathscr{L}_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ son las ecuaciones de dos rectas dadas, entonces el haz de rectas que pasan por $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, viene dada por la ecuación.

$$\mathbf{A}_1x + \mathbf{B}_1y + \mathbf{C}_1 + \mathbf{k}(\mathbf{A}_2x + \mathbf{B}_2y + \mathbf{C}_2) = 0 \qquad (3)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales.

La importancia de la forma (3) está en que nos permite obtener la ecuación de una recta que pasa por la intersección de las rectas dadas sin tener que buscar las coordenadas del punto de intersección.

EJERCICIOS . *Grupo 13*

5 Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $kx - y + 8 = 0$ que le corresponda pase por el punto P(-2 , 4). Halle la ecuación de la recta.

Solución. Sea la ecuación de la familia $\mathscr{L}$: $kx - y + 8 = 0$ (1)

Si $P(-2 ; 4) \in \mathscr{L} \Rightarrow k(-2) - (4) + 8 = 0 \Leftrightarrow k = 2$

Sustituyendo en (1) obtenemos el miembro de la familia requerido, esto es

$$\mathscr{L}_1 : 2x - y + 8 = 0$$

■

6 Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $3x - ky - 7 = 0$ que le corresponda sea perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1 : 7x + 4y - 11 = 0$. Hallado el parámetro escríbase la ecuación de la recta.

Solución. Sea la familia $\mathscr{L}: 3x - ky - 7 = 0$, cuya pendiente es $m = 3/k$

Si un miembro de esta familia es perpendicular a $\mathscr{L}_1$, entonces

$$m \cdot m_1 = -1 \text{, esto es : } \left(\frac{3}{k}\right)\left(-\frac{7}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 21/4$$

Luego, en $\mathscr{L}$ se tiene : $3x - \frac{21}{4}y - 7 = 0 \Leftrightarrow 12x - 21y - 28 = 0$ ■

7 Determinar el valor del parámetro c para que la recta de la familia $cx + 3y - 9 = 0$ que le corresponda, determine sobre el eje X un segmento igual a - 4. Hallar la ecuación de la recta.

Solución. Sea la familia $\mathscr{L}: cx + 3y - 9 = 0$

Si $P(-4, 0) \in \mathscr{L} \Rightarrow c(-4) + 3(0) - 9 = 0$, de donde se tiene : $c = -9/4$

Sustituyendo en $\mathscr{L}$ obtenemos : $-\frac{9}{4}x + 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 12 = 0$ ■

8 Determinar el valor del parámetro k correspondiente a la recta de la familia $5x - 12y + k = 0$ cuya distancia del origen es igual a 5. Teniendo el parámetro, hállese la ecuación de la recta. (Dos soluciones)

Solución. Sea la familia de rectas $\mathscr{L}: 5x - 12y + k = 0$

$$\text{Si } d(0, \mathscr{L}) = 5 \Rightarrow \frac{|k|}{\sqrt{25+144}} = 5 \Rightarrow |k| = 65 \Leftrightarrow k = 65 \text{ ó } k = -65$$

Luego, en $\mathscr{L}$ se tiene dos soluciones : $5x - 12y + 65 = 0$ ó $5x - 12y - 65 = 0$ ■

9 La ecuación de una familia rectas es $2x + 3y + k = 0$. El producto de los segmentos que una recta de la familia determina sobre los ejes coordenados es 24. Hállese la ecuación de la recta . (Dos soluciones.)

Solución. Sea la familia de rectas $\mathscr{L}: 2x + 3y + k = 0$, cuya intersección con los ejes coordenados es $a = -k/2$ y $b = -k/3$

Si $a \cdot b = 24 \Rightarrow (-k/2)(-k/3) = 24 \Leftrightarrow k = 12$ ó $k = -12$

Sustituyendo en $\mathscr{L}$, se obtiene los dos miembros de la familia

$$\mathscr{L}_1 : 2x + 3y + 12 = 0 \text{ ó } \mathscr{L}_2 : 2x + 3y - 12 = 0.$$ ■

10 Usando el método del parámetro, hallar la ecuación de la recta que pasa por A(2 , -3) y es paralela a la recta $\mathscr{L}_1 : 5x - y + 11 = 0$

Solución. La ecuación que representa al haz de rectas paralelas a $\mathscr{L}_1$ es

$$\mathscr{L}: 5x - y + k = 0 \qquad (1)$$

Si $A(2 , -3) \in \mathscr{L} \Rightarrow 5(2) - (-3) + k = 0 \Leftrightarrow k = -13$

Sustituyendo en (1) se tiene la recta buscada. $\mathscr{L}: 5x - y - 13 = 0$ ■

11 Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2 , -1) y es perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1 : 7x - 9y + 8 = 0$

Solución. La ecuación de la familia de rectas perpendiculares a $\mathscr{L}_1$ es

$$\mathscr{L}: 9x + 7y + k = 0 \qquad (1)$$

Si $A(2 , -1) \in \mathscr{L} \Rightarrow 9(2) + 7(-1) + k = 0 \Leftrightarrow k = -11$

Reemplazando en (1) se tiene la recta pedida , $\mathscr{L}: 9x + 7y - 11 = 0$ ■

12 La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 3. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta sabiendo que contiene al punto A(2 , 10).

Solución. Haciendo uso de la forma simétrica, la ecuación de la familia de rectas

queda representada por $\mathscr{L}: \dfrac{x}{k} + \dfrac{y}{3 - k} = 1 \qquad (1)$

Si $A(2 , 10) \in \mathscr{L} \Rightarrow \dfrac{2}{k} + \dfrac{10}{3 - k} = 1 \Rightarrow k^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -2$ ó $k_2 = -3$

Reemplazando en (1) obtenemos las ecuaciones de los dos miembros de la familia :

$$\mathscr{L}_1 : 5x - 2y + 10 = 0 \text{ ó } \mathscr{L}_2 : 2x - y + 6 = 0$$ ■

13 La diferencia de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 1. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(6 , -4).

Solución. La ecuación de la familia es $\mathscr{L}: \dfrac{x}{k} + \dfrac{y}{k + 1} = 1 \qquad (1)$

Si $A(6 , -4) \in \mathscr{L} \Rightarrow \dfrac{6}{k} + \dfrac{-4}{k + 1} = 1 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 3$ ó $k_2 = -2$

Sustituyendo en (1) obtenemos las ecuaciones de los dos miembros de la familia

$$\mathscr{L}_1 : 4x + 3y - 12 = 0 \text{ ó } \mathscr{L}_2 : x + 2y + 2 = 0$$ ■

14 El producto de los segmentos que una recta determina entre los ejes coordenados es igual a - 6. Por el método del parámetro hallar la ecuación de la recta si su pendiente es igual a 3.

Solución. Si en la forma simétrica de la ecuación de la recta hacemos $a = k$ y $b = -6/k$, entonces la ecuación de la familia de rectas es

$$\frac{x}{k} - \frac{ky}{6} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{L}: 6x - k^2y - 6k = 0 \qquad (1)$$

De todas las rectas de la familia (1) queremos la recta de pendiente $m = 3$, esto es, si

$$\frac{6}{k^2} = 3 \Rightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k_1 = \sqrt{2} \text{ ó } k_2 = -\sqrt{2}$$

Sustituyendo en (1), hay dos rectas que cumplen con las condiciones especificadas en el problema. $\mathscr{L}_1: 3x - y - 3\sqrt{2} = 0$ ó $\mathscr{L}_2: 3x - y + 3\sqrt{2} = 0$ ■

15 Una recta pasa por el punto A(-6 , 7) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $10.5u^2$. Hallar su ecuación.

Solución. Sabemos que en su forma simétrica, a y b son los interceptos de una recta con los ejes coordenados y que el área del triángulo que forma con tales ejes es

$$S = \frac{1}{2}|ab| \Rightarrow \frac{21}{2} = \frac{1}{2}|ab| \Leftrightarrow ab = \pm 21$$

En la Figura 3.32 se observa que a y b son del mismo signo, entonces :

$$ab = 21 \Rightarrow b = 21/a$$

Luego, la ecuación de la familia es

$$\mathscr{L}: \frac{x}{a} + \frac{ay}{21} = 1 \qquad (1)$$

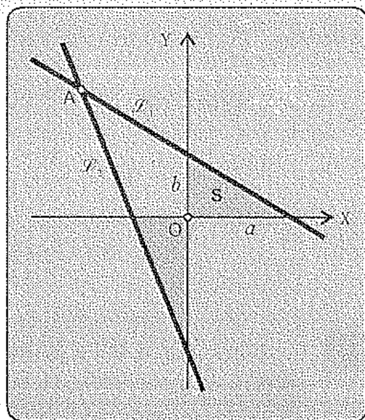


FIGURA 3.32

Si $A(-6,7) \in \mathscr{L} \Rightarrow -\frac{6}{a} + \frac{7a}{21} = 1 \Rightarrow a^2 - 3a - 18 = 0$

$$\Leftrightarrow a_1 = 6 \text{ ó } a_2 = -3$$

Sustituyendo en (1) se tiene dos soluciones :

$$\mathscr{L}_1: 7x + 12y - 42 = 0 \text{ ó } \mathscr{L}_2: 7x + 3y + 21 = 0$$ ■

16 Una recta pasa por el punto A(2 , 4/3) y forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro igual a 12. Hallar su ecuación.

Solución. Sea la ecuación de la recta $\mathscr{L}: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Si $A(2, 4/3) \in \mathscr{L} \Rightarrow \dfrac{2}{a} + \dfrac{4}{3b} = 1$

$$\Leftrightarrow 4a + 6b = 3ab \qquad (1)$$

Dado que $a + b + c = 12 \Rightarrow a + b = 12 - c \qquad (2)$

Elevando ambos miembros de (2) al cuadrado se tiene:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 144 - 24c + c^2$$

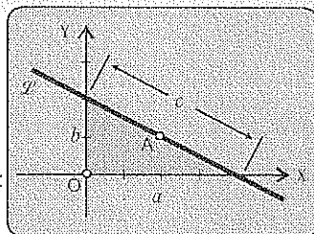


FIGURA 3.33

Por el teorema de Pitágoras : $a^2 + b^2 = c^2$

$$\Rightarrow 2ab = 144 - 24c \Leftrightarrow ab = 12(6 - c) \qquad (3)$$

Sustituimos (3) en (1) : $4a + 6b = 36(6 - c) \Rightarrow 2a + 3b = 18(6 - c)$

o bien : $2(a + b) + b = 18(6 - c) \Rightarrow 2(12 - c) + b = 18(6 - c) \Leftrightarrow b = 4(21 - 4c) \quad (4)$

Reemplazamos (4) en (2) : $a + 4(21 - 4c) = 12 - c \Leftrightarrow a = 3(5c - 24) \quad (5)$

Ahora sustituimos (4) y (5) en (3) : $12(21 - 4c)(5c - 24) = 12(6 - c)$

de donde obtenemos la ecuación : $10c^2 - 101c + 255 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 5 \vee c_2 = 51/10$

Luego, sustituyendo en (4) y (5) se tiene : $a_1 = 3 \vee a_2 = 9/2$

$$b_1 = 4 \vee b_2 = 12/5$$

Por tanto, en $\mathscr{L}$, resultan dos soluciones

$$\mathscr{L}_1 : 4x + 3y - 12 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 8x + 15y - 36 = 0$$ ■

17 La distancia de una recta al origen es 3. La recta pasa por el punto $A(3\sqrt{5}, -3)$. Hallar su ecuación.

Solución. La ecuación de la recta, de pendiente m, que pasa por A es :

$$y + 3 = m(x - 3\sqrt{5}) \Leftrightarrow \mathscr{L} : mx - y - (3\sqrt{5}\,m + 3) = 0 \qquad (1)$$

Si $d(0, \mathscr{L}) = 3 \Rightarrow \dfrac{|3\sqrt{5}\,m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \Rightarrow |m\sqrt{5} + 1| = \sqrt{m^2 + 1}$

Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene :

$$2m^2 + m\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0 \vee m_2 = -\sqrt{5}/2$$

Luego, en (1), obtenemos dos soluciones , $\mathscr{L}_1 : y + 3 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x\sqrt{5} + 2y - 9 = 0$ ■

18 La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 10. Hallar la ecuación de la recta si forma con los ejes coordenados un triángulo de área 12 u^2.

Solución. Si $a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a$, luego la familia rectas tiene por ecuación

$$\mathscr{L}: \frac{x}{a} + \frac{y}{10-a} = 1$$

Además : $\frac{1}{2}|a(10-a)| = 12 \Rightarrow a^2 - 10a + 24 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 4 \vee a_2 = 6$

Luego, en $\mathscr{L}$, obtenemos dos soluciones.

$$\mathscr{L}_1 : 3x + 2y - 12 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 2x + 3y - 12 = 0$$ ■

19 Una recta pasa por el origen y por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : 3x + 2y - 14 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x - 3y - 1 = 0$. Hallar su ecuación sin determinar el punto de intersección.

Solución. La familia de rectas que pasa por $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ es

$$\mathscr{L}: 3x + 2y - 14 + k(x - 3y - 1) = 0 \qquad (1)$$

Si $(0\,;0) \in \mathscr{L} \Rightarrow 3(0) + 2(0) - 14 + k(0 - 0 - 1) = 0 \Leftrightarrow k = -14$

Sustituyendo este valor en (1), tenemos, la ecuación de la recta buscada

$$3x + 2y - 14 - 14(x - 3y - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}: x - 4y = 0$$ ■

20 Una recta pasa por el punto A(-2 ; 3) y por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : x + 5y + 2 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 3x + 4y - 5 = 0$. Hallar su ecuación sin determinar el punto de intersección.

Solución. Sea el haz de rectas $\mathscr{L}: x + 5y + 2 + k(3x + 4y - 5) = 0$ (1)

$$\text{Si } A(-2\,;3) \in \mathscr{L} \Rightarrow -2 + 15 + 2 + k(-6 + 20 - 5) = 0 \Leftrightarrow k = -15$$

Luego, en (1), se tiene : $x + 5y + 2 - 15(3x + 4y - 5) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}: 4x + 5y - 7 = 0$ ■

21 Una recta pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones $\mathscr{L}_1: 3x + 2y + 8 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 2x - 9y - 5 = 0$. Hallar su ecuación sabiendo que es paralela a la recta $\mathscr{L}_3 : 6x - 2y + 11 = 0$

Solución. Sea la ecuación de la familia de rectas

$$\mathscr{L}: 3x + 2y + 8 + k(2x - 9y - 5) = 0 \Leftrightarrow (3x + 2k)x + (2 - 9k)y + 8 - 5k = 0$$

Si un miembro de esta familia es paralela a $\mathscr{L}_3$, entonces $m = m_3$, esto es

$$-\frac{3+2k}{2-9k} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow k = 9/25$$

Luego, en $\mathscr{L}$ se tiene : $3x+2y+8+\frac{9}{25}(2x-9y-5) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x-y+5 = 0$ ■

22 Una recta pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones $\mathscr{L}_1 : 7x-2y=0$ y $\mathscr{L}_2 : 4x-y-1=0$ y es perpendicular a la recta $\mathscr{L}_3 : 3x+8y-19=0$. Hallar su ecuación.

Solución. Sea la ecuación de la familia de rectas

$$\mathscr{L}: 7x-2y+k(4x-y-1) = 0 \Leftrightarrow (7+4k)x-(2+k)y-k = 0$$

Si un miembro de $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_3 \Rightarrow m \cdot m_3 = -1$, esto es :

$$\left(\frac{7+4k}{2+k}\right)\left(-\frac{3}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow k = -5/4$$

Luego, en $\mathscr{L}$, se obtiene, la recta buscada. $\mathscr{L}: 8x-3y+5 = 0$ ■

23 Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : 3x+y-9=0$ y $\mathscr{L}_2 : 4x-3y+1=0$, y cuya distancia del origen es 2.

Solución. Sea la ecuación de la familia de rectas

$$\mathscr{L}: 3x+y-9+k(4x-3y+1) = 0 \Leftrightarrow (3+4k)x+(1-3k)y+k-9 = 0 \quad (1)$$

Si $d(0, \mathscr{L}) = 2 \Rightarrow \dfrac{|k-9|}{\sqrt{(3+4k)^2+(1-3k)^2}} = 2$

Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos la ecuación

$$99k^2+90k-41=0 \Rightarrow (3k-1)(33k+41) = 0 \Leftrightarrow k = 1/3 \vee k = -41/33$$

Sustituyendo cada uno de estos valores de k en $\mathscr{L}$ obtenemos las soluciones

$$\mathscr{L}: x-2 = 0 \vee \mathscr{L}: 5x-12y+26 = 0$$ ■

24 Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : 3x-4y = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 2x-5y+7 = 0$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área $8u^2$.

Solución. Sea la ecuación de la familia de rectas

$$\mathscr{L}: 3x-4y+k(2x-5y+7) = 0 \Leftrightarrow (3+2k)x-(4+5k)y+7k = 0$$

Las intersecciones de esta recta con los ejes coordenados son

$$a = -\frac{7k}{3+2k} \text{ y } b = \frac{7k}{4+5k}\ ;\ \text{si } S = \frac{1}{2}|ab| \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}\left(-\frac{7k}{3+2k}\right)\left(\frac{7k}{4+5k}\right)$$

de donde obtenemos : $111k^2 + 368k + 192 = 0 \Leftrightarrow k = -8/3 \vee k = -24/37$

Sustituyendo en $\mathscr{L}$ cada uno de estos valores de k se tienen las soluciones

$$\mathscr{L}: x - 4y + 8 = 0 \ \vee\ \mathscr{L}: 9x - 8y - 24 = 0$$ ■

25 Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : 2x - 3y - 5 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x + 2y - 13 = 0$ y el segmento que determina sobre el eje X es igual al doble de su pendiente. Hallar la ecuación de dicha recta.

Solución. Sea la ecuación de la familia de rectas

$$\mathscr{L}: 2x - 3y - 5 + k(x + 2y - 13) = 0 \Leftrightarrow (2 + k)x - (3 - 2k)y - (5 + 13k) = 0$$

Luego, $m = \frac{2+k}{3-2k}$, y si $y = 0 \Rightarrow x = a = \frac{5+13k}{2+k}$

Según el problema : $m = 2a \Rightarrow \frac{2+k}{5-2k} = 2\left(\frac{5+13k}{2+k}\right)$

de donde se tiene la ecuación : $4k^2 - 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \vee k = -1/4$

Sustituyendo en $\mathscr{L}$ cada uno de estos valores de k, obtenemos las soluciones

$$\mathscr{L}: 3x - y - 18 = 0 \ \vee\ \mathscr{L}: x - 2y - 1 = 0$$ ■

EJERCICIOS . *Grupo 14*

1 Hallar, por tres métodos diferentes , el área del triángulo cuyos vértices son A(-1 , 1) , B(3 , 4) y C(5 , -1).

Solución. a) Por el método de determinantes

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

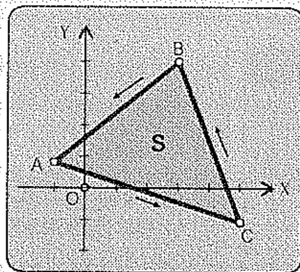


FIGURA 3.34

Desarrollando por los elementos de la primera fila se tiene :

$$S = \frac{1}{2}\left| -1(-1-4) - 1(5-3) + 1(20+3) \right| = 13 \text{ u}^2$$

b) Por la fórmula ; $S = \frac{1}{2}(|\overline{AC}|) \times h$ (1)

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{10}$$

Ecuación del lado $\overline{AC}$: $y - 1 = \left(\frac{-1-1}{5+1}\right)(x+1) \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AC} : x + 3y - 2 = 0$

Entonces : $h = d(B, \overleftrightarrow{AC}) = \frac{|3 + 3(4) - 2|}{\sqrt{1+9}} = \frac{13}{\sqrt{10}}$

Luego, en (1) : $S = \frac{1}{2}(2\sqrt{10})\left(\frac{13}{\sqrt{10}}\right) = 13\ u^2$

c) Por el método del semiperímetro :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Se deja a cargo del lector. ■

2 Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo del Ejercicio 1.

Solución. Las ecuaciones de los lados del triángulo por el método de los dos puntos son

$$\overleftrightarrow{AC} : x + 3y - 2 = 0\ ,\ \overleftrightarrow{AB} : 3x - 4y + 7 = 0\ ,\ \overleftrightarrow{BC} : 5x + 2y - 23 = 0$$

Las distancias dirigidas del incentro $I(x, y)$ a cada uno de estos lados son

$$d(I, \overleftrightarrow{AC}) = -d(I ; \overleftrightarrow{AB}) \Rightarrow \frac{x + 3y - 2}{\sqrt{1+9}} = -\frac{3x - 4y + 7}{-\sqrt{9+16}}$$

de donde obtenemos la ecuación de la bisectriz del ángulo A

$$\mathscr{A} : (3\sqrt{10} - 5)x - (4\sqrt{10} + 15)y + 10 + 7\sqrt{10} = 0 \qquad (1)$$

$$-d(I, \overleftrightarrow{AB}) = -d(I, \overleftrightarrow{BC}) \Rightarrow -\frac{3x - 4y + 7}{-\sqrt{9+16}} = -\frac{5x + 2y - 23}{\sqrt{25+4}}$$

de donde resulta la ecuación de la bisectriz del ángulo B.

$$\mathscr{B} : (3\sqrt{29} + 25)x + (10 - 4\sqrt{29})y + 7\sqrt{29} - 115 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) , por el método de determinantes, encontramos que :

$$x = \frac{25 + 6\sqrt{10} - \sqrt{29}}{5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{29}} = 2.31\ ,\ y = \frac{-5 + 8\sqrt{10} + \sqrt{29}}{5 + 2\sqrt{10} + \sqrt{29}} = 1.53$$

$$\therefore I(2.31, 1.53)$$ ■

3 Hallar la ecuación de la recta de Euler para el triángulo del Ejercicio 1.

Solución. Datos del triángulo : A(-1 , 1) , B(3 , 4) , C(5 , -1)

La recta de Euler es aquella que pasa por la intersección de las medianas (baricentro), mediatrices (circuncentro) y las alturas (ortocentro), de un triángulo. Bastará hallar las coordenadas del baricentro y del circuncentro.

Coordenadas del baricentro : $G\left(\frac{-1+3+5}{3}, \frac{1+4-1}{3}\right) \Leftrightarrow G(7/3, 4/3)$

Para determinar el circuncentro P, hallaremos las ecuaciones de las mediatrices correspondientes a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, por el método de las distancias.

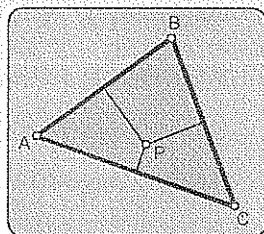


FIGURA 3.35

$|\overline{AP}| = |\overline{BP}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$

$\Rightarrow \mathscr{L}_1 : 8x + 6y - 23 = 0$

$|\overline{AP}| = |\overline{CP}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}$

$\Rightarrow \mathscr{L}_2 : 3x - y - 6 = 0$

Luego, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P(59/26, 21/26)$

Pendiente de $\overline{GP}$: $m = \frac{21/26 - 4/3}{59/26 - 7/3} = \frac{41}{5}$

Ecuación de la recta de Euler : $y - \frac{4}{3} = \frac{41}{5}\left(x - \frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 41x - 5y - 89 = 0$ ■

4 Demostrar que las medianas del triángulo del Ejercicio 1 lo dividen en seis triángulos de igual área.

La demostración se deja a cargo del lector. (Sugerencia : Hállese el baricentro y las coordenadas de los puntos medios del triángulo, luego calcúlese, por el método de determinantes, el área de cada uno de los seis triángulos resultantes.)

5 Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas $\mathscr{L}_1 : 2x + 3y + 1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 3x - 5y + 11 = 0$, y también pasa por la intersección de las rectas $\mathscr{L}_3 : x - 3y + 7 = 0$, $\mathscr{L}_4 : 4x + y - 11 = 0$. Hállese la ecuación de la recta sin determinar los puntos de intersección.

Solución. La familia de rectas que pasan por $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ es

$$\mathscr{L}: 2x + 3y + 1 + k(3x - 5y + 11) = 0 \Leftrightarrow (2 + 3k)x + (3 - 5k)y + (1 + 11k) = 0 \quad (1)$$

La familia de rectas que pasan por $\mathscr{L}_3 \cap \mathscr{L}_4$ es

$$\mathscr{L}: x - 3y + 7 + h(4x + y - 11) = 0 \Leftrightarrow (1 + h)x + (h - 3)y + (7 - 11h) = 0 \quad (2)$$

Como (1) y (2) representan la misma recta para un determinado valor de k y h

$$\Rightarrow \frac{2+3k}{1+4h} = \frac{3-5k}{h-3} = \frac{1+11k}{7-11h} = r \iff \begin{cases} 2+3k = r(1+4h) & (3) \\ 3-5k = r(h-3) & (4) \\ 1+11k = r(7-11h) & (5) \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones (3) , (4) y (5) obtenemos : k = -7 y h = 1/9

Sustituyendo k en (1) y h en (2), resulta la misma solución $\mathscr{L}: x - 2y + 4 = 0$

Compruébese el resultado hallando los puntos de intersección. ■

6 Demostrar, analíticamente, que las bisectrices de los dos ángulos suplementarios formados por dos rectas cualesquiera que se cortan, son perpendiculares entre sí.

Demostración. Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 : y = m_1x + b_1 \Rightarrow m_1x - y + b_1 = 0$$

$$\mathscr{L}_2 : y = m_2x + b_2 \Rightarrow m_2x - y + b_1 = 0$$

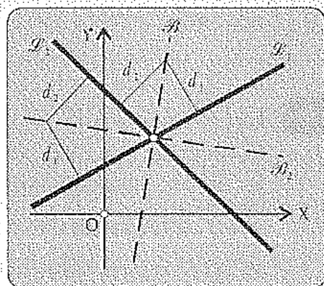


FIGURA 3.36

Para un punto cualquiera de la bisectriz $\mathscr{B}_1$ se tiene :

$$d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{m_1x - y + b_1}{r_1} = \frac{m_2x - y + b_2}{r_2}$$

$$\Rightarrow \mathscr{B}_1 : (m_1r_2 - m_2r_1)x - (r_2 - r_1)y + (b_1r_2 - b_2r_1) = 0$$

cuya pendiente es : $m' = \dfrac{m_1r_2 - m_2r_1}{r_2 - r_1}$

Para la bisectriz $\mathscr{B}_2 : d_1 = -d_2 \Rightarrow \dfrac{m_1x - y + b_1}{r_1} = -\dfrac{m_2x - y + b_2}{r_2}$

$$\Rightarrow \mathscr{B}_2 : (m_1r_2 + m_2r_1)x - (r_1 + r_2)y + (b_1r_2 + b_2r_1) = 0$$

cuya pendiente es : $m'' = \dfrac{m_1r_2 + m_2r_1}{r_2 + r_1}$

Luego : $m' \cdot m'' = \dfrac{m_1^2r_2^2 - m_2^2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \dfrac{m_1^2(m_2^2+1) - m_2^2(m_1^2+1)}{(m_2^2+1) - (m_1^2+1)}$

$$= \frac{-(m_2^2 - m_1^2)}{m_2^2 - m_1^2} = -1 \Rightarrow \mathscr{B}_1 \perp \mathscr{B}_2$$ ■

8 La base de un triángulo tiene una posición fija, y su longitud es constante e igual a *a*. La diferencia de los cuadrados de las longitudes de los otros dos

lados es constante e igual a b^2. Demuéstrese que el lugar geométrico del vértice es una línea recta.

Demostración. 1. Sea B(x , y) un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica.

a) $|\overline{OB}|^2 - |\overline{AB}|^2 = b^2$

b) $|\overline{AB}|^2 - |\overline{OB}|^2 = b^2$

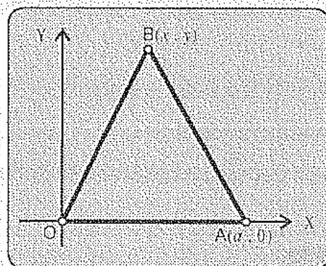


FIGURA 3.37

2. Expresión analítica de cada caso

a) $(\sqrt{x^2+y^2})^2 - (\sqrt{(x-a)^2+y^2})^2 = b^2$

b) $(\sqrt{(x-a)^2+y^2})^2 - (\sqrt{x^2+y^2})^2 = b^2$

3. Efectuando obtenemos : a) $2ax = a^2+b^2$

b) $2ax = a^2-b^2$

En ambos casos, el lugar geométrico es una recta vertical. ■

9 Las ecuaciones de tres rectas son $\mathscr{L}_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\mathscr{L}_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ y $\mathscr{L}_3 : A_3x + B_2y + C_3 = 0$. Si existen tres constantes, diferentes de cero , k_1 , k_2 y k_3 , tales que la ecuación

$$k_1(A_1x+B_1y+C_1)+k_2(A_2x+B_2y+C_2)+k_3(A_3x+B_3y+C_3)=0$$

se verifica para todos los valores de x e y, demuéstrese que las tres rectas son concurrentes.

Demostración. Supóngase que el punto $P_1(x_1 , y_1)$ pertenece a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, entonces , $\mathscr{L}_1 : A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0$

De modo que en la familia de rectas dada

$$k_1(0) + k_2(0) + k_3(A_3x + B_3y + C_3) = 0$$

Como esta ecuación se verifica todas los valores de x e y, entonces , se verificará para $x = x_1$ e $y = y_1$, esto es

$$k_3(A_3x_1 + B_3y_1 + C_3) = 0 \text{ , y dado que } k_3 \neq 0 \Rightarrow A_3x_1 + B_3y_1 + C_3 = 0$$

Lo que demuestra que $\mathscr{L}_3$ pasa por el punto $P_1(x_1 , y_1)$, que es el punto de intersección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

Por tanto, las tres rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ son concurrentes. ■

10 Sin Hallar el punto de intersección, demostrar que las tres rectas $\mathscr{L}_1 : 3x + 4y + 14 = 0$, $\mathscr{L}_2 : 2x - y - 9 = 0$ y $\mathscr{L}_3 : 7x + 3y + 1 = 0$ son concurrentes.

Demostración. Bastará probar que el determinante de los términos constantes de las rectas dadas es igual a cero. En efecto

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 14 \\ 2 & -1 & -9 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 14\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1 + 27) - 4(2 + 63) + 14(6 + 7)$$

$$= 78 - 260 + 182 = 0$$

Por lo tanto, las tres rectas dadas son concurrentes. ■

11 Demostrar, por dos métodos diferentes, que los puntos A(1 , 2) y B(4 , -3) están de lados opuestos de la recta $\mathscr{L}: 2x + 5y - 10 = 0$.

Demostración. a) Por el método de las distancias dirigidas

$$d(\mathrm{A}, \mathscr{L}) = \frac{2(1) + 5(2) - 10}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{2}{\sqrt{29}} > 0 \Rightarrow \text{A está encima de } \mathscr{L}$$

$$d(\mathrm{B}, \mathscr{L}) = \frac{2(4) + 5(-3) - 10}{\sqrt{4 + 25}} = -\frac{17}{\sqrt{29}} < 0 \Rightarrow \text{B está debajo de } \mathscr{L}.$$

Por tanto, A y B están de lados opuestos de $\mathscr{L}$.

b) Por el método de comparación de ordenadas.

Si $\mathscr{L}: y = 2 - \frac{2}{5}x$, para $x = 1 \Rightarrow y = 8/5 < y_A \Rightarrow$ A está arriba de la recta $\mathscr{L}$

para $x = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{5} > y_B \Rightarrow$ B está debajo de la recta $\mathscr{L}$

Por tanto, A y B están de lados opuestos de $\mathscr{L}$. ■

12 Determinar el valor de la constante b para que las tres rectas $\mathscr{L}_1 : 8x + 3y - 1 = 0$, $\mathscr{L}_2 : 3x + by - 3 = 0$ y $\mathscr{L}_3 : x - 5y + 16 = 0$ sean concurrentes.

Solución. El determinante de los términos constantes debe ser cero

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 3 & b & -3 \\ 1 & -5 & 16 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} b & -3 \\ -5 & 16 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & b \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 8(16b - 15) - 3(48 + 3) - (-15 - b)$$

$$= 129b - 258$$

Luego , si $\Delta = 0 \Rightarrow 129b - 258 = 0 \Leftrightarrow b = 2$. ■

14 Las ecuaciones de los lados de un triángulo son

$$\mathscr{L}_1 : y = ax - bc/2 \ , \ \mathscr{L}_2 : y = bx - ac/2 \ , \ \mathscr{L}_3 : y = cx - ab/2$$

Demostrar que el área del triángulo está dado por : $\frac{1}{8}\,|(a-b)(b-c)(c-a)|$

Demostración. Intersectando las rectas dos a dos obtenemos :

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \mathrm{A}\left[-\frac{c}{2}\ ,\ -\frac{c}{2}(a+b)\right]$$

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 = \mathrm{B}\left[-\frac{b}{2}\ ,\ -\frac{b}{2}(a+c)\right]$$

$$\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = \mathrm{C}\left[-\frac{a}{2}\ ,\ -\frac{a}{2}(b+c)\right]$$

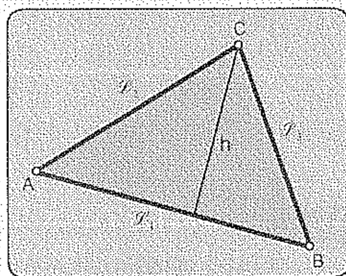


FIGURA 3.38

$$|\overline{\mathrm{AB}}| = \sqrt{\left(-\frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 + \left[-\frac{b}{2}(a+c) + \frac{c}{2}(a+b)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(b-c)^2 + a^2(b-c)^2} = \frac{1}{2}\,|b-c|\,\sqrt{1+a^2}$$

$$\text{Si } \mathscr{L}_1 : 2ax - 2y - bc = 0 \Rightarrow \mathrm{h} = d(\mathrm{C}, \mathscr{L}_1) = \frac{|2a(-a/2) + a(b+c) - bc|}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$$= \frac{|-a^2 + ab + ac - bc|}{2\sqrt{a^2+1}} = \frac{|(a-b)(c-a)|}{2\sqrt{a^2+1}}$$

$$\therefore\ a(\Delta\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2}\,|\mathrm{AB}|\,\mathrm{h} = \frac{1}{8}\,|(a-b)(b-c)(c-a)|$$ ■

15 Demostrar que la recta $\mathscr{L} : 4x + 3y - 40 = 0$ es tangente al círculo cuyo radio es 5 y cuyo centro es el punto C(3 , 1). Hallar las coordenadas del punto de tangencia.

Solución. Bastará probar que la $d(\mathrm{C}, \mathscr{L}) = \mathrm{r}$

En efecto :

$$d(\mathrm{C}, \mathscr{L}) = \frac{|4(3) + 3(1) - 40|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|15-40|}{5} = 5 = \mathrm{r}$$

La ecuación de la recta que contiene al radio y perpendicular a $\mathscr{L}$ es : $y - 1 = \frac{3}{4}(x-3) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 3x - 4y - 5 = 0$

$$\therefore\ \mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1 = \mathrm{T}(7, 4)$$ ■

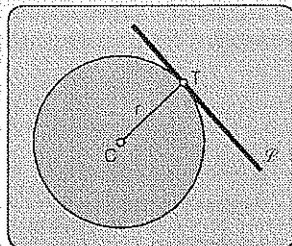


FIGURA 3.39

16 Un círculo tiene su centro en el punto C(-2 , -4). Sabiendo que es tangente a la recta $\mathscr{L}: x + y + 12 = 0$, calcular el área del círculo.

Solución. Radio del círculo : $r = d(C, \mathscr{L}) = \dfrac{|-2-4+12|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$

Area del círculo : $S = \pi r^2 = \pi(3\sqrt{2})^2 = 18\pi u^2$ ■

17 Deducir una fórmula para la distancia entre dos rectas paralelas
$\mathscr{L}_1 : Ax + By + C_1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : Ax + By + C_2 = 0$, $C_1 \neq C_2$

Solución. De la forma normal de la ecuación de una recta se sabe que :

$$p_1 = \overline{OP} = d(0, \mathscr{L}_1) = \frac{C_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$p_2 = \overline{OT} = d(0, \mathscr{L}_2) = \frac{C_2}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

y dado que :

$$d = d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = |\overline{OP} - \overline{OT}| = |p_1 - p_2|$$

$$\Rightarrow d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ ■

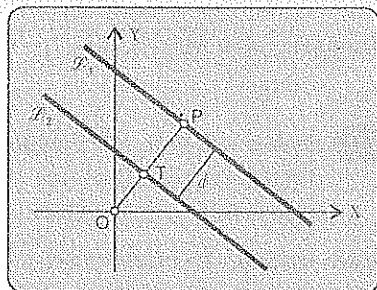


FIGURA 3.40

18 Determinar los valores de k_1 y k_2 para que k las dos ecuaciones $\mathscr{L}_1 : k_1x - 7y + 18 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 8x - k_2y + 9k_1 = 0$ representen la misma recta.

Solución. Si d_1 y $\mathscr{L}_2$ son rectas coincidentes $\Rightarrow \dfrac{k_1}{8} = \dfrac{-7}{-k_2} = \dfrac{18}{9k_1}$

de donde obtenemos : $k_1 = \pm 4$ y $k_2 = \pm 14$ ■

19 Consideremos el ángulo comprendido entre dos rectas, de manera que α sea el ángulo formado por la recta dirigida $\mathscr{L}$ y la parte positiva del eje X y β el ángulo que forma $\mathscr{L}$ con la parte positiva del eje Y. Entonces α y β se llaman *ángulos directores* de $\mathscr{L}$, y Cos α y Cos β se llaman *cósenos directores*. Demostrar que $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta = 1$

Demostración. Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2) \in \mathscr{L}$, y la distancia d entre dichos puntos.

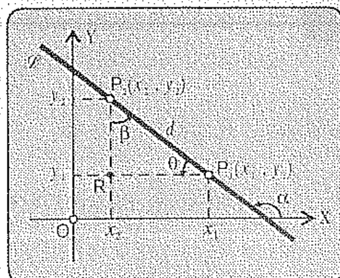


FIGURA 3.41

En el ΔP_1RP_2 : $\text{Cos}\theta = \text{Cos}(\pi - \alpha) = \dfrac{\overline{RP_1}}{d} = \dfrac{x_1 - x_2}{d}$

$$\Rightarrow \text{Cos}\,\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d} \qquad (1)$$

$$\text{Cos}\beta = \frac{\overline{RP_2}}{d} \Rightarrow \text{Cos}\beta = \frac{y_2 - y_1}{d} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene : $\text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta = \dfrac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{d^2}$

Dado que , $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow \text{Cos}^2\alpha + \text{Cos}^2\beta = 1$ ■

20 Sean α_1 , β_1 y α_2 , β_2 , respectivamente, los ángulos directores de las rectas dirigidas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Entonces, si θ es el ángulo formado por $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, demuéstrese que : $\text{Cos}\theta = \text{Cos}\,\alpha_1 \,\text{Cos}\,\alpha_2 + \text{Cos}\,\beta_1 \,\text{Cos}\,\beta_2$.

Demostración. En efecto , en el ΔAPB

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta \Rightarrow \theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Aplicando cósenos a ambos miembros se tiene

$$\text{Cos}\,\theta = \text{Cos}\,\alpha_2 \,\text{Cos}\,\alpha_1 + \text{Sen}\,\alpha_2 \,\text{Sen}\,\alpha_1 \qquad (1)$$

En la Figura 3.42 se observa claramente que α_1 y β_1 son complementarios $\Rightarrow \text{Sen}\alpha_1 = \text{Cos}\beta_1$ (2)

También, los ángulos $(\pi - \alpha_2)$ y β_2 son complementarios

$\Rightarrow \text{Sen}(\pi - \alpha_2) = \text{Cos}\,\beta_2 \Leftrightarrow \text{Sen}\,\alpha_2 = \text{Cos}\,\beta_2$ (3)

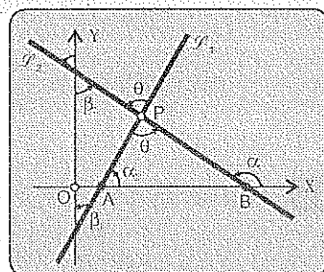


FIGURA 3.42

Sustituyendo (2) y (3) en (1) obtenemos finalmente que

$$\text{Cos}\,\theta = \text{Cos}\,\alpha_1 \,\text{Cos}\,\alpha_2 + \text{Cos}\,\beta_1 \,\text{Cos}\,\beta_2$$ ■

21 Sea $\mathscr{L}$ una recta no paralela a ninguno de los ejes coordenados, y sean α y β sus ángulos directores. Si $\mathscr{L}$ contiene al punto $P_1(x_1, y_1)$, demuéstrese que su ecuación puede escribirse de la forma

$$\mathscr{L} : \frac{x - x_1}{\text{Cos}\,\alpha} = \frac{y - y_1}{\text{Cos}\,\beta}$$

Demostración. En efecto, la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ es

$$y - y_1 = \frac{\text{Sen}\alpha}{\text{Cos}\alpha}(x - x_1) \Leftrightarrow \frac{x - x_1}{\text{Cos}\alpha} = \frac{y - y_1}{\text{Sen}\alpha} \qquad (1)$$

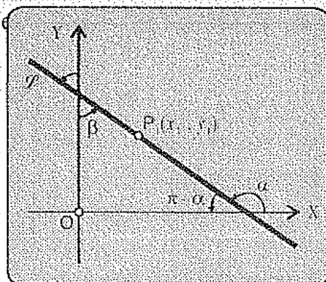


FIGURA 3.43

Dado que $(\pi - \alpha)$ y β son ángulos complementarios, entonces : $\text{Sen}(\pi - \alpha) = \text{Cos}\beta \Leftrightarrow \text{Sen}\,\alpha = \text{Cos}\,\beta$

Luego, sustituyendo en (1) obtenemos

$$\mathscr{L} : \frac{x - x_1}{\text{Cos}\,\alpha} = \frac{y - y_1}{\text{Cos}\,\beta}$$ ■

22 Si (x_1 , y_1) son las coordenadas de un punto que está arriba de la recta $\mathscr{L}$: $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, demuéstrese que

$$Ax_1 + By_1 + C > 0 \text{ , si } B > 0 \text{ y } Ax_1 + By_1 + C < 0 \text{ , si } B < 0$$

Demostración. Sea $P_1(x_1 , y_1)$ el punto arriba de la recta $\mathscr{L}$ y $P_2(x_1 , y_2)$ un punto sobre $\mathscr{L}$ de igual abscisa que P_1 . Esta claro que : $y_1 > y_2$ (1)

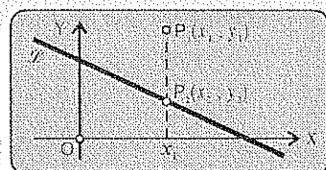


FIGURA 3.44

Como $P_2(x_1 , y_2) \in \mathscr{L} \Rightarrow Ax_1 + By_2 + C = 0$

$$\Rightarrow y_2 = -\frac{Ax_1 + C}{B}$$

Luego, en (1) , se tiene : $y_1 > -\dfrac{Ax_1 + C}{B}$

Si $B > 0 \Rightarrow By_1 > -Ax_1 - C \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + C > 0$

Si $B < 0 \Rightarrow By_1 < -Ax_1 - C \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + C < 0$ ■

23 Si (x_1 , y_1) son las coordenadas que está abajo de la recta $\mathscr{L}$: $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$; demuéstrese que las desigualdades del Ejercicio 22 se invierten.

Se deja al lector la tarea de demostrar el ejercicio.

24 Demostrar que el área del triángulo formado por el eje Y y las rectas $\mathscr{L}_1 : y = m_1x + b_1$ y $\mathscr{L}_2 : y = m_2x + b_2$ está dada por

$$\frac{1}{2}\,\frac{(b_2 - b_1)^2}{|m_2 - m_1|} \text{ , } m_1 \neq m_2$$

Demostración. En efecto, el área del ΔABC es

$$S = \frac{1}{2} |\overline{AC}| \times |\overline{HB}| \qquad (1)$$

Interceptando las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ con el eje Y obtenemos los puntos : $A(0\,;b_1)$ y $C(0\,;b_2)$

$$\Rightarrow |\overline{AC}| = |b_2 - b_1| \qquad (2)$$

La altura $\overline{HB}$ es la abscisa de $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, esto es , si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \qquad (3)$$

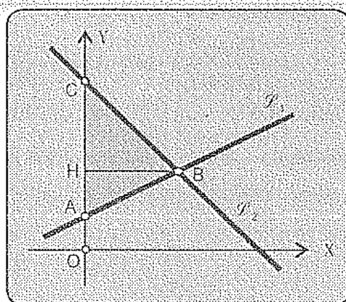


FIGURA 3.45

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene que : $S = \frac{1}{2}\frac{(b_2 - b_1)^2}{|m_2 - m_1|}$, $m_1 \neq m_2$ ■

25 Si m_1 , m_2 y m_3 son diferentes, demostrar que una condición necesaria y suficiente para que las tres rectas $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$ e $y = m_3x + b_3$ sean concurrentes es

$$m_1b_2 - m_2b_1 - m_3b_2 + m_3b_1 - m_1b_3 + m_2b_3 = 0$$

La demostración se deja para el lector. Sugerencia : El determinante de los términos constantes de las tres ecuaciones, debe ser igual a cero.

EJERCICIOS DE REPASO

(Del texto de : F. J. De la Borbolla)

1 En cierta recta que pasa por P(5 , 4) , $a + b = -3$, hallar la ecuación de la recta. (Dos soluciones.)

Solución. Si $a + b = -3$, implica que , $b = -(a + 3)$, entonces la ecuación de la recta

en su forma simétrica es $\mathscr{L}: \frac{x}{a} + \frac{y}{-(a+3)} = 1 \qquad (1)$

Como $P(5\,,4) \in \mathscr{L} \Rightarrow \frac{5}{a} - \frac{4}{a+3} = 1 \Rightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 3 \vee a_2 = -5$

Sustituyendo estos valores en (1) y reduciendo, obtenemos las dos soluciones

$$\mathscr{L}_1 : 2x - y - 6 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 2x - 5y + 10 = 0$$ ■

2 En una recta de pendiente m = - 4/5 , se tiene : $a^2+b^2=41$. Hallar la ecuación de dicha recta. (Dos soluciones.)

Solución. Sea la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{L}: bx + ay = ab$ (1)

Sabiendo que $m = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{5} \Rightarrow b = 4k$ y $a = 5k$

y dado que : $a^2+b^2=41 \Rightarrow 25k^2+16k^2=41 \Rightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$

Luego : $a = \pm 5$ y $b = \pm 4 \Rightarrow (a_1 = 5 \wedge b_1 = 4) \vee (a_2 = -5 \wedge b_2 = -4)$

Sustituyendo en (1) cada uno de estos valores obtenemos las soluciones

$$\mathscr{L}_1 : 4x + 5y - 20 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 4x + 5y + 20 = 0$$ ■

3 El punto P(8 , 9) divide al segmento de recta interceptado por los ejes coordenados según la razón $r = \overline{PA}/\overline{PB} = -3/2$. Hallar la ecuación de la recta.

Solución. Sea la recta en su forma simétrica , $\mathscr{L}: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (1)

cuyos interceptos con los ejes coordenados son A(a , 0) y B(0 , b)

$$\text{Si } \frac{PA}{PB} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_A - x_P}{x_B - x_P} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a-8}{0-8} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 20 \\ \frac{y_A - y_P}{y_B - y_P} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{0-9}{b-9} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 15 \end{cases}$$

Sustituyendo en (1) obtenemos la recta $\mathscr{L}: 3x + 4y - 60 = 0$ ■

4 Hallar el centro de gravedad del área del cuadrilátero cuyos vértices son A(-7 , 3) , B(18 , -17), C(5 , 15) y D(-10 , 15).

Solución. El baricentro de un cuadrilátero se halla en la intersección de las rectas que unen los baricentros de los triángulos que tienen como lado común una de las diagonales del cuadrilátero. Entonces se tiene :

Baricentro del $\Delta ADC = G_1(-4 , 11)$

Baricentro del $\Delta ABC = G_2(16/3 , 1/3)$

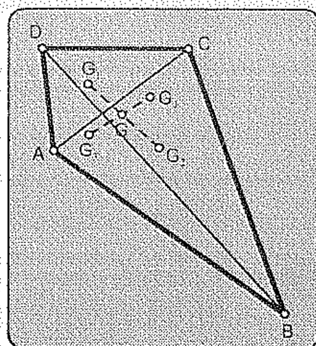


FIGURA 3.46

Baricentro del $\Delta ABD = G_3(1/3, 1/3)$

Baricentro del $\Delta BCD = G_4(13/3, 13/3)$

Ecuación de la recta que pasa por G_1 y G_2

$$y - 11 = \left(\frac{11 - 1/3}{-4 - 16/3}\right)(x+4) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 8x + 7y - 45 = 0$$

Recta que pasa por G_3 y G_4 : $y - 1/3 = \left(\frac{13/3 - 1/3}{13/3 - 1/3}\right)(x - 1/3) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : x - y = 0$

Por tanto, el centro de gravedad del cuadrilátero es : $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = G(3, 3)$ ■

5 Hallar el centro de gravedad del área de los cuadriláteros cuyos vértices son

a) A(-16 , 8) , B(-6 , 12) , C(8 , 2) , D(-12 , -6) *Sol.* G(-6 , 10/3)

b) A(10 , 2) , B(12 , 6) , C(4 , 8) , D(0 , 0) *Sol.* G(6 , 4)

c) A(-1 , 14) , B(7 , 8) , C(9 , -6) , D(1 , -10) *Sol.* G(11/3 , 4/3)

6 Un móvil parte de A(2 , 3) para llegar a B(10 , 9). Determinar P(x , 0) para que el recorrido sea mínimo. Valuar éste.

Solución. Por Geometría elemental sabemos que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta que los une.

Entonces construimos A'(2 , -3), simétrico de A, respecto del eje X. Luego :

$\Delta ACP = \Delta A'CP \Rightarrow \overline{AP} = \overline{A'P}$

$\Rightarrow \overline{A'B} = \overline{A'P} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB}$

Ecuación de $\overline{A'B}$:

$y - 9 = \left(\frac{9+3}{10-2}\right)(x - 10) \Leftrightarrow \overline{A'B} : 3x - 2y - 12 = 0$

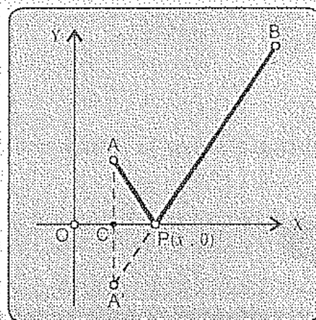


FIGURA 3.47

Si $y = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Por lo que : P(4 , 0)

Mínimo recorrido : $|\overline{A'B}| = \sqrt{(10-2)^2 + (9+3)^2} = 4\sqrt{13}$ ■

7 Un móvil parte de A(2 , 3) para ir a B(9 , 8) debiendo tocar P(0 , y) y Q(x , 0) sobre los ejes. Determinar P y Q para que el recorrido sea mínimo y valuar éste.

Solución. Construimos A'(-2 , 3) simétrico de A respecto del eje Y. Luego B'(9 , -8)

simétrico de B respecto del eje X. Como $\overline{AP} = \overline{A'P}$ y $\overline{QB} = \overline{QB'}$, entonces el mínimo recorrido será $\overline{A'B'}$.

Ecuación de $\overline{A'B'}$: $y - 3 = \left(\frac{3+8}{-2-9}\right)(x+2)$

$\Rightarrow \overline{A'B'} : x + y - 1 = 0$

Interceptando $\overline{A'B}$ con los ejes coordenados obtenemos Q(1 , 0) y P(0 , 1)

Mínimo recorrido :

$$|\overline{A'B'}| = \sqrt{(-2-9)^2 + (3+8)^2} = 11\sqrt{2}$$ ■

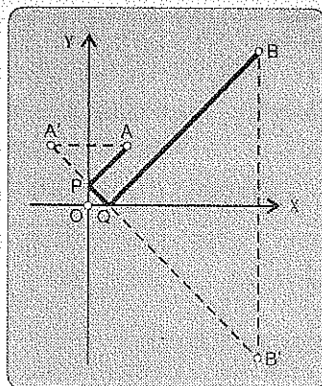


FIGURA 3.48

8 Tres bandas de una mesa de billar coinciden, respectivamente, con $\overline{OY}$, con el segmento $\overline{OQ} = 8$, sobre $\overline{OX}$, y con la recta $\overline{QR}$ ($x = 8$). Una de las bolas está en P(2 , 6) y debe chocar con otra bola en $P_1(4 , 15)$, tocando las barandas dichas en los puntos B , A , C, respectivamente. Determinar esos puntos.

Solución. Simétrico de P respecto de $\overline{OY} = P_2(-2 , 6)$

Simétrico de P_2 respecto de $\overline{OX} = P_3(-2 , -6)$

Simétrico de P_1 respecto de $\overline{QR} = P_4(12 , 15)$

Simétrico de P_4 respecto de $\overline{OX} = P_5(12 , -15)$

El camino recorrido por la bola de billar desde P hasta llegar a P_1 es : $\overline{PB} + \overline{BA} + (\overline{AC} + \overline{CP_1})$ (1)

Pero : $\overline{PB} = \overline{P_2B}$ y $\overline{AC} + \overline{CP_1} = \overline{AC} + \overline{CP_4} = \overline{AP_5}$

Luego en (1) :

$$\overline{PB} + \overline{BA} + (\overline{AC} + \overline{CP_1}) = \overline{P_2B} + \overline{BA} + \overline{AP_5} = \overline{P_2P_5}$$

Ecuación de P_2P_5 :

$$y - 6 = \left(\frac{6+12}{-2-12}\right)(x+2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 3x + 2y - 6 = 0$$

Interceptando $\mathscr{L}_1$ con los ejes coordenados obtenemos

A(2 , 0) y B(0 , 3)

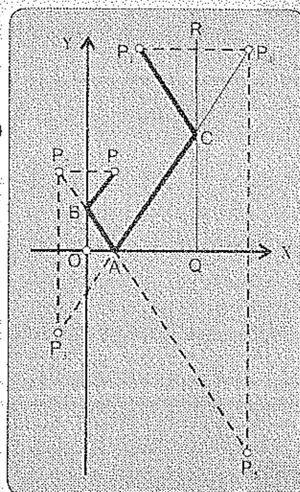


FIGURA 3.49

Ecuación de $\overline{P_3P_4}$: $y + 6 = \left(\frac{15+6}{12+2}\right)(x+2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : 3x - 2y - 6 = 0$

Finalmente interceptando $\mathscr{L}_2$ con la recta $x = 8$ se tiene : C(8 , 9) ■

9 Hallar la ecuación de la recta que pasa por P(2 , 2) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 1 u^2.

Solución. La ecuación de la recta que pasa por P(2 , 2) y de pendiente m es

$y - 2 = m(x - 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: mx - y + 2 - 2m = 0$ (1)

Las intersecciones de esta recta con los ejes coordenados son : $a = \frac{2}{m}(m - 1)$ y $b = 2(1 - m)$

Area del triángulo = $\frac{1}{2}|ab| \Rightarrow 1 = |\frac{2}{m}(m - 1)^2|$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{m}(m - 1)^2 \vee -1 = \frac{2}{m}(m - 1)^2$

$\Leftrightarrow (2m^2 - 5m + 2 = 0) \vee (2m^2 - 3m + 2 = 0)$

$\Leftrightarrow (m_1 = 2 \vee m_2 = 1/2) \vee (\phi)$

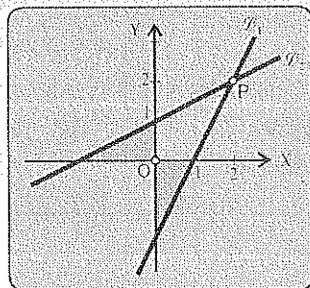


FIGURA 3.50

Sustituyendo en (1) obtenemos , $\mathscr{L}_1 : 2x - y - 2 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x - 2y + 2 = 0$ ■

10 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(9 , 5) y es tangente a la circunferencia de centro C(-1 , -5) y radio $r = 2\sqrt{10}$. (Dos soluciones.)

Solución. Ecuación de la tangente que pasa por P

$y - 5 = m(x - 9) \Leftrightarrow \mathscr{L}: mx - y + 5 - 9m = 0$ (1)

Si $r = d(C , \mathscr{L}) \Rightarrow 2\sqrt{10} = \frac{|-m + 5 + 5 - 9m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

$\Rightarrow 2\sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{10}\,|m - 1| \Rightarrow 3m^2 - 10m + 3 = 0$

$\Leftrightarrow m_1 = 3 \vee m_2 = 1/3$

Valores que sustituidas en (1) dan las soluciones.

$\mathscr{L}_1 : 3x - y - 22 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x - 3y + 6 = 0$ ■

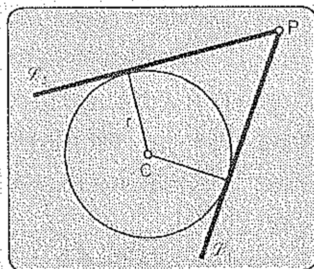


FIGURA 3.51

11 Hallar las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $\mathscr{L}_1 : 13x - 9y - 10 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x + 3y - 6 = 0$. Verificar que son perpendiculares.

Solución. Sea P(x , y) un punto cualquiera de una de las bisectrices. En cualquier posición que se encuentre P, se debe verificar que :

$$|d(P , \mathscr{L}_1)| = |d(P , \mathscr{L}_2)|$$

Cuya expresión analítica es : $\dfrac{|13x - 9y - 10|}{\sqrt{169 + 81}} = \dfrac{|x + 3y - 6|}{\sqrt{1 + 9}}$

$$\Rightarrow |13x - 9y - 10| = 5|x + 3y - 6|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x - 9y - 10 = 5(x + 3y - 6) \Rightarrow \mathscr{B}_1 : 2x - 6y + 5 = 0 \\ 13x - 9y - 10 = -5(x + 3y - 6) \Rightarrow \mathscr{B}_2 : 9x + 3y - 20 = 0 \end{cases}$$

Si $m_1 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ y $m_2 = -\dfrac{9}{3} = -3 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = (1/3)(-3) = -1$

$$\therefore \mathscr{B}_1 \perp \mathscr{B}_2$$

■

12 Los lados de un triángulo son $\overline{AB}$, $\mathscr{L}_1 : 7x - 4y + 41 = 0$; $\overline{BC}$, $\mathscr{L}_2 : x + 8y + 53 = 0$; $\overline{CA}$, $\mathscr{L}_3 : 8x + y - 98 = 0$. Calcular las bisectrices interiores y el incentro I.

Solución. Dado que el origen está dentro del triángulo, las distancias dirigidas del incentro a cada uno de los lados son negativas.

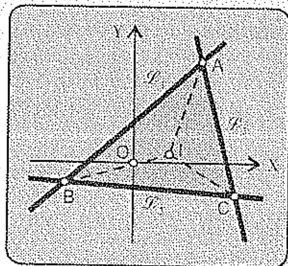


FIGURA 3.52

Para la bisectriz del ángulo A : $-d(I, \mathscr{L}_1) = -d(I, \mathscr{L}_3)$

$$\Rightarrow -\frac{7x - 4y + 41}{-\sqrt{49 + 16}} = -\frac{8x + y - 98}{\sqrt{64 + 1}} \Leftrightarrow \mathscr{B}_1 : 5x - y - 19 = 0$$

Para la bisectriz del ángulo B : $-d(I, \mathscr{L}_1) = -d(I, \mathscr{L}_2)$

$$\Rightarrow -\frac{7x - 4y + 41}{-\sqrt{49 + 16}} = -\frac{x + 8y + 53}{-\sqrt{1 + 64}} \Leftrightarrow \mathscr{B}_2 : x - 2y - 2 = 0$$

Para la bisectriz del ángulo C : $-d(I, \mathscr{L}_2) = -d(I, \mathscr{L}_3)$

$$\Rightarrow -\frac{x + 8y + 53}{-\sqrt{1 + 64}} = -\frac{8x + y - 98}{\sqrt{64 + 1}} \Leftrightarrow \mathscr{B}_3 : x + y - 5 = 0$$

$$\therefore \mathscr{B}_2 \cap \mathscr{B}_3 = (x - 2y - 2 = 0) \cap (x + y - 5 = 0) = I(4, 1)$$

■

13 Los vértices de un triángulo son los puntos A(4 , 3) , B(-4 , -1) y C(-7 , 5) ; hallar las ecuaciones de las bisectrices interiores y las coordenadas del incentro.

Sol. $\mathscr{B}_1 : x - 7y + 17 = 0$, $\mathscr{B}_2 : 2x - y + 11 = 0$, $\mathscr{B}_3 : 3x + 4y + 1 = 0$, I(-3 , 2)

14 El área de un triángulo es $150u^2$, B(-5 , 9) y C(-10 , -6) son dos de sus vértices. Hallar el lugar geométrico descrito por el tercer vértice A.

Solución. 1. Sea A(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica

$$a(\Delta ABC) = 150\,u^2$$

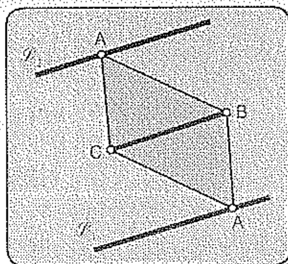


FIGURA 3.53

2. Expresión analítica : $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & 9 & 1 \\ -10 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 150$

3. Efectuando obtenemos : $|3x - y + 24| = 60$

$\Leftrightarrow (3x - y + 24 = 60) \vee (3x - y + 24 = -60)$

$\Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 3x - y - 36 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 3x - y + 84 = 0$

El L. G. del vértice A son trayectorias paralelas al lado $\overline{BC}$. ■

15 Tres vértices de un paralelogramo son A(1 , 1) , B(5 , -2) y C(3 , 4). Calcular el cuarto vértice.

Solución. El problema admite tres soluciones :

ABCD , ACBD' y CABD"

Las pendientes de los lados del triángulo ABC son :

$m_{AB} = \frac{1+2}{1-5} = -\frac{3}{4}$; $m_{AC} = \frac{4-1}{3-1} = \frac{3}{2}$; $m_{BC} = \frac{4+2}{3-5} = -3$

$\overline{DD'} \parallel \overline{BC} \Rightarrow y - 1 = -3(x-1) \Leftrightarrow \overline{DD'} : 3x + y - 4 = 0$

$D'D'' \parallel \overline{AC} \Rightarrow y + 2 = \frac{3}{2}(x-5) \Leftrightarrow \overline{D'D''} : 3x - 2y - 19 = 0$

$DD'' \parallel \overline{AB} \Rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \Leftrightarrow \overline{DD''} : 3x + 4y - 25 = 0$

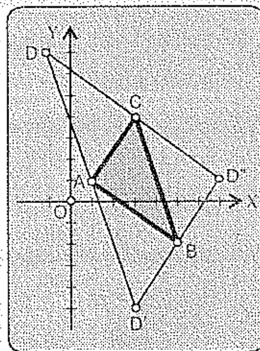


FIGURA 3.54

Por tanto : $(\overline{DD'}) \cap (\overline{DD''}) = D(-1 , 7)$

$(\overline{DD'}) \cap (\overline{D'D''}) = D'(3 , -5)$, $(\overline{DD''}) \cap (D'D'') = D''(7 , 1)$ ■

16 Dados el punto A(2 , 3) y la recta $\mathscr{L}: x - y + 9 = 0$; buscar sobre la recta $\mathscr{L}$ los puntos B y C que con A determinen un triángulo equilátero.

Solución. Altura del triángulo : $h = d(A , \mathscr{L})$

$$\Rightarrow h = \frac{|2 - 3 + 9|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Pero : $h = |\overline{AB}|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow |\overline{AB}| = \frac{8\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \frac{8\sqrt{6}}{3} \qquad (1)$$

Como $B \in \mathscr{L} \Rightarrow x - y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = x + 9 \qquad (2)$

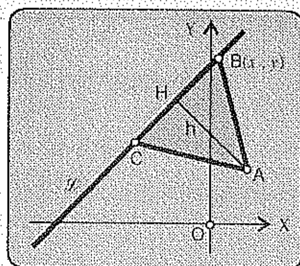


FIGURA 3.55

De (1) y (2), por simultáneas, obtenemos los vértices buscados :

$B\left(-2+\frac{4}{3}\sqrt{3}\ ,\ 7+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ y $C\left(-2-\frac{4}{3}\sqrt{3}\ ,\ 7-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ ■

17 Calcular las coordenadas de un punto $P(x, y)$ simétrico de $Q(-4, 2)$ respecto de la recta $\mathscr{L}: 3x + 4y - 21 = 0$

Solución. La ecuación de la recta $\mathscr{L}_1$ que pasa por Q y perpendicular a $\mathscr{L}$ es :

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x + 4) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 4x - 3y + 22 = 0$$

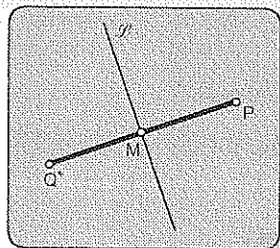


FIGURA 3.56

Luego :

$\mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1 = (3x + 4y - 21 = 0) \cap (4x - 3y + 22 = 0) = M(-1, 6)$

Como M es punto medio de $\overline{PQ}$, entonces :

$$-1 = \frac{x-4}{2} \Rightarrow x = 2 \quad ; \quad 6 = \frac{y+2}{2} \Rightarrow y = 10$$

Por tanto, el punto buscado es P(2 , 10) ■

18 Obtener las coordenadas de un punto $P(x, y)$, simétrico de $A(8, 5)$ respecto de la recta $\mathscr{L}: 2x - y - 1 = 0$ ***Sol.*** P(0 , 9)

19 Hallar la ecuación de la recta que pasa por P(7 , 8) y forma un triángulo isósceles con las rectas $\mathscr{L}_1 : 12x - 5y - 9 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 3x - 4y - 1 = 0$

Solución. Sea $\mathscr{L}$, de pendiente m , la recta buscada.

Se tiene : $A = B \Rightarrow \text{Tg}\,A = \text{Tg}\,B$

$$\Rightarrow \frac{m - m_1}{1 + m\,m_1} = \frac{m_2 - m}{1 + m\,m_2} \Rightarrow \frac{m - 12/5}{1 + (12/5)m} = \frac{3/4 - m}{1 + (3/4)m}$$

de donde : $63m^2 - 32m - 63 = 0 \Leftrightarrow m = -7/9 \ \vee\ m' = 9/7$

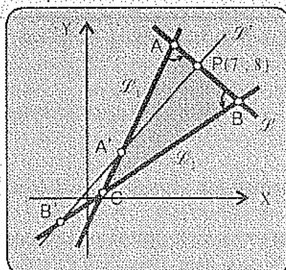


FIGURA 3.57

Luego , las rectas son :

$$y - 8 = -\frac{7}{9}(x - 7) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 7x + 9y - 121 = 0$$

$$y - 8 = \frac{9}{7}(x - 7) \Leftrightarrow \mathscr{L}': 9x - 7y - 7 = 0$$

Los triángulos isósceles formados son : ABC y A'B'C

Hay otras dos soluciones indicadas en la Figura 3.58

En el $\Delta ABC : \overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow TgA = TgC$

$$\Rightarrow \frac{m - m_1}{1 + m\, m_1} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \frac{m - 12/5}{1 + (12/5)m} = \frac{12/5 - 3/4}{1 + (36/20)}$$

de donde : $m = -837/116$

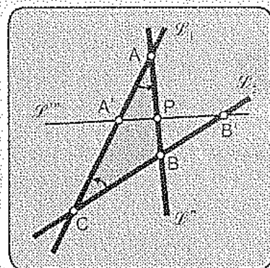


FIGURA 3.58

$$\Rightarrow y - 8 = -\frac{837}{116}(x - 7) \Leftrightarrow \mathscr{L}'': 837x + 116y - 6787 = 0$$

En el $\Delta CA'B' : \overline{A'C} = \overline{A'B'} \Rightarrow TgB' = TgC$

$$\Rightarrow \frac{m_2 - m}{1 + m\, m_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow \frac{3/4 - m}{1 + (3/4)m} = \frac{12/5 - 3/4}{1 + (36/20)}$$

de donde :

$$m = 36/323 \Rightarrow y - 8 = \frac{36}{323}(x - 7) \Leftrightarrow \mathscr{L}''': 36x - 323y + 2332 = 0$$ ■

20 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(5 , 3) y forma un triángulo isósceles con las rectas $\mathscr{L}_1 : x - y - 1 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x - 7y - 1 = 0$

Sol. $x - 2y + 1 = 0$, $2x + y - 13 = 0$, $17x + 31y - 178 = 0$, $7x - y - 32 = 0$

21 La recta $\mathscr{L}_3 : x - y - 4 = 0$ es bisectriz de uno de los ángulos formados por $\mathscr{L}_1$: $x - 3y + 6 = 0$ con $\mathscr{L}_2 : 3x - y - 22 = 0$. Sobre la bisectriz como centro y radio $2\sqrt{10}$ se traza una circunferencia tangente a los lados del ángulo. Calcular las coordenadas del centro.

Solución. Sea C(h , k) el centro de la circunferencia. Para que las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ sean tangentes, basta que las distancias de C a cualquiera de ellos sea igual al radio , esto es

$$|d(C, \mathscr{L}_1)| = |d(C, \mathscr{L}_2)| = r$$

$$\Rightarrow \frac{|h - 3k + 6|}{\sqrt{1 + 9}} = 2\sqrt{10} \Rightarrow |h - 3k + 6| = 20$$

$\Leftrightarrow h - 3k + 6 = 20 \vee h - 3k + 6 = -20$

$\Leftrightarrow h - 3k - 14 = 0 \vee h - 3k + 26 = 0$

Como $C(h, k) \in \mathscr{L}_3 \Rightarrow h - k - 4 = 0$

Por lo que :

$(h - k - 4 = 0) \cap (h - 3k - 14 = 0) = C(-1, -5)$

$(h - k - 4 = 0) \cap (h - 3k + 26 = 0) = C_1(19, 15)$ ■

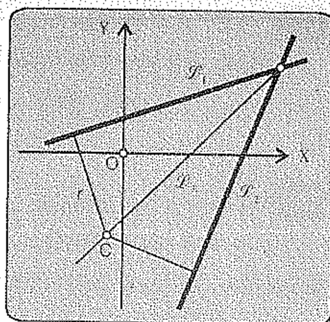


FIGURA 3.59

22 La recta $\mathscr{L}_3 : 14x - 5y + 33 = 0$ es bisectriz de uno de los ángulos formados por $\mathscr{L}_1 : 12x + 5y + 19 = 0$ con $\mathscr{L}_2 : 8x - 15y + 31 = 0$. Haciendo centro en un punto de la bisectriz se traza una circunferencia de radio 10, tangente a los lados del ángulo. Calcular las coordenadas del centro. ***Sol.*** $C_1(3, 15)$, $C_2(-7, -13)$

23 A(1 , 1) y C(3 , 5) son extremos de la diagonal de un cuadrado. Calcular los otros vértices B y D.

Solución. Sea $B(x, y)$ uno de los vértices buscados.

Como el ΔABC es rectángulo isósceles en B, entonces

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = 2|\overline{AB}|^2$$

$$\Rightarrow (3 - 1)^2 + (5 + 1)^2 = 2[(x - 1)^2 + (y - 1)^2]$$

de donde se tiene : $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ (1)

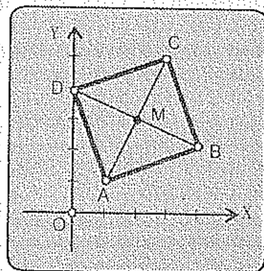


FIGURA 3.60

Punto medio de $\overline{AC}$: $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \Leftrightarrow M(2, 3)$

Pendiente de $\overline{AC}$: $m = \frac{5-1}{3-1} = 2 \Rightarrow m_{BD} = -1/2$

Ecuación de la mediatriz de $\overline{AC}$:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x + 2y - 8 = 0 \quad (2)$$

Como B y D pertenecen a esta mediatriz, resolvemos simultáneamente (1) y (2) , y obtenemos los vértices buscados : B(4 , 2) y D(0 , 4) ■

24 C(2 , 1) es centro de un cuadrado MNPQ. El vértice M es el punto M(-3 , 7). Calcular los otros vértices N , P , Q y valuar el área del cuadrado.

Sol. N(8 , 6) , P(7 , -5) , Q(-4 , -4) , Area = 122 u²

25 Hallar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan de las rectas paralelas. $\mathscr{L}_1 : 3x - 2y + 14 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 3x - 2y + 2 = 0$

Solución. El lugar geométrico buscado es la *paralela media* de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

Sean : $y = mx + b_1$ e $y = mx + b_2$ dos rectas paralelas. Si sumamos ambos miembros de las dos ecuaciones obtenemos el lugar geométrico.

$$2y = 2mx + b_1 + b_2 \Leftrightarrow y = mx + \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \text{ paralela media.}$$

Luego , en las rectas dadas , $\mathscr{L}_1 : y = \dfrac{3}{2}x + 7$, $\mathscr{L}_2 : y = \dfrac{3}{2}x + 1$

Por lo que , la paralela media será

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(7 + 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x - 2y + 8 = 0$$ ■

26 Hallar las ecuaciones de las dos rectas paralelas a $\mathscr{L}' : 3x + 4y - 12 = 0$ que distan 10 unidades de ésta.

Solución. La familia de rectas que son paralelas a $\mathscr{L}'$ es

$$\mathscr{L} : 3x + 4y + k = 0$$

Dos miembros de esta familia dista 10 unidades de $\mathscr{L}'$, luego , si :

$$d(\mathscr{L}', \mathscr{L}) = 10 \Rightarrow \frac{|k - (-12)|}{\sqrt{9 + 16}} = 10 \Rightarrow |k + 12| = 50$$
$$\Leftrightarrow k + 12 = 50 \vee k + 12 = -50$$
$$\Leftrightarrow k_1 = 38 \vee k_2 = -62$$

Por tanto , en $\mathscr{L}$, las rectas buscadas son

$$\mathscr{L}_1 : 3x + 4y + 38 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 3x + 4y - 62 = 0$$

Compruébese que la distancia entre estas dos rectas es 20 , o bien , que la distancia de cada una de ellas a la dada es 10. ■

Capítulo 4

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

4.1 DEFINICION

Una *circunferencia* es el lugar geométrico del conjunto de puntos de un plano tales que la distancia a cada uno de ellos desde un punto fijo del plano es una constante.

El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia y la distancia constante se llama *radio*.

TEOREMA 4.1. La ecuación de una circunferencia con centro en C(h , k) y radio igual a r es :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Demostración. 1. Sea $P(x , y)$ un lugar geométrico, con centro en C(h , k) y radio r, que debe cumplir la propiedad geométrica : $|\overline{CP}| = r$

2. Por la fórmula de la distancia, esta propiedad queda expresada en la forma analítica por : $\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación que se conoce como la *forma ordinaria* de la ecuación de una circunferencia.

Corolario. Si el centro de una circunferencia de radio r está en el origen, la ecuación de la circunferencia se reduce a

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación que se conoce como la *forma canónica* de la ecuación de una circunferencia.

EJERCICIOS . *Grupo 15*

1 Escribir la ecuación de la circunferencia de centro C(-3 , -5) y radio 7.

Solución. Por el Teorema 4.1, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathscr{C}: (x+3)^2 + (y+5)^2 = 49$$ ■

2 Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos A(2 , 3) y B(-4 , 5). Hallar la ecuación de la curva.

Solución. Como el centro C biseca al diámetro $\overline{AB}$, entonces

$$C = \left(\frac{2-4}{2}\ ,\ \frac{3+5}{2}\right) \Leftrightarrow C(-1\ ,\ 4)$$

El radio de la circunferencia es : $r = |\overline{AC}| = \sqrt{(2+1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$

Luego, por el Teorema 4.1, la ecuación buscada es

$$\mathscr{C}: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$$ ■

3 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(7 , -6) y que pasa por el punto A(2 , 2).

Solución. Por definición : $r = |\overline{CA}| = \sqrt{(7-2)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{89}$

Luego, por el Teorema 4.1, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathscr{C}: (x-7)^2 + (y+6)^2 = 89$$

4 Hallar la ecuación de la circunferencia de centro C(2 , -4) y que es tangente al eje Y.

Solución. Por definición de abscisa : h = distancia de C al eje Y $\Rightarrow r = |h| = 2$

Luego, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathscr{C}: (x-2)^2 + (y+4)^2 = 4$$ ■

5 Una circunferencia tiene su centro en el punto C(0 , -2) y es tangente a la recta $\mathscr{L}: 5x - 12y + 2 = 0$. Hallar su ecuación.

Solución. Por una propiedad de las tangentes : $r = |d(C, \mathscr{L})|$

$$\Rightarrow r = \frac{|5(0) - 12(-2) + 2|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 4$ ■

6 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(-4 , -1) y que es tangente a la recta $\mathscr{L}: 3x + 2y - 12 = 0$.

La solución se deja a cargo del lector. ***Sol.*** $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 52$

7 La ecuación de una circunferencia es $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Demostrar que el punto A(2 , -5) es interior a la circunferencia y que el punto B(-4 , 1) es exterior.

Demostración. En efecto, $|\overline{AC}| = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-4 + 5)^2} = \sqrt{2} < 6$

$|\overline{AC}| < r \Rightarrow$ el punto A es interior a la circunferencia

$|\overline{BC}| = \sqrt{(3 + 4)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{74} > 6$

$|\overline{BC}| > r \Rightarrow$ el punto B es exterior a la circunferencia. ■

8 Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $\mathscr{L}_1: 3x - 2y - 24 = 0$ y $\mathscr{L}_2: 2x + 7y + 9 = 0$

Solución. Resolviendo, por simultáneas, las ecuaciones de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ obtenemos el punto (6 , -3). Como $C(h, k) \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \Rightarrow C(6, -3)$.

Luego, la ecuación de la circunferencia es, $\mathscr{C}: (x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$ ■

9 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(7 , -5) y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $\mathscr{L}_1: 7x - 9y - 10 = 0$ y $\mathscr{L}_2: 2x - 5y + 2 = 0$

Solución. Si $C(h, k) \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \Rightarrow C(4, 2)$

$r = |\overline{CA}| = \sqrt{(7 - 4)^2 + (-5 - 2)^2} = \sqrt{58}$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 58$ ■

10 Una cuerda de la circunferencia $x^2+y^2=25$ está sobre la recta cuya ecuación es $x-7y+25=0$. Hállese la longitud de la cuerda.

Solución. Resolviendo, por simultáneas, las ecuaciones de la circunferencia y la recta obtenemos los extremos de la cuerda, esto es, A(-4 , 3) y B(3 , 4).

Luego, su longitud es :

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3+4)^2+(4-3)^2} = 5\sqrt{2}$$ ■

11 Hallar la ecuación de la mediatriz de la cuerda del Ejercicio 10, y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

Solución. Sea $P(x , y)$ un punto genérico de la mediatriz AB. Entonces en cualquier posición de P se cumple la propiedad geométrica

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}| \Rightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

de donde obtenemos la ecuación de mediatriz : $7x+y=0$

La recta pasa por el origen, centro de la circunferencia $x^2+y^2=25$ ■

Los ejercicios 12 - 16 se refieren al triángulo cuyos vértices son A(-1 , 0) , B(2 , 9/4) y C(5 , 0).

12 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y que es tangente al lado $\overline{BC}$.

Solución. Ecuación de $\overline{BC}$: $y-0=\left(\frac{0-9/4}{5-2}\right)(x-5) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x+4y-15=0$

Radio de la circunferencia : $r = d(A , \mathscr{L}) = \frac{|3(-1)+4(0)-15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{18}{5}$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x+1)^2+(y-0)^2 = \frac{324}{25}$ ■

13 Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Solución. Como los vértices del triángulo están sobre la circunferencia de centro P(h , k), entonces se debe cumplir la propiedad geométrica.

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}| = |\overline{CP}| = r$$

Si $|\overline{AP}| = |\overline{BP}| \Rightarrow \sqrt{(h+1)^2+(k-0)^2} = \sqrt{(h-2)^2+(k-9/4)^2} \Leftrightarrow 32h+24k=43$ (1)

$|AP| = |\overline{CP}| \Rightarrow \sqrt{(h+1)^2 + k^2} = \sqrt{(h-5)^2 + k^2}$, de donde, h = 2 ; en (1) : k = -7/8

$r = |\overline{AP}| = \sqrt{(2+1)^2 + (-7/8)^2} = 25/8$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x-2)^2 + (y+7/8)^2 = 625/64$ ■

14 Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo.

Solución. Datos del triángulo : A(-1 , 0) , B(2 , 9/4) , C(5 , 0)

El centro de la circunferencia inscrita es el baricentro del triángulo. Entonces

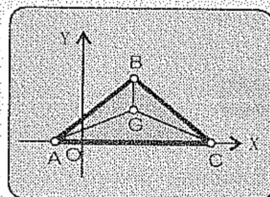


FIGURA 4.1

Ecuación del lado $\overline{AC}$: $y = 0$ (Eje X)

Ecuación de $\overline{BC}$: $3x + 4y - 15 = 0$ (Ejercicio 12)

Para la bisectriz del ángulo C : $d(G, \overline{AC}) = -d(G, \overline{BC})$

$$\Rightarrow y = -\frac{3x + 4y - 15}{\sqrt{9+16}} \Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0$$

Ecuación de la bisectriz del ángulo B : $x = 2$

Coordenadas del baricentro : $(x = 2) \cap (x + 3y - 5 = 0) = G(2, 1)$

Radio de la circunferencia : $r = |d(G, \overline{BC})| = \dfrac{|3(2) + 4(1) - 15|}{\sqrt{9+16}} = 1$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ ■

15 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo.

Solución. Datos del triángulo : A(-1 , 0) , B(2 , 9/4) , C(5 , 0)

Los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son, respectivamente, M(1/2 , 9/8) , N(2 , 0) y R(7/2 , 9/8). Si P(h , k) es el centro de la circunferencia

$$\Rightarrow |\overline{MP}| = |\overline{NP}| = |\overline{RP}| = r$$

Si $|\overline{MP}| = |\overline{NP}| \Rightarrow \sqrt{(h-1/2)^2 + (k-9/8)^2} = \sqrt{(h-7/2)^2 + (k-9/8)^2}$, donde : h = 2

$|\overline{NP}| = |\overline{MP}| \Rightarrow \sqrt{(h-2)^2 + k^2} = \sqrt{(h-1/2)^2 + (k-9/8)^2}$

Sustituyendo el valor de h y reduciendo obtenemos : k = 25/16

Radio de la circunferencia. $r = |\overline{NP}| = \sqrt{(2-2)^2 + (25/16)^2} = 25/16$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x-2)^2 + (y-25/16)^2 = 625/256$ ■

17 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje X y que pasa por los puntos A(1 , 3) y B(4 , 6).

Solución. Si C(h , 0) es el centro de la circunferencia, debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = r$

Si $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| \Rightarrow \sqrt{(h-1)^2+(0-3)^2} = \sqrt{(h-4)^2+(0-6)^2}$, de donde : h = 7

Radio de la circunferencia : $r = |\overline{AC}| = \sqrt{(7-1)^2+9} = \sqrt{45}$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x-7)^2 + y^2 = 45$ ■

18 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje Y y que pasa por los puntos A(2 , 2) y B(6 , -4).

Solución. Sea C(0 , k) el centro de la circunferencia

$$\Rightarrow r = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$$

Si $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| \Rightarrow \sqrt{(0-2)^2+(k-2)^2} = \sqrt{(0-6)^2+(k+4)^2}$, de donde : k = - 11/3

Radio de la circunferencia : $r = |AC| = \sqrt{(0-2)^2+(-11/3-2)^2} = \sqrt{325/9}$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x-0)^2 + (y+11/3)^2 = 325/9$ ■

19 Una circunferencia pasa por los puntos A(-3 , 3) y B(1 , 4) y su centro está sobre la recta $\mathscr{L}: 3x - 2y - 23 = 0$. Hállese su ecuación.

Solución. Si $C(h , k) \in \mathscr{L} \Rightarrow 3h - 2k - 23 = 0$ (1)

Además, el centro se encuentra sobre la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, esto es : $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$

$$\Rightarrow \sqrt{(h+3)^2+(k-3)^2} = \sqrt{(h-1)^2+(k-4)^2}$$

de donde : 8h + 2k + 1 = 0 (2)

De (1) y (2) , por simultáneas, obtenemos : h = 2 y k = - 17/2

Si $r = |\overline{AC}| \Rightarrow r = \sqrt{(2+3)^2+(-17/2-3)^2} = \sqrt{629/4}$

Por lo que, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathscr{C}: (x-2)^2 + (y+17/2)^2 = 629/4$$ ■

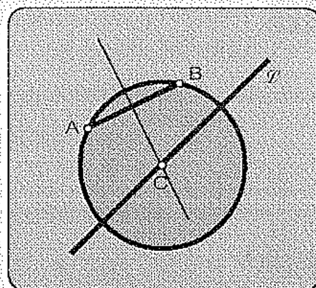


FIGURA 4.2

20 Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $\mathscr{L}_1 : 9x + 2y + 13 = 0$, $\mathscr{L}_2 : 3x + 8y - 47 = 0$ y $\mathscr{L}_3 : x - y - 1 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

Solución. Interceptando las rectas tenemos :

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = A(-3, 7), \ \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = B(5, 4)$$

y $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 = D(-1, -2)$. Como el centro C(h , k) equidista de los vértices del ΔABD, se sigue que:

$|\overline{AC}| = |\overline{BC}| \Rightarrow \sqrt{(h+3)^2 + (k-7)^2} = \sqrt{(h-5)^2 + (k-4)^2}$

de donde : $16h - 6k + 17 = 0$ (1)

$|\overline{BC}| = |\overline{DC}| \Rightarrow \sqrt{(h-5)^2 + (k-4)^2} = \sqrt{(h+1)^2 + (k+2)^2}$

de donde : $h + k - 3 = 0$ (2)

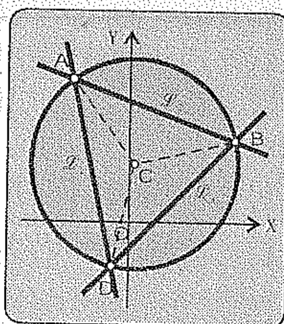


FIGURA 4.3

La solución común de (1) y (2) es : $h = 1/22$, $k = 65/22$

$$r = |\overline{DC}| = \sqrt{(1/22 + 1)^2 + (65/22 + 2)^2} = \sqrt{6205/242}$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es , $\mathscr{C}: (x - 1/22)^2 + (y - 65/22) = 6205/242$ ■

21 La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 50$. El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es M(-2 , 4). Hallar la ecuación de la cuerda.

Solución. Sean A y B los extremos de la cuerda cuyo punto medio de M(-2 , 4).

Pendiente de $\overline{OM}$: $m = \frac{0-4}{0+2} = -2$ Como $\overline{OM} \perp \overline{AB} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{2}$

Por lo que, la ecuación de la cuerda es

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x - 2y + 10 = 0$$ ■

22 La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuación de la tangente a este círculo en el punto P(6 , 7).

Solución. El centro de la circunferencia es C(4 , 3). Entonces la pendiente del radio $\overline{CP}$

es : $m_1 = \frac{7-3}{6-4} = 2$. Como el radio es perpendicular a la tangente en el

punto de tangencia, implica que : $m \cdot m_1 = 1 \Leftrightarrow m = -1/2$

Por lo que la ecuación de la tangente es :

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 6) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x + 2y - 20 = 0$$ ■

23 La ecuación de una circunferencia es $\mathscr{C}: (x - 2)^2 + (y - 3)2 = 5$. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia que pasa por el punto P(3 , 3).

Solución. Centro de la circunferencia : C(-2 , 3)

Como P(3 , 3) $\notin \mathscr{C}$, la ecuación de la tangente que pasa por P es :

$$y - 3 = m(x - 3) \Rightarrow \mathscr{L}: mx - y + 3 - 3m = 0$$

$$\text{Si } r = |d(C, l)| \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{|-2m - 3 + 3 - 3m|}{\sqrt{m^2+1}}$$

de donde : $\sqrt{5(m^2+1)} = |5m| \Rightarrow 4m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1/2$

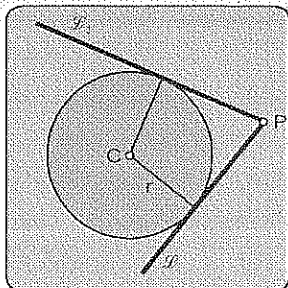


FIGURA 4.4

Sustituyendo estos valores de m en $\mathscr{L}$ obtenemos :

$$\mathscr{L}_1 : x - 2y + 3 = 0 \lor \mathscr{L}_2 : x + 2y - 9 = 0$$ ■

24 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $\mathscr{L}$: $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas $\mathscr{L}_1$: $8x + 15y + 7 = 0$ y $\mathscr{L}_2$: $3x - 4y - 18 = 0$.

Solución. Si $C(h, k) \in \mathscr{L} \Rightarrow 6h + 7k - 16 = 0$ (1)

$$r = |d(C, \mathscr{L}_1)| = |d(C, \mathscr{L}_2)|$$

$$\Rightarrow \frac{|8h + 15k + 7|}{\sqrt{64 + 225}} = \frac{|3h - 4k - 18|}{\sqrt{9 + 16}}$$

de donde : $5|8h + 15k + 7| = 17|3h - 4k - 18|$

$$\Rightarrow (40h + 75k + 35 = 51h - 68k - 306) \lor (40h + 75k + 35 = -51h + 68k + 306)$$

$$\Leftrightarrow h - 13k - 31 = 0 \lor 91h + 7k - 271 = 0$$

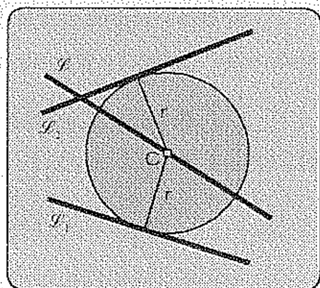


FIGURA 4.5

Luego : $(6h + 7k - 16 = 0) \cap (h - 13k - 31 = 0) = C_1(5, -2)$

$(6h + 7k - 16 = 0) \cap (91h + 7k - 271 = 0) = C_2(3, -2/7)$

Radios : $r_1 = |d(C_1, \mathscr{L}_2)| = \dfrac{|3(5) - 4(-2) - 18|}{5} = 1$

$$r_2 = |d(C_2, \mathscr{L}_2)| = \frac{|3(3) - 4(-2/7) - 18|}{5} = 11/7$$

Por tanto, las ecuaciones de las circunferencias son :

$$\mathscr{C}_1 : (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1 \lor \mathscr{C}_2 : (x - 3)^2 + (y + 2/7)^2 = 121/49$$ ■

25 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(7 , -5) y es tangente a la recta $\mathscr{L}$: $x - y - 4 = 0$ en el punto B(3 , -1)

Solución. Dado que : $\overline{BC} \perp \mathscr{L} \Rightarrow m_{BC} = -1$, y si C(h , k)

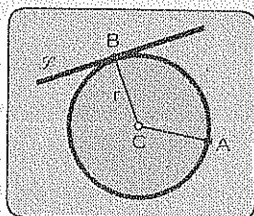


FIGURA 4.6

$$\Rightarrow \frac{k+1}{h-3} = -1 \Leftrightarrow h + k - 2 = 0 \qquad (1)$$

$$r = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| \Rightarrow \sqrt{(h-3)^2 + (k+1)^2} = \sqrt{(h-7)^2 + (k+5)^2}$$

de donde obtenemos : $\qquad h - k - 8 = 0 \qquad (2)$

La solución común de (1) y (2) es : h = 5 y k = -3

$$r = |\overline{BC}| = \sqrt{(5-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{8}$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathscr{C}: (x-5)^2 + (y+3)^2 = 8$$

■

4.2 FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA CIRCUNFERENCIA

Si se suprimen los paréntesis en la ecuación ordinaria de una circunferencia, se tiene :

$$x^2 + y^2 - 2hy + 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que :

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

La ecuación (2) se llama *forma general* de la ecuación de una circunferencia.

TEOREMA 4.2 La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia de radio $r \neq 0$, solamente si :

$$D^2 + E^2 - 4F > 0$$

Las coordenadas del centro son, entonces , (-D/2 , -E/2) y el radio

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Demostración. En efecto, completando cuadrados para las variables x e y, se tiene:

$$\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4}$$

$$\Rightarrow (x + D/2)^2 + (y + E/2)^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F) \qquad (3)$$

Si comparamos con la forma ordinaria vemos que

$$h = -D/2 \;,\; k = -E/2 \quad y \quad r = -\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Puede ocurrir tres casos para que (3) pueda o no representar una circunferencia.

a) Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, entonces (3) representa una circunferencia de centro $(-D/2 , -E/2)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

b) Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces (3) representa un punto de coordenadas $(-D/2 , -E/2)$.

c) Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, entonces (3) representa un conjunto vacío ϕ, es decir, no representa un lugar geométrico.

4.3 LA CIRCUNFERENCIA Y TRES CONDICIONES

TEOREMA 4.3 La ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos distintos no colineales, $P_1(x_1 , y_1)$, $P_2(x_2 , y_2)$ y $P_3(x_3 , y_3)$, es determinada por el determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x^1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x^1 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_1 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

EJERCICIOS . *Grupo 16*

En cada uno de los ejercicios del 1 al 3, reduciendo la ecuación dada a la forma ordinaria, determinar si representa o no una circunferencia. Si la respuesta es afirmativa, hallar su centro y radio

1 $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$

Solución. Completando cuadrados para x e y se tiene:

$$2(x^2 - 3x + 9/4) + 2(y^2 + 5y + 25/4) = -7 + \frac{9}{2} + \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow 2(x-3/2)^2+2(y+5/2)^2=10 \Leftrightarrow (x-3/2)^2+(y+5/2)^2=5$$

Luego, la ecuación representa una circunferencia de centro C(3/2 , -5/2) y radio $r=\sqrt{5}$.

2 $4x^2+4y^2+28x-8y+53=0$

Solución. Completando cuadrados para x e y se tiene:

$$4(x^2+7x+49/4)+4(y^2-2y+1)=-53+49+4$$

$$\Rightarrow 4(x+7/2)^2+4(y-1)^2=0 \Leftrightarrow (x+7/2)^2+(y-1)^2=0$$

Como $r=0$, la ecuación representa el punto C(-7/2 , 1) ■

3 $16x^2+16y^2-64x+8y+177=0$

Solución. Completando cuadrados para x e y, se tiene

$$16(x^2-4x+4)+16(y^2+y/2+1/16)=-177+64+1$$

$$\Rightarrow 16(x-2)^2+16(y+1/4)^2=-112 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1/4)^2=-7$$

Como $r^2<0$, la ecuación representa un conjunto vacío. ■

4 Hallar el área del círculo cuya ecuación es

$$9x^2+9y^2+72x-12y+103=0$$

Solución. Pasando la ecuación de la circunferencia a su forma ordinaria, se tiene

$$9(x^2+8x+16)+9\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)=-103+144+4=45$$

$$\Rightarrow (x+4)^2+(y-9/3)^2=5\text{, de donde: } r^2=5$$

Si el área del circulo es $S=\pi r^2 \Rightarrow S=5\pi\ u^2$ ■

5 Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es

$$25x^2+25y^2+30x-20y-62=0$$

Solución. Reduciendo la ecuación a la forma ordinaria se tiene:

$$25\left(x^2+\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}\right)+25\left(y^2-\frac{4}{5}y+\frac{4}{25}\right)=62+9+4=75$$

$$\Rightarrow (x+3/5)^2+(y-2/5)^2=3\text{, de donde } r^2=3 \Rightarrow r=\sqrt{3}$$

Longitud de la circunferencia: $C=2\pi r \Rightarrow C=2\pi\sqrt{3}$ ■

6 Demostrar que las circunferencias $\mathscr{C}_1: 4x^2+4y^2-16x+12y+13=0$ y $\mathscr{C}_2: 12x^2+12y^2-48x+36y+55=0$ son concéntricas.

Solución. Reduciendo cada ecuación a su forma ordinaria se tiene :

$$4(x^2-4x+4)+4(y^2+3y+9/4)=-13+16+9=12 \Rightarrow \mathscr{C}_1: (x-2)^2+(y+3/2)^2=3$$

$$12(x^2-4x+4)+12(y^2+3y+9/4)=-55+48+27=20 \Rightarrow \mathscr{C}_2: (x-2)^2+(y+3/2)=5/3$$

Como el centro de ambas circunferencias es C(2 , -3/2), entonces son concéntricas.

7 Demostrar que las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2+y^2+4x+6y-23=0$ y $\mathscr{C}_2: x^2+y^2-8x-10y+25=0$ son tangentes.

Demostración. En efecto, pasando cada ecuación a su forma ordinaria obtenemos :

$$\mathscr{C}_1: (x+2)^2+(y+3)^2=36 \Rightarrow C_1(-2,-3) \text{ y } r_1=6$$

$$\mathscr{C}_2: (x-4)^2+(y-5)^2=16 \Rightarrow C_2(4,5) \text{ y } r_2=4$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(4+2)^2+(5+3)^2} = 10 = r_1+r_2$$

Como $d(C_1, C_2) = r_1+r_2$, las circunferencias dadas son tangentes. ■

8 Demostrar por dos métodos que las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2+y^2+2x-8y+13=0$ y $\mathscr{C}_2: 4x^2+4y^2-40x+8y+79=0$ no se cortan.

Demostración. En efecto, reduciendo cada ecuación a su forma ordinaria, se tiene;

$$\mathscr{C}_1 (x+1)^2+(y-4)^2=4 \Rightarrow C_1(-1,4) \text{ y } r_1=2$$

$$\mathscr{C}_2: (x-5)^2+(y+1)^2=25/2 \Rightarrow C_2(5,-1) \text{ y } r_2=5/2$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(5+1)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{61} > 2+5/2$$

Dado que $d(C_1, C_2) > r_1+r_2$, las circunferencias no se cortan.

El otro método consiste en resolver simultáneamente ambas ecuaciones y probar que $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \phi$. (Se deja para el lector) ■

En cada uno de los ejercicios del 9 al 11, determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos dados, usando la forma general de la ecuación de una circunferencia.

9 R(0 , 0) , S(3 , 6) y T(7 , 0)

La solución se deja para el lector

Sol. $x^2+y^2-7x-4y=0$, $C(7/2, 2)$, $r = \sqrt{65}/2$

10 R(2 , -2) , S(-1 , 4) , T(4 , 6)

Solución. Sea la ecuación de la circunferencia, $\mathscr{C}: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ en donde las constantes D , E y F deben ser halladas.

Como R(2 , -2) $\in \mathscr{C} \Rightarrow (2)^2 + (-2)^2 + 2D - 2E - F = 0 \Leftrightarrow 2D - 2E + F + 8 = 0$ (1)

S(-1 , 4) $\in \mathscr{C} \Rightarrow (-1)^2 + (4)^2 - D + 4E + F = 0 \Leftrightarrow -D + 4E + F + 17 = 0$ (2)

T(4 , 6) $\in \mathscr{C} \Rightarrow (4)^2 + (6)^2 + 4D + 6E + F = 0 \Leftrightarrow 4D + 6E + F + 52 = 0$ (3)

Restando (2) - (1) se tiene : $9 - 3D + 6E = 0 \Rightarrow 3 - D + 2E = 0$ (4)

Restando (3) - (2) se obtiene : $35 + 5D + 2E = 0$ (5)

La solución común de (4) y (5) es : D = -16/33 y E = -25/6 $\Rightarrow$ F = -17/3

Por lo que, $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} = 0 \Leftrightarrow \mathscr{C}: \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{12}\right) = \frac{2465}{144}$

de donde obtenemos : C(8/3 , 25/12) y $r = \frac{1}{12}\sqrt{2465}$ ■

11 R(4 , -1) , S(0 , -7) , T(-2 , -3)
Se deja como tarea para el lector.

Sol. $7x^2 + 7y^2 - 22x + 52y + 21 = 0$, C(11/7 , -26/7) , $r = 8\sqrt{26}/7$

12 Resolver el Ejercicio 9 por el método de las mediatrices.
Se deja para el lector. (Ver página 101 del texto de Lehmann)

13 Resolver el Ejercicio 10 por el método de la forma ordinaria.
Se deja para el lector (Ver página 107 del texto de Lehmann)

14 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos R(4 , -1) , S(0 , -7) y T(-2 , -3) usando el determinante del Teorema 4.3.

Solución. El determinante del Teorema 4.3 para este caso es :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 17 & 4 & -1 & 1 \\ 49 & 0 & -7 & 1 \\ 13 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Restando de la primera , segunda y tercera filas la cuarta fila , se tiene :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 & y+3 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 36 & 2 & -4 & 0 \\ 13 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la cuarta columna obtenemos

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 & y+3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 36 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (2)(2)\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 & y+3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 18 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicando por 2 la segunda fila y sumando el resultado a la tercera fila queda :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+13 & x+2 & y+3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 22 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ahora desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera columna :

$$(y+3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 22 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 \\ 22 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (y+3)(14-66)-(7x^2+7y^2-91-22x-44)=0 \Leftrightarrow 7x^2+7y^2-22x+52y+21=0$ ■

15 Por medio del Teorema 4.3, demostrar que los cuatro puntos (-1 , -1) , (2 , 8) , (5 , 7) y (7 , 3) son concíclicos.

Demostración. En efecto, el determinante del Teorema 4.3 para estos puntos es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 68 & 2 & 8 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \\ 58 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Restando de la primera fila, la segunda, tercera y cuarta filas se tiene :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 66 & 3 & 9 & 0 \\ 72 & 6 & 8 & 0 \\ 56 & 8 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la cuarta columna obtenemos

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 66 & 3 & 9 \\ 72 & 6 & 8 \\ 56 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -(3)(2)(4)\begin{vmatrix} 22 & 1 & 3 \\ 36 & 3 & 4 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Restando la segunda fila de la tercera fila queda :

$$\Delta = -24\begin{vmatrix} 22 & 1 & 3 \\ 22 & 1 & 3 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

El determinante tiene dos filas iguales, por lo que : $\Delta = -24(0) = 0$

Luego, los cuatro puntos dados están sobre una circunferencia, y por lo tanto, son concíclicos. ■

16 Resolver el Ejercicio 15 hallando la ecuación de la circunferencia que pasa por cualesquiera de los puntos y demostrar después que las coordenadas del cuatro punto satisfacen la ecuación.

Solución. Sea la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si $(-1, -1) \in \mathscr{C} \Rightarrow 1 + 1 - D - E + F = 0 \Rightarrow -D - E + F + 2 = 0$ (1)

$(2, 8) \in \mathscr{C} \Rightarrow 4 + 64 + 2D + 8E + F = 0 \Rightarrow 2D + 8E + F + 68 = 0$ (2)

$(5, 7) \in \mathscr{C} \Rightarrow 25 + 49 + 5D + 7E + F = 0 \Rightarrow 5D + 7E + F + 74 = 0$ (3)

La solución del sistema (1), (2) y (3) es : $D = -4$, $E = -6$ y $F = -12$

$$\therefore \ \mathscr{C}: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

Probaremos ahora que (7 , 3) está sobre esta circunferencia.

En efecto, si $(7, 3) \in \mathscr{C} \Rightarrow 49 + 9 - 4(7) - 6(3) - 12 = 0$

$\Rightarrow 58 - 28 - 18 - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ■

17 Las ecuaciones de dos circunferencias diferentes son $\mathscr{C}_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ y $\mathscr{C}_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$. Hallar las condiciones que deben satisfacer los coeficientes para que sean concéntricas.

Se deja al lector la tarea de resolver el problema. ***Sol.*** $D_1 = D_2$, $E_1 = E_2$ y $F_1 \neq F_2$

18 La ecuación de una circunferencia es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica que es tangente a la recta $\mathscr{L}: 5x - 12y = 1$.

Solución. Reduciendo a su forma ordinaria la ecuación de la circunferencia dada

obtenemos

$\mathscr{C}_1 : (x-2)^2 + (y+5/2)^2 = 4 \Rightarrow C_1(2, -5/2)$ y $r_1 = 2$

Como las circunferencias son concéntricas, entonces

$$r = |d(C_1, \mathscr{L})| = \frac{|5(2) - 12(-5/2) - 11|}{\sqrt{25+144}} = 3$$

Por tanto, la ecuación buscada es

$$\mathscr{C}: (x-2)^2 + (y+5/2)^2 = 9$$ ■

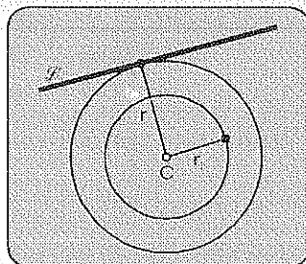


FIGURA 4.7

19 Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$, en el punto T(4 , 5).

Solución. Centro de la circunferencia : $C(-D/2, -E/2) \Rightarrow C(-1, 1)$

Siendo T el punto de tangencia, la pendiente del radio $\overline{CT}$ es

$m_{CT} = \frac{5-1}{4+1} = \frac{4}{5}$. Como $\overline{CT} \perp \mathscr{L}$ (recta tangente) $\Rightarrow m_{\mathscr{L}} = -5/4$

Por lo que, su ecuación es : $y - 5 = -\frac{5}{4}(x-4) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 5x + 4y - 40 = 0$ ■

20 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(11 , 4) y es tangente a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

Solución. Reduciendo la ecuación de la circunferencia a su forma ordinaria obtenemos

$\mathscr{C}: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \Rightarrow r = 5$ y $C(4, 3)$

Las rectas tangentes que pasan por P tienen por ecuación $y - 4 = m(x - 11) \Leftrightarrow \mathscr{L}: mx - y + 4 - 11m = 0$

Como $r = |d(C, \mathscr{L}) \Rightarrow 5 = \frac{|4m - 3 + 4 - 11m|}{\sqrt{m^2+1}}$

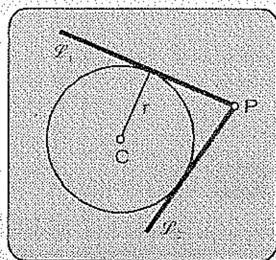


FIGURA 4.8

de donde : $12m^2 - 7m + 12 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -3/4\ m_2 \vee m_2 = 4/3$

Sustituyendo ambos valores en $\mathscr{L}$, se tienen las ecuaciones de las dos tangentes

$$\mathscr{L}_1 : 3x + 4y - 49 = 0 \quad \vee \quad \mathscr{L}_2 : 4x - 3y - 32 = 0$$ ■

21 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(-1 , -4) y B(2 , -1) y cuyo centro está sobre la recta $\mathscr{L}: 4x + 7y + 5 = 0$

Solución. Si $C(h, k) \in \mathscr{L} \Rightarrow 4h + 7k + 5 = 0$ (1)

Como A y B $\in \mathscr{C} \Rightarrow r = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$

$$\Rightarrow \sqrt{(h+1)^2+(k+4)^2} = \sqrt{(h-2)^2+(k+1)^2} \Leftrightarrow h+k+2=0 \quad (2)$$

La solución del sistema formado por (1) y (2) da : $h = -3$ y $k = 1 \Rightarrow C(-3, 1)$

El radio es : $r = \sqrt{(-3+1)^2+(1+4)^2} = \sqrt{29}$

Por tanto, la ecuación buscada es , $\mathscr{C}: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 29$ ■

22 Una circunferencia de radio 5 es tangente a la recta $\mathscr{L}: 3x - 4y - 1 = 0$ en el punto A(3 , 2). Hallar su ecuación.

Solución. La pendiente de $\overline{AC}$ es : $m_1 = \dfrac{k-2}{h-3}$

$$\text{Como } \overline{AC} \perp \mathscr{L} \Rightarrow \frac{k-2}{h-3} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 4h + 3k - 18 = 0 \quad (1)$$

Si $r = |d(C, \mathscr{L})| \Rightarrow 5 = \dfrac{|3h-4k-1|}{5}$

$\Rightarrow |3h - 4k - 1| = 25$

$\Leftrightarrow (3h - 4k - 1 = 25) \vee (3h - 4k - 1 = -25)$

$\Leftrightarrow (3h - 4k - 26 = 0) \vee (3h - 4k + 24 = 0)$

Luego : $(4h + 3k - 18 = 0) \cap (3h - 4k - 26 = 0) = C_1(6, -2)$

$(4h + 3k - 18 = 0) \cap (3h - 4k + 24 = 0) = C_2(0, 6)$

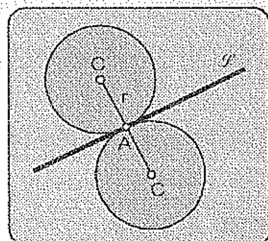


FIGURA 4.9

Por tanto, las ecuaciones de las circunferencias son

$$\mathscr{C}_1: (x-6)^2 + (y+2)^2 = 25 \quad \vee \quad \mathscr{C}_2: x^2 + (y-6)^2 = 25$$ ■

23 Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$ en el punto A(6 , 5). Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

Solución. Centro de la circunferencia $\mathscr{C}$:

$C(-D/2, -E/2) \Rightarrow C(2, -1)$

Sea $C_1(h, k)$ el centro de la circunferencia buscada.

Luego, si : $|\overline{AC_1}| = r_1 \Rightarrow \sqrt{(h-6)^2+(k-5)^2} = \sqrt{13}$ (1)

Dado que los puntos C , C_1 y A son colineales, entonces

$$m_{CA} = m_{C_1A} \Rightarrow \frac{5+1}{6-2} = \frac{k-5}{h-6} \Leftrightarrow 3h - 2k - 4 = 0 \quad (2)$$

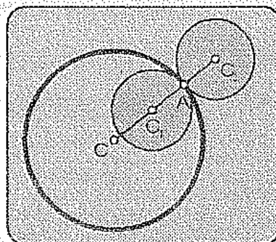


FIGURA 4.10

La solución común del sistema (1) y (2) es :

$$(h_1 = 4 \text{ ó } h_2 = 8) \vee (k_1 = 2 \text{ ó } k_2 = 8)$$

Por lo que los centros de las dos circunferencias son $C_1(4 , 2)$ y $C_2(8 , 8)$, y sus ecuaciones

$$\mathscr{C}_1 : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 13 \vee \mathscr{C}_2 : (x-8)^2 + (y-8)^2 = 13$$ ■

24 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(1 , 4) y es tangente a la circunferencia $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ en el punto T(-2 , 1).

Solución. Centro de la circunferencia $\mathscr{C}_1$: $C_1(-3 , -1)$

Pendiente de $\overline{C_1T}$ = Pendiente de $\overline{TC}$

$$\Rightarrow \frac{1+1}{-2+3} = \frac{k-1}{h+2} \Leftrightarrow 2h - k + 5 = 0 \quad (1)$$

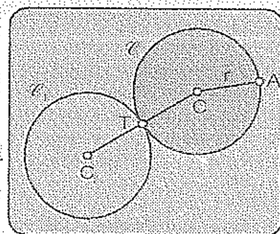


FIGURA 4.11

$$r = |\overline{AC}| = |\overline{TC}| \Rightarrow \sqrt{(h-1)^2 + (k-4)^2} = \sqrt{(h+2)^2 + (k-1)^2}$$

de donde : $\quad h + k - 2 = 0 \quad (2)$

La solución común de (1) y (2) es : $h = -1$ y $k = 3$

$$r = |\overline{AC}| = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}$$

Por tanto, la ecuación buscada es , $\mathscr{C}: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$ ■

25 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(5 , 9) y es tangente a la recta $\mathscr{L}: x + 2y - 3 = 0$ en el punto B(1 , 1).

Solución. Sea C(h , k) el centro de la circunferencia buscada

$$\text{Si } \overline{BC} \perp \mathscr{L} \Rightarrow \left(\frac{k-1}{h-1}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

de donde se tiene : $2h - k - 1 = 0 \quad (1)$

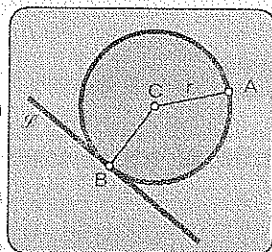


FIGURA 4.12

Como A y B ∈ $\mathscr{C} \Rightarrow r = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, esto es :

$$\sqrt{(h-5)^2 + (k-9)^2} = \sqrt{(h-1)^2 + (k-1)^2} \Rightarrow h + 2k - 13 = 0 \ (2)$$

De (1) y (2) , por simultáneas , obtenemos : C(3 , 5)

$$\Rightarrow r = |\overline{AC}| = \sqrt{(3-5)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{20}$$

$$\therefore \mathscr{C}: (x-3)^2 + (y-5)^2 = 20$$ ■

26 Una circunferencia de radio 5 pasa por los puntos A(0 , 2) y B(7 , 3). Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

Solución. Sea C(h , k) el centro de la circunferencia $\mathscr{C}$.

Como A y B $\in \mathscr{C} \Rightarrow r = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$

Si $r = |\overline{AC}| \Rightarrow 5 = \sqrt{(h-0)^2 + (k-2)^2} \Leftrightarrow h^2 + k^2 - 4k - 21 = 0$ (1)

y si $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| \Rightarrow \sqrt{(h-0)^2 + (k-2)^2} = \sqrt{(h-7)^2 + (k-3)^2} \Leftrightarrow 7h + k - 27 = 0$ (2)

Las soluciones comunes del sistema de ecuaciones (1) y (2) son :

$$(h_1 = 4 \lor h_2 = 3) \text{ y } (k_1 = -1 \lor k_2 = 8)$$

Por tanto, las ecuaciones de las dos circunferencias buscadas son

$$\mathscr{C}_1 : (x-4)^2 + (y+1)^2 = 25 \text{ ó } \mathscr{C}_2 : (x-2)^2 + (y-6)^2 = 25$$ ■

27 Demostrar, analíticamente, que cualquier recta que pasa por P(-2 , 5) no puede ser tangente a la circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$. Interpretar geométricamente el resultado.

Demostración. Bastará probar que $|d(P , C)| < r$

En efecto, reduciendo la ecuación de la circunferencia a su forma ordinaria, se tiene, $\mathscr{C} : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 7 \Rightarrow C(-2 , 3)$ y $r = \sqrt{7}$

$$|d(P , C)| = \sqrt{(-2+1))^2 + (3-5)^2} = \sqrt{5}$$

Como $|d(P , C)| < r$, entonces queda demostrado que no se puede trazar tangentes desde P a la circunferencia.

La interpretación geométrica del resultado es que el punto P se encuentra en el interior de la circunferencia. ■

28 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta $\mathscr{L} : 7x - 2y - 1 = 0$ y que es tangente a cada una de las rectas $\mathscr{L}_1 : 5x - 12y + 5 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 4x + 3y - 3 = 0$.

Solución. Sea C(h , k) el centro de la circunferencia buscada. Si $C \in \mathscr{L} \Rightarrow 7h - 2k - 1 = 0$ (1)

Dado que $\mathscr{C}$ es tangente a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, entonces

$$r = |d(C , \mathscr{L}_1)| = |d(C , \mathscr{L}_2)|$$

$$\Rightarrow \frac{|5h - 12k + 5|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|4h + 3k - 3|}{\sqrt{16 + 9}}$$

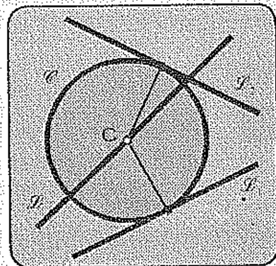


FIGURA 4.13

$\Rightarrow 5|5h - 12k + 5| = 13|4h + 3k - 3|$

$\Leftrightarrow 27h + 99k - 64 = 0 \vee 11h - 3k - 2 = 0$ (2)

Interceptando (1) con el sistema de ecuaciones (2), se tiene :

$(7h - 2k - 1 = 0) \cap (27h + 99k - 64 = 0) = C_1(227/747 , 421/747)$

$(7h - 2k - 1 = 0) \cap (11h - 3k - 2 = 0) = C_2(1 , 3)$

$$r_1 = |d(C_1 , \mathscr{L}_2)| = \frac{\left|4\left(\frac{227}{747}\right) + 3\left(\frac{421}{747}\right) - 3\right|}{\sqrt{16+9}} = \frac{14}{747}$$

$$r_2 = |d(C_2 , \mathscr{L}_2)| = \frac{|4(1) + 3(3) - 3|}{5} = 2$$

Por tanto, las ecuaciones de las dos circunferencias son

$$\mathscr{C}_1 : \left(x - \frac{227}{747}\right)^2 + \left(y - \frac{421}{747}\right)^2 = \left(\frac{14}{747}\right)^2 \; ; \; \mathscr{C}_2 : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$ ■

29 Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos lados son $\mathscr{L}_1 : 4x - 3y = 0$, $\mathscr{L}_2 : 4x + 3y - 8 = 0$ y $\mathscr{L}_3 : y = 0$

Solución. Para la bisectriz del ángulo A, las distancias dirigidas del punto C(h , k) a los lados $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ del ΔOAB, son : $-d(C , \mathscr{L}_1) = -d(C , \mathscr{L}_2)$

$\Rightarrow -\frac{4h - 3k}{-5} = -\frac{4h + 3k - 8}{5}$, de donde : $h = 1$

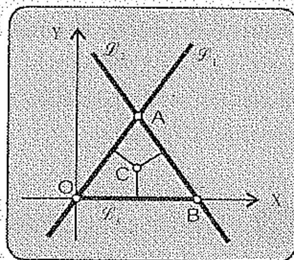


FIGURA 4.14

Análogamente, para la bisectriz del ángulo O

$-d(C , \mathscr{L}_1) = d(C , \mathscr{L}_3) \Rightarrow \frac{4h - 3k}{-5} = k$

$\Leftrightarrow h - 2k = 0 \Rightarrow k = 1/2$

Dado que $r = |d(C , \mathscr{L}_3)| = |k| \Rightarrow r = 1/2$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathscr{C} : (x-1)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$$ ■

30 Una circunferencia que es tangente a un lado de un triángulo y a las prolongaciones de los otros dos lados se llama *exinscrita* al triángulo. Hallar las ecuaciones de las tres circunferencias exinscritas al triángulo del Ejercicio 29.

(Se deja como tarea para el lector.) ***Sol.*** $\mathscr{C}_1 : (x - 8/3)^2 + (y - 4/3)^2 = 16/9$;

$\mathscr{C}_2 : (x + 2/3)^2 + (y - 4/3)^2 = 16/9$; $\mathscr{C}_3 (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

31 Determinar el valor de la constante k para que la recta $\mathscr{L}: 2x + 3y + k = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$

Solución. Reduciendo la ecuación dada a su forma ordinaria se tiene

$$\mathscr{C}: (x+3)^2 + (y+2)^2 = 13 \Rightarrow C(-3\,,-2) \text{ y } r = \sqrt{13}$$

Si $\mathscr{L}$ es tangente a $\mathscr{C}$, se debe cumplir que : $r = |d(C\,,\mathscr{L})|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13} = \frac{|2(-3)+3(-2)+k|}{\sqrt{4+9}} \Leftrightarrow |k-12| = 13 \Leftrightarrow (k-12=13) \vee (k-12=-13)$$

$$\Leftrightarrow k = 25 \vee k = -1$$ ■

32 Hallar las ecuaciones de las rectas que tienen pendiente 5 y son tangentes a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$

Solución. Las ecuaciones de las tangentes tienen la forma

$$y = mx + b \Rightarrow y = 5x + b \Leftrightarrow \mathscr{L}: 5x - y + b = 0 \qquad (1)$$

Si $\mathscr{C}: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 26 \Rightarrow C(4\,,-1)$ y $r = \sqrt{26}$

Como $r = |d(C\,,\mathscr{L})| \Rightarrow \sqrt{26} = \dfrac{|5(4)-(-1)+b|}{\sqrt{25+1}}$

$$\Leftrightarrow (b+21 = 26) \vee (b+21 = -26) \Leftrightarrow b = 5 \vee b = -47$$

Por tanto, en (1) , obtenemos las ecuaciones de las tangentes buscadas

$$\mathscr{L}_1: 5x - y + 5 = 0 \vee \mathscr{L}_2: 5x - y - 47 = 0$$ ■

33 Desde el punto A(-2 , -1) se traza una tangente a la circunferencia $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$. Si B es el punto de contacto, hallar la longitud del segmento $\overline{AB}$.

Solución. Reduciendo la ecuación dada a su forma ordinaria resulta que :

$\mathscr{C}: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16 \Rightarrow C(3\,,2)$ y $r = 4$

Luego : $|\overline{AC}| = \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}$

En el ΔABC : $|\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{AB}|^2$ (Pitágoras)

$$\Rightarrow 34 = 16 + |\overline{AB}|^2 \Rightarrow |\overline{AB}| = 3\sqrt{2}$$ ■

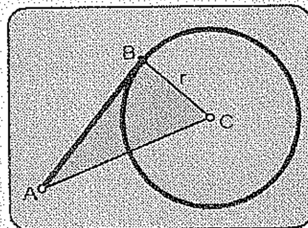


FIGURA 4.15

34 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(6 , 1) y es tangente a cada una de las rectas $\mathscr{L}_1 : 4x - 3y + 6 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 12x + 5y - 2 = 0$. (Dos soluciones.)

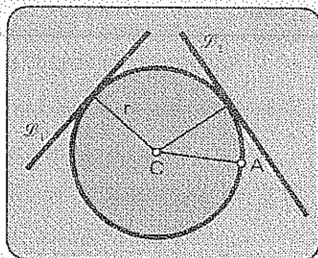


FIGURA 4.16

Solución. Si C(h , k) es el centro de la circunferencia

$$\Rightarrow r = |d(C, \mathscr{L}_1)| = |d(C, \mathscr{L}_2)| = |\overline{AC}|$$

$$|d(C, \mathscr{L}_1)| = |d(C, \mathscr{L}_2)| \Rightarrow \frac{|4h - 3k + 6|}{5} = \frac{|12h + 5k - 2|}{13}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13(4h - 3k + 6) = 5(12h + 5k - 2) \Rightarrow h + 8k - 11 = 0 & (1) \\ 13(4h - 3k + 6) = -5(12h + 5k - 2) \Rightarrow 56h - 7k + 34 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$|\overline{AC}| = |d(C, \mathscr{L}_1)| \Rightarrow \sqrt{(h - 6)^2 + (k - 1)^2} = \frac{|4h - 3k + 6|}{5}$$

de donde : $9h^2 + 16k^2 + 24hk - 348h - 14k + 889 = 0$ (3)

De (1) ∩ (3) se tiene : $(h_1 = 3 \text{ ó } h_2 = 48) \vee (k_1 = 1 \text{ ó } k_2 = -37/8)$

mientras que , (2) ∩ (3) = ϕ

Luego, los centros de las circunferencias son : $C_1(3 , 1)$ y $C_2(48 , -37/8)$

y sus respectivos radios : $r_1 = \dfrac{|4(3) - 3(1) + 6|}{\sqrt{16 + 9}} = 3$

$$r_2 = \frac{|4(48) - 3(-37/8) + 6|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{339}{8}$$

Por tanto, las ecuaciones de las dos circunferencias buscadas son

$$\mathscr{C}_1 : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9 \text{ ó } \mathscr{C}_2 : (x - 48)^2 + (y + 37/8)^2 = (339/8)^2$$ ■

35 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(-3 , -1) y B(5 , 3) y es tangente a la recta $\mathscr{L} : x + 2y - 13 = 0$

Solución. Sea C(h , k) el centro de la circunferencia.

Como A y B ∈ $\mathscr{L}$ ⇒ $r = |\overline{AC}| = |\overline{BC}| = |d(C, \mathscr{L})|$

Si $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| \Rightarrow \sqrt{(h + 3)^2 + (k + 1)^2} = \sqrt{(h - 5)^2 + (k - 3)^2}$

de donde se tiene : $2h + k - 3 = 0$ (1)

y si $|\overline{AC}| = |d(C, \mathscr{L})| \Rightarrow \sqrt{(h + 3)^2 + (k + 1)^2} = \dfrac{|h + 2k - 13|}{\sqrt{1 + 4}}$

de donde : $4h^2 + k^2 - 4hk + 56h + 62k - 119 = 0$ (2)

Las soluciones comunes de (1) y (2) son :

$(h_1 = 1 \text{ ó } h_2 = 19/4) \vee (k_1 = 1 \text{ ó } k_2 = -13/2)$.

Luego, los centros son $C_1(1, 1)$ y $C_2(19/4, -13/2)$

y los respectivos radios son :

$$r_1 = |d(C_1, \mathscr{L})| = \frac{|1 + 2(1) - 13|}{\sqrt{1+4}} = 2\sqrt{5}$$

$$r_2 = |d(C_2, \mathscr{L})| = \frac{|(19/4) + 2(-13/2) - 13|}{\sqrt{1+4}} = \frac{17\sqrt{5}}{4}$$

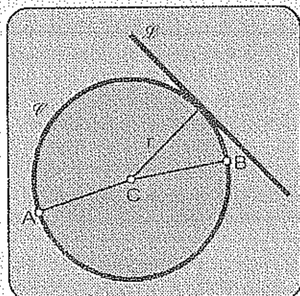


FIGURA 4.17

Por tanto, las ecuaciones de las circunferencias buscadas son :

$$\mathscr{C}_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 20 \vee \mathscr{C}_2 = (x - 19/4)^2 + (y + 13/2)^2 = 1445/16$$ ■

4.4 FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR LA INTERSECCION DE DOS CIRCUNFERENCIAS

TEOREMA 4.4. Si las ecuaciones de dos circunferencia dadas cualesquiera son

$$\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \text{ y } \mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0 \quad (1)$$

representa una familia de circunferencias todas las cuales tienen sus centros en la recta de los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

Se presentan los siguientes casos

a) Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ se cortan en dos puntos diferentes, la ecuación (1) representa $\forall k \neq -1$, las circunferencias que pasan por los dos puntos de intersección de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Ocurre que :

$$d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$$

(La distancia entre los centros es menor que la suma de los radios).

b) Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes entre si, la ecuación representa , $\forall k \neq -1$, todas las circunferencias que son tangentes a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en su punto común. Entonces ocurre que :

$$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$$

c) Si $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ no tienen ningún punto común la ecuación (1) representa una circunferencia para cada valor de $k \neq -1$. En este caso ocurre que

$$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$$

4.4.1 EJE RADICAL

Si en la ecuación (1) hacemos $k = -1$, la ecuación resultante toma la forma

$$\mathscr{L} : (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0 \qquad (2)$$

y representa la ecuación de una recta llamada *eje radical* de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. En el caso (a), la ecuación (2) es su *cuerda común*, en el caso (b), es su *tangente común* y el caso (c) el eje radical no tiene ningún punto común con ninguna de las dos circunferencias. En todos los casos, el eje radical es perpendicular a la línea que une los centros de las circunferencias. Es también el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes trazadas por él a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son iguales.

EJERCICIOS . Grupo 17

6 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(-8 , 5) y por las intersecciones de las circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67 = 0$

Solución. La circunferencia buscada $\mathscr{C}_3$ es un miembro de la familia

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 + k(x^2 + y^2 - 18x - 4y + 67) = 0 \qquad (1)$$

en donde el parámetro k debe determinarse por la condición de que $\mathscr{C}_3$ pasa por A, esto es, si $A(-8, 5) \in \mathscr{C} \Rightarrow 64 + 25 + 64 - 30 + 17 + k(64 + 25 + 144 - 20 + 67) = 0$

$$\Rightarrow 140 + k(280) = 0 \Leftrightarrow k = -1/2$$

Sustituyendo este valor en (1), obtenemos la ecuación para $\mathscr{C}_3$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 33 = 0$$ ■

7 Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre el eje X y pasa por la intersección de las circunferencias del Ejercicio 6.

Solución. El haz de circunferencias que pasan por $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ es :

$$\mathscr{C} : (1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - 2(4 + 9k)x - 2(3 + 2k)y + 17 + 67k = 0 \qquad (1)$$

o bien ; $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - \frac{2(4+9k)}{1+k}x - \frac{2(3+2k)}{1+k}y + \frac{17+67k}{1+k} = 0$

El centro de cualquier miembro de la familia (1) es $C\left(\frac{4+9k}{1+k}, \frac{3+2k}{1+k}\right)$

Si un elemento tiene su centro sobre el eje X $\Rightarrow 3 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = -3/2$
Sustituyendo en (1), obtenemos la ecuación de la circunferencia buscada

$$\mathscr{C}_3 : x^2 + y^2 - 38x + 167 = 0$$ ■

8 Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el eje Y y que pasa por la intersección de las dos circunferencias del Ejercicio 6.

Solución. Del ejercicio anterior : $C\left(\frac{4+9k}{1+k}, \frac{3+2k}{1+k}\right)$

Si un miembro de la familia tiene su centro en el eje Y, entonces

$$4 + 9k = 0 \Leftrightarrow k = -4/9$$

Sustituyendo este valor en (1) del Ejercicio 6, obtenemos la ecuación buscada

$$\mathscr{C}_3 : 5x^2 + 5y^2 - 38y - 115 = 0$$ ■

9 Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $\mathscr{L} : 2x + y - 14 = 0$ y que pasa por la intersección de las circunferencia $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$.

Solución. Sea la ecuación de la familia de circunferencias

$$\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + k(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) = 0 \qquad (1)$$

o bien, $\mathscr{C}: (1+k)x^2 + (1+k)y^2 - 2(4+2k)x - 2(2-2k)y + 11 - 8k = 0$

$$\Leftrightarrow \mathscr{C}: x^2 + y^2 - \frac{2(4+2k)}{1+k}x - \frac{2(2-2k)}{1+k}y + \frac{11-8k}{1+k} = 0$$

Si C(-D/2, -E/2), el centro de la familia es : $C\left(\frac{4+2k}{1+k}, \frac{2-2k}{1+k}\right)$

Como un elemento $\mathscr{C}_3$ de esta familia tiene su centro en la recta $\mathscr{L}$, esto es , si $C_3 \in \mathscr{L}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{4+2k}{1+k}, \frac{2-2k}{1+k}\right) - 14 = 0$, de donde : $k = -1/3$

Sustituyendo este valor de k en (1) obtenemos la ecuación de

$$\mathscr{C}_3 : 2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 = 0$$ ■

10 Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $5\sqrt{2}/2$ y que pasa por la intersección de las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2+y^2+2x-6y-16=0$ y $\mathscr{C}_2: x^2+y^2-6x+2y=0$ (Dos soluciones.)

Solución. Sea la familia de circunferencias

$$\mathscr{C}: x^2+y^2+2x-6y-16+k(x^2+y^2-6x+2y)=0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{C}: x^2+y^2+\frac{2(1-3k)}{1+k}x-\frac{2(3-k)}{1+k}y-\frac{16}{1+k}=0$$

Dado que un miembro de la familia (1) tiene como radio $r=5\sqrt{2}/2$, y si

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(1-3k)^2}{(1+k)^2}+\frac{4(3-k)^2}{(1+k)^2}+\frac{64}{1+k}}$$

de donde : $5k^2+42k-27=0 \Leftrightarrow k=-9$ o $k=3/5$

Sustituyendo cada uno de estos valores de k en (1) obtenemos dos soluciones

$$\mathscr{C}_3: x^2+y^2-7x+3y+2=0 \text{ ó } \mathscr{C}_4: x^2+y^2-x-3y-10=0$$ ■

11 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por las intersecciones de las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2+y^2-6x+4=0$ y $\mathscr{C}_2: x^2+y^2-2=0$, y que es tangente a la recta $\mathscr{L}: x+3y-14=0$. (Dos soluciones.)

Solución. Sea la ecuación de la familia de circunferencias

$$\mathscr{C}: x^2+y^2-6x+4+k(x^2+y^2-2)=0 \qquad (1)$$

o bien, $\mathscr{C}: x^2+y^2-\left(\frac{6}{1+k}\right)x+\frac{4-2k}{1+k}=0 \Rightarrow C\left(\frac{3}{1+k}, 0\right)$

Si $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} \Rightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{36}{(1+k)^2}-4\left(\frac{4-2k}{1+k}\right)}$

y dado que : $r=|d(C,\mathscr{L})| \Rightarrow \frac{\sqrt{36-4(4-2k)(1+k)}}{2|1+k|}=\frac{\left|\frac{3}{1+k}+3(0)-14\right|}{\sqrt{1+9}}$

de donde, efectuando operaciones resulta la ecuación :

$$176k^2+328k+71=0 \Rightarrow (4k+1)(44k+71)=0 \Leftrightarrow k=-1/4 \text{ ó } k=-71/44$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos las dos soluciones buscadas

$$\mathscr{C}_3: x^2+y^2-8x+6=0 \text{ ó } \mathscr{C}_4: 9x^2+9y^2+88x-106=0$$ ■

13 Demostrar que las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2+y^2-3x-6y+10=0$ y $\mathscr{C}_2: x^2+y^2-5=0$, son tangentes. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en su punto común y que pasa por el punto A(7 , 2). Demostrar que el centro de esta circunferencia está sobre la recta de los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$

Demostración. Bastará probar que : $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

En efecto, $\mathscr{C}_1: (x-3/2)^2+(y-3)^2 = 5/4 \Rightarrow C_1(3/2, 3)$ y $r_1 = \sqrt{5}/2$

$\mathscr{C}_2: x^2+y^2 = 5 \Rightarrow C_2(0,0)$ y $r_2 = \sqrt{5}$

Luego : $d(C_1, C_2) = \sqrt{(3/2-0)^2+(3-0)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

Como $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$, las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son tangentes.

La circunferencia $\mathscr{C}_3$ es un miembro de la familia

$$\mathscr{C}: x^2+y^2-3x-6y+10+k(x^2+y^2-5) = 0$$

Si $A(7,2) \in \mathscr{C}_3 \Rightarrow 49+4-21-12+10+k(49+4-5) = 0 \Leftrightarrow k = -5/8$

Sustituyendo este valor en (1) obtenemos , $\mathscr{C}_3: x^2+y^2-8x-16y+35=0 \Rightarrow C_3(4, 8)$

Ecuación de la recta que pasa por C_1 y C_2 : $y-0 = \frac{3}{3/2}(x-0) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 2x-y = 0$

Si $C_3(4,8) \in \mathscr{L} \Rightarrow 2(4)-8 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Por tanto, C_3 está sobre la recta de los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ ■

14 Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ del Ejercicios 13 en su punto común y cuyo centro está sobre la recta $\mathscr{L}: 3x+y+5=0$

Solución. Si $\mathscr{C}: x^2+y^2-3x-6y+10+k(x^2+y^2-5) = 0$ (1)

$$\Rightarrow \mathscr{C}: x^2+y^2-\left(\frac{3}{1+k}\right)x-\left(\frac{6}{1+k}\right)y+\frac{10-5k}{1+k} = 0$$

El centro de la familia de circunferencias es : $C\left(\frac{3}{2(1+k)}, \frac{3}{1+k}\right)$

Si $\mathscr{C}_3$ es un elemento de la familia cuyo centro está sobre la recta $\mathscr{L}$, entonces

$C_3 \in \mathscr{L} \Leftrightarrow 3\left(\frac{3}{2(1+k)}\right)+\left(\frac{3}{1+k}\right)+5 = 0$, de donde : $k = -5/2$

Sustituyendo este valor en (1), obtenemos la ecuación buscada

$$\mathscr{C}_3: x^2+y^2+2x+4y-15 = 0$$ ■

15 Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ del Ejercicio 13 en su punto común y cuyo radio es igual a $3\sqrt{5}/2$.

Solución. Del Ejercicios 14 , $\mathscr{C}: x^2+y^2-\left(\frac{3}{1+k}\right)x-\left(\frac{6}{1+k}\right)y+\frac{10-5k}{1+k}=0$

Dado que :

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{5}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{(1+k)^2}+\frac{36}{(1+k)^2}-\frac{4(10-5k)}{1+k}}$$

de donde : $5k^2+22k+8=0 \Leftrightarrow k=-4$ ó $k=-2/5$

Sustituyendo estos valores en (1) del Ejercicio 14 , obtenemos

$$\mathscr{C}_3: x^2+y^2+x+2y-10=0 \quad ó \quad \mathscr{C}_4: x^2+y^2-5x-10y+20=0$$ ■

16 Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ del Ejercicio 13 en su punto común y que es tangente a la recta $\mathscr{L}: x-2y-1=0$.

Solución. Si $\mathscr{C}: x^2+y^2-3x-6y+10+k(x^2+y^2-5)=0$ (1)

las coordenadas del centro son $C\left(\frac{3}{2(1+k)}, \frac{3}{1+4}\right)$ (Ejercicio 14)

y el radio $r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{(1+k)^2}+\frac{36}{(1+k)^2}-\frac{4(10-5k)}{1+k}}=\frac{\sqrt{45-20(2-k)(1+k)}}{2(1+k)}$

Además , $r=|d(C,\mathscr{L})| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{45-20(2-k)(1+k)}}{2(1+k)}=\frac{\left|\frac{3}{2(1+k)}-\frac{6}{1+k}-1\right|}{\sqrt{1+4}}$

de donde resulta la ecuación : $2k^2-3k-2=0 \Leftrightarrow k=2$ ó $k=-1/2$

Sustituyendo cada uno de estos valores de k en (1), obtenemos dos soluciones

$$\mathscr{C}_3: x^2+y^2-x-2y=0 \quad ó \quad \mathscr{C}_4: x^2+y^2-6x-12y+25=0$$ ■

17 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(-10 , -2) y por la intersección de la circunferencia $\mathscr{C}: x^2+y^2+2x-2y-32=0$ y la recta $\mathscr{L}: x-y+4=0$

Solución. Sea la ecuación de la familia : $x^2+y^2+2x-2y-32+k(x-y+4)=0$ (1)

Un elemento $\mathscr{C}_1$ de esta familia pasa por el punto A, esto es, si A(-10 , -2) ∈ $\mathscr{C}_1 \Rightarrow 100+4-20+4-32+k(-10+2+4)=0$, de donde : $k=14$

Sustituyendo este valor de k en (1), obtenemos la ecuación buscada

$$\mathscr{C}_1: x^2+y^2+16x-16y+24=0$$ ■

18 Demostrar que las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2+y^2-2x-2y-2=0$ y $\mathscr{C}_2: x^2+y^2+10x-6y+33=0$ no se cortan. Demostrar que para k = -2 el elemento correspondiente de la familia $\mathscr{C}_1 + k\,\mathscr{C}_2 = 0$ es una circunferencia que no corta a ninguna de las dos circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, y cuyo centro está sobre la recta de los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Demuéstrese, también, que no existe ninguna circunferencia real si k toma uno cualquiera de los valores 1, 2, 3. Hállense otros valores de k para los cuales no exista circunferencia real.

(La demostración se deja para el lector.)

19 Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2+y^2-2x-10y+10=0$ y $\mathscr{C}_2: 4x^2+4y^2-32x-12y+37=0$, y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

Solución. Multiplicando por 4 la ecuación de $\mathscr{C}_1$ se tiene

$\mathscr{C}_1: 4x^2+4y^2-8x-40y+40=0$

Restando las ecuaciones de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ obtenemos la ecuación del eje radical

$$\mathscr{L}: 24x-28y+3=0 \Rightarrow m=\frac{24}{28}=\frac{6}{7}$$

Los centros de las circunferencia son : $C_1(1, 5)$ y $C_2(4, 3/2)$

Pendiente del segmento $\overline{C_1C_2}$: $m_1=\dfrac{3/2-5}{4-1}=-\dfrac{7}{6}$

Dado que : $m \cdot m_1 = \left(\frac{6}{7}\right) - \left(\frac{7}{6}\right) = -1 \Rightarrow \mathscr{L} \perp \overline{C_1C_2}$ ■

20 Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias $\mathscr{C}_1: 9x^2+9y^2-54x-48y+64=0$, $\mathscr{C}_2: x^2+y^2+8x-10y+37=0$, y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

(La solución se deja al lector.) *Sol.* $\mathscr{L}: 126x-42y+269=0$

21 Hallar la ecuación y la longitud de la cuerda común de las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2+y^2-8y+6=0$ y $\mathscr{C}_2: x^2+y^2-14x-6y+38=0$

Solución. Restando las ecuaciones $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2$, se tiene la ecuación de la cuerda común, esto es, $\mathscr{L}: 7x-y-16=0$

Interceptando $\mathscr{L}$ con cualquiera de las dos circunferencias obtenemos los extremos de esta cuerda. Luego : $\mathscr{L} \cap \mathscr{C}_1 = A(3, 5)$ y $B(13/5, 11/5)$

$$\therefore\ |AB| = \sqrt{(3-13/5)^2+(5-11/5)^2} = 2\sqrt{2}$$ ■

22 Demostrar analíticamente que si dos circunferencias diferentes son concéntricas, su eje radical no existe.

Demostración. En efecto, sean las circunferencias

$$\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \text{ y } \mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

Restando $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2$ se halla la ecuación del eje radical.

$$\mathscr{L}: (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0 \qquad (1)$$

Las coordenadas de los centro de las circunferencias son

$$C_1(-D_1/2 , -E_1/2) \text{ y } C_2(-D_2/2 , -E_2/2)$$

Dado que $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son concéntricas, entonces $D_1 = D_2$ y $E_1 = E_2$

Si sustituimos estos resultados en (1) se anulan los coeficientes de las variables x e y, por tanto, no existe el eje radical. ■

23 Hallar la longitud de las tangente trazada del punto P(3 , 4) a la circunferencia $\mathscr{C}: 3x^2 + 3y^2 + 12x + 4y - 35 = 0$

Solución. Para deducir una propiedad importante del eje radical, consideremos la circunferencia $\mathscr{C}: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, el punto exterior $P(x_1 , y_1)$ y el punto de tangencia T, de modo que $t = |\overline{TP}|$.

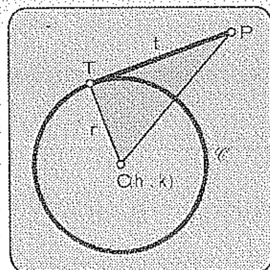


FIGURA 4.18

Dado que $\overline{PT}$ es tangente a la circunferencia , el radio $\overline{CT} \perp \overline{PT}$. Por tanto, en el triángulo rectángulo CTP, tendremos :

$$t^2 = \overline{CP}^2 - r^2 \qquad (1)$$

Como $|\overline{CP}| = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} \Rightarrow |\overline{CP}|^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1) , da

$t^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2 \Rightarrow t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$

Entonces, reduciendo la ecuación de la circunferencia dada a su forma ordinaria, se tiene , $\mathscr{C}: (x - 2)^2 + (y + 2/3) = 145/9 \Rightarrow h = -2$, $k = -2/3$ y $r^2 = 145/9$.

Si $P(3 , 4) \Rightarrow x_1 = 3$, $y_1 = 4$. Luego, en la fórmula hallada :

$$t = \sqrt{(3 + 2)^2 + (4 + 2/3)^2 - 145/9} = \frac{2}{3}\sqrt{69}$$ ■

24 Hallar la longitud de la tangente trazada del punto P(-1 , 3) a la circunferencia $\mathscr{C}: 3x^2 + 3y^2 - 14x - 15y + 23 = 0$

(Se deja como ejercicio para el lector) ***Sol.*** $t = \sqrt{291}/6$

25 Obtener las coordenadas de un punto que se encuentra sobre el eje radical del Ejercicio 19, y demostrar que las longitudes de las tangentes trazadas de ese punto a las dos circunferencias son iguales.

Solución. Reduciendo ambas ecuaciones a su forma ordinaria tendremos :

$$\mathscr{C}_1 : (x-1)^2 + (y-5)^2 = 16 \Rightarrow C_1(1\,,5) \text{ y } r_1 = 4$$

$$\mathscr{C}_2 : (x-4)^2 + (y-3/2)^2 = 9 \Rightarrow C_2(4\,,3/2) \text{ y } r_2 = 3$$

Ecuación del eje radical , $\mathscr{L} : 24x - 28y + 3 = 0$

En $\mathscr{L}$, si $x = -1 \Rightarrow 24(-1) - 28y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3/4$; luego , P(-1 , 3/4) es un punto cualquiera del eje radical.

Las longitudes de las tangentes trazadas desde el punto P a las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, por la fórmula hallada en el Ejercicio 23 , son :

$$t_1 = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3/4-5)^2 - 16} = \sqrt{337}/4$$

$$t_2 = \sqrt{(-1-4)^2 + (-3/4-3/2)^2 - 9} = \sqrt{337}/4$$

Por tanto , $t_1 = t_2$.

De esta propiedad, se define el eje radical de dos circunferencias no concéntricas, como el lugar geométrico de un punto que mueve de tal manera que las longitudes de las tangentes desde él a las dos circunferencias son iguales. ■

28 Hallar las coordenadas del centro radical de las circunferencias

$\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0, \mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ y $\mathscr{C}_3 : x^2 + y^2 + 2x + 12y + 36 = 0$

Solución. El centro radical es el punto R en que concurren los tres ejes radicales de tres circunferencias, tomadas de dos en dos.

Luego, restando $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_2$ obtenemos el eje radical de ambas circunferencias esto es,

$$6x - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 3x - y - 3 = 0$$

Restando $\mathscr{C}_3 - \mathscr{C}_2$, se tiene el eje radical de $\mathscr{C}_2$ y $\mathscr{C}_3$

$$\Rightarrow 6x + 14y + 36 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : 3x + 7y + 18 = 0$$

Por tanto, el centro radical es $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = R(1/8\,, -21/8)$ ■

29 Hallar las longitudes de las tangentes trazadas del centro radical a las tres circunferencias del Ejercicio 28, y demostrar que son iguales.

Solución. Las ecuaciones de las tres circunferencias en su forma ordinaria son ,

$$\mathscr{C}_1 : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 11 ; \mathscr{C}_2 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 ; \mathscr{C}_3 : (x+1)^2 + (y+6)^2 = 1$$

Si $t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$, entonces las longitudes de las tangentes trazadas del

punto R(1/2 , -21/8) a cada circunferencias, son :

$$t_1 = \sqrt{(1/8+1)^2 + (-21/8-2)^2 - 11} = \frac{1}{8}\sqrt{81+1369-704} = \frac{\sqrt{746}}{8}$$

$$t_2 = \sqrt{1/8-2)^2 + (-21/8-1)^2 - 5} = \frac{1}{8}\sqrt{225-841-320} = \frac{\sqrt{746}}{8}$$

$$t_3 = \sqrt{(1/8+1)^2 + (-21/8+6)^2 - 1} = \frac{1}{8}\sqrt{81+729-64} = \frac{\sqrt{746}}{8}$$

Po r tanto, las longitudes de las tres tangentes son iguales. ■

30 Demostrar que las tres circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 + 10x + 2y + 17 = 0$, $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ y $\mathscr{C}_3 : x^2 + y^2 - 8x - 16y + 71 = 0$ no tienen centro radical. Explicar el resultado.

Demostración. En efecto, los centros de las tres circunferencias son

$$C_1(-5 , -1) \ , \ C_2(-2 , 2) \text{ y } C_3(4 , 8)$$

Las pendientes de los segmentos $\overline{C_1C_2}$, $\overline{C_1C_3}$ y $\overline{C_2C_3}$ son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{2+1}{-2+5} = 1 \ , \ m_2 = \frac{8+1}{4+5} = 1 \text{ y } m_3 = \frac{8-2}{4+2} = 1$$

Como $m_1 = m_2 = m_3$, los centros de las tres circunferencias son colineales, esto es, tienen una recta de centros común, por tanto, no tienen centro radical, por que los tres ejes radicales son paralelos. ■

4.5 TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

En la determinación de la ecuación de la tangente a una circunferencia se consideran los siguientes tres problemas fundamentales.

a) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada en un punto de contacto dado.

b) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada y que tiene una pendiente dada.

c) Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada, trazada desde un punto exterior dado.

El procedimiento para resolver cada uno de estos problemas es el mismo. En cada caso se da una condición , de acuerdo con esto se escribe primero la ecuación de la familia de rectas que satisface esta condición. Se sustituye una de las variables de la

familia de rectas en la ecuación de la circunferencia dada. La ecuación resultante, que contiene un parámetro toma la forma $ax^2 + bx + x = 0$, cuya *igualdad de raíces* $(b^2 - 4ac = 0)$ es una *condición de tangencia.*

EJERCICIOS . *Grupo 18*

1 Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$, en el punto T(-1 , 6).

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por T(-1 , 6) es

$$\mathscr{L}: y - 6 = m(x + 1) \qquad (1)$$

donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación de $\mathscr{L}$ despejamos : $y = mx + 6 + m$, y sustituyendo en la ecuación de $\mathscr{C}$, se tiene :

$$x^2 + (mx + 6 + m)^2 - 2x - 6(mx + 6 + m) - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 2(m^2 + 3m - 1)x + (m^2 + 6m - 3) = 0$$

Condición de tangencia : $b^2 - 4ac = 0$

$$\Rightarrow 4(m^2 + 3m - 1)^2 - 4(1 + m^2)(m^2 + 6m - 3) = 0$$

Efectuando operaciones se reduce a : $(3m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2/3$. De modo que en (1) se tiene la ecuación de la tangente

$$y - 6 = 2/3(x + 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 2x - 3y + 20 = 0$$ ■

2 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $\mathscr{C}: 4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$, que tengan como pendiente -3/2.

Solución. La ecuación de la familia de las rectas de pendiente m = -3/2 es

$$\mathscr{L}: y = -\frac{3}{2}x + b \qquad (1)$$

Al sustituir en la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$ se obtiene :

$$4x^2 + 4(b - \frac{3}{2}x)^2 + 8x + 4(b - \frac{3}{2}x) - 47 = 0 \Rightarrow 13x^2 + 2(1 - 6b)x + (4b^2 + 4b - 47) = 0$$

La condición de tangente es : $4(1 - 6b)^2 - 4(13)(4b^2 + 4b - 47) = 0$

de donde : $4b^2 + 16b - 153 = 0 \Leftrightarrow b_1 = 9/2 \vee b_2 = -17/2$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$\mathscr{L}_1: 3x + 2y - 9 = 0 \vee \mathscr{L}_2: 3x + 2y + 17 = 0$$ ■

3 Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(-2 , 7) a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por P(-2 , 7) es

$$y - 7 = m(x + 2) \qquad (1)$$

De donde : $y = mx + 2m + 7$. Al sustituir en la ecuación de $\mathscr{C}$ se tiene

$$x^2 + (mx + 2m + 7)^2 + 2x - 8(mx + 12m + 7) + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (1 + m^2)x^2 + 2(2m^2 + 3m + 1)x + 4m^2 + 12m + 5 = 0$$

La condición de tangencia es : $4(2m^2 + 3m + 1)^2 - 4(1 + m^2)(4m^2 + 12m + 5) = 0$

Efectuando, se reduce a : $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 2 \vee m_2 = -1/2$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathscr{L}_1 : 2x - y + 11 = 0 \quad \vee \quad \mathscr{L}_2 : x + 2y - 12 = 0$$ ■

4 Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ en el punto P(6 , 3).

Solución. La familia de rectas que pasan por P(6 , 3) es : $y - 3 = m(x - 6)$ (1)

De donde , $y = mx + 3 - 6m$. Sustituyendo en la ecuación de $\mathscr{C}$, se tiene

$x^2 + (mx + 3 - 6m)^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow (1 + m^2)x^2 + 2(3m - 6m^2 - 4)x + 36m^2 - 36m + 12 = 0$

La condición de tangencia es : $4(3m - 6m^2 - 4)^2 - 4(1 + m^2)(36m^2 - 36m + 12) = 0$

de donde obtenemos : $(3m + 2)^2 = 0 \Rightarrow m = -2/3$

Sustituyendo en (1) , la ecuación de la tangente es ; $\mathscr{L}: 2x + 3y - 21 = 0$ ■

5 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 21 = 0$, que son paralelas a la recta $\mathscr{L}: 5x - 5y + 31 = 0$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas paralelas a $\mathscr{L}$ es : $y = x + b$ (1)

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$, se tiene

$$x^2 + (x + b)^2 + 4x - 10(x + b) + 21 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2(b - 3)x + b^2 - 10b + 21 = 0$$

La condición de tangencia es : $4(b - 3)^2 - 4(2)(b^2 - 10b + 21) = 0$

que se reduce a : $b^2 - 14b + 33 = 0 \Leftrightarrow b_1 = 3 \vee b_2 = 11$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$\mathscr{L}_1 : x - y + 3 = 0 \quad \vee \quad \mathscr{L}_2 : x - y + 11 = 0$$ ■

6 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$, que son perpendiculares a la recta $\mathscr{L} : 4x - y + 31 = 0$

Solución. La ecuación de la familia de rectas perpendiculares a $\mathscr{L}$ es :

$$y = -\frac{1}{4}x + b \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia se tiene :

$$x^2 + (-\frac{1}{4}x + b)^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow 17x^2 - 8(b - 12)x + 16(b^2 - 8) = 0$$

Por condición de tangencia : $64(b - 12)^2 - 4(17)(16)(b^2 - 9) = 0$

de donde : $2b^2 + 3b - 35 = 0 \Leftrightarrow b_1 = -5 \vee b_2 = 7/2$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$\mathscr{L}_1 : x + 4y + 20 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x + 4y - 14 = 0$$ ■

7 Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(6 , -4) a la circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$

Solución. La familia de rectas que pasan por P(6 , -4) es , $\mathscr{L}: y + 4 = m(x - 6)$ (1)
de donde , $y = mx - 6m - 4$

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$, se tiene :

$$x^2 + (mx - 6m - 4)^2 + 2x - 2(mx - 6m - 4) - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 - 2(6m^2 + 5m - 1)x + 36m^2 + 60m - 11 = 0$$

Condición de tangencia : $4(6m^2 + 5m - 1)^2 - 4(1 + m^2)(36m^2 + 60m - 11) = 0$

que se reduce a : $6m^2 + 35m - 6 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -6 \vee m^2 = 1/6$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$\mathscr{L}_1 : 6x + y - 32 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x - 6y - 30 = 0$$ ■

8 Resolver el Ejercicio 4 recordando que la tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

Solución. Datos del Ejercicio 4. Circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$; punto de contacto P(6 , 3).

El centro de la circunferencia es C(4 , 0) y la pendiente del radio $\overline{CP}$ es ,

$m_{CP} = \frac{3 - 0}{6 - 4} = \frac{3}{2}$. Como el radio es perpendicular a la tangente en P , entonces la pendiente de la tangente es $m = -2/3$, y su ecuación :

$$y - 3 = -2/3(x - 6) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 2x + 3y - 21 = 0$$ ■

9 Resolver los ejemplos 1, 2 y 3 del Artículo 45 por el método indicado en el Ejercicio 8. (Ver la página 125 del texto de Lehmann)

(La solución del ejercicio se deja para el lector.)

Ejemplo 1. Circunferencia : $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$; punto de contacto : T(3 , 5)

Sol. $\mathscr{L}: x - 2y + 7 = 0$

Ejemplo 2. Circunferencia : $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$; pendiente m = 1

Sol. $\mathscr{L}_1 : x - y - 2 = 0$; $\mathscr{L}_2 : x - y - 10 = 0$

Ejemplo 3. Circunferencia : $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$; punto exterior P(8 , 6)

Sol. $\mathscr{L}_1 : x - 5y + 22 = 0$; $\mathscr{L}_2 : 23x - 11y - 118 = 0$

10 Demostrar que la ecuación de la tangente a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = r^2$ en el punto de contacto $T(x_1 , y_1)$ es $x_1x + y_1y = r^2$

Demostración. En efecto, la ecuación de la tangente que pasa por $T(x_1 , y_1)$ es

$$\mathscr{L}: y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (1)$$

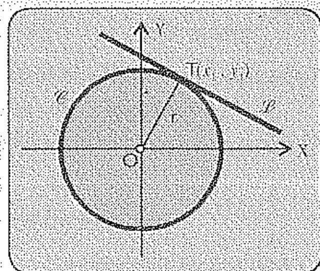


FIGURA 4.19

La pendiente del radio $\overline{OT}$ es $m_1 = \dfrac{y_1}{x_1}$

Dado que $\mathscr{L} \perp \overline{OT} \Rightarrow m\,m_1 = -1 \Rightarrow m_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}$

Sustituyendo este valor en (1) tendremos :

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \Leftrightarrow x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2 \qquad (2)$$

Como $T(x_1 , y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = r^2$

Por tanto, en (2), la ecuación de la tangente es

$$\mathscr{L}: x_1x + y_1y = r^2$$ ■

11 Por dos métodos diferentes, hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $\mathscr{C}: 9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y - 32 = 0$, cuya pendiente es 1/2.

Solución. La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria es

$$\mathscr{C}: (x + 1)^2 + (y - 2/3)^2 = 5 \Rightarrow C(-1 , 2/3) \text{ y } r = \sqrt{5}$$

La ecuación de la familia de rectas de pendiente m = 1/2 es

$$y = \frac{1}{2}x + b \Leftrightarrow \mathscr{L}: x - 2y + 2b = 0 \qquad (1)$$

Dado que $r = |d(C, \mathscr{L})| \Rightarrow \sqrt{5} = \dfrac{|-1-2(2/3)+2b|}{\sqrt{1+4}}$

de donde : $|6b-7| = 15 \Leftrightarrow (6b-7=15) \vee (6b-7=-15)$

$\Leftrightarrow \; b_1 = 11/3 \; \vee \; b_2 = -4/3$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son :

$$\mathscr{L}_1 : 3x - 6y + 22 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 3x - 6y - 8 = 0$$

Otra forma de resolver el problema es por el método del discriminante, cuya solución se deja para el lector. ■

12 Por dos métodos diferentes, hállense las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 15 = 0$, trazadas del punto P(6 , -4).

Solución. Si $\mathscr{C} : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25/2 \Rightarrow C(2, 1)$ y $r = 5/\sqrt{2}$

La familia de rectas que pasan por P(6 , -4) es

$$y + 4 = m(x-6) \Leftrightarrow \mathscr{L} : mx - y + 4 - 6m = 0 \qquad (1)$$

Como $r = |d(C, \mathscr{L})| \Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{|m(2) - 1 + 4 - 6m|}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{|3-4m|}{\sqrt{m^2+1}}$

de donde : $7m^2 - 48m - 7 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -1/7 \vee m_2 = 7$

Por tanto, en (1) , las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathscr{L}_1 : x + 7y + 22 = 0 \quad \vee \quad \mathscr{L}_2 : 7x - y - 46 = 0$$ ■

13 Por el punto P(-5 , 4) se trazan tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$. Hallar el ángulo agudo que forman estas tangentes.

Solución. Si $\mathscr{C} : (x-5)^2 + (y-0)^2 = 18 \Rightarrow C(5, 0)$ y $r = 3\sqrt{2}$

La familia de rectas que pasan por el punto P(-5 , 4) es

$$y - 4 = m(x+5) \Leftrightarrow \mathscr{L} : mx - y + 4 + 5m = 0$$

Dado que , $r = |d(C, \mathscr{L})| \Rightarrow 3\sqrt{2} = \dfrac{|5m+4+5m|}{\sqrt{m^2+1}}$

de donde : $4m^2 + 40m - 1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -1 \vee m_2 = 1/41$

Luego, si $\text{Tg}\theta = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \Rightarrow \text{Tg}\theta = \left|\dfrac{1/41 + 1}{1 - 1/41}\right| = \dfrac{21}{20} = 1.05 \Rightarrow \theta = 46°24'$

14 Dada la circunferencia $\mathscr{C}: x^2+y^2=5$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $\mathscr{L}: x-2y+k=0$

a) cortan a la circunferencia en dos puntos diferentes

b) son tangentes

c) no tienen ningún punto común con la circunferencia.

Solución. De la familia de rectas despejamos : $x=2y-k$

Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia se tiene

$$(2y-k)^2+y^2=5 \Leftrightarrow 5y^2-4ky+k^2-5=0$$

Discriminante de la ecuación : $\Delta=(4k)^2-4(5)(k^2-5) = 4(25-k^2)$

a) Si $\Delta > 0$, la recta $\mathscr{L}$ corta a $\mathscr{C}$ en dos puntos diferentes, esto es, si
$25-k^2>0 \Rightarrow k^2<25 \Leftrightarrow -5<k<5$

b) Si $\Delta = 0$, la recta $\mathscr{L}$ es tangente a $\mathscr{C}$, esto es, si $25-k^2=0 \Leftrightarrow k=\pm 5$

c) Si $\Delta < 0$, $\mathscr{L}$ y $\mathscr{C}$ no tienen ningún punto común, es decir, si
$25-k^2<0 \Rightarrow k^2>25 \Leftrightarrow k<-5 \lor k>5.$ ■

15 Dada la circunferencia $\mathscr{C}: x^2+y^2-6x-2y+6=0$, hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $\mathscr{L}: y = mx+3$

a) corta a la circunferencia en dos puntos

b) son tangentes

c) no tienen ningún punto con la circunferencia.

La solución del ejercicio es similar al anterior, por lo que se deja al lector.

Sol. a) $-12/5 < m < 0$, b) $m=0 \lor m=-12/5$, c) $m < -12/5 \lor m>0$ ■

16 Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ son $y=mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

Solución. La familia de rectas de pendientes m es

$$y=mx+b \Leftrightarrow \mathscr{L}: mx-y+b=0 \qquad (1)$$

Como $r=|d(C,\mathscr{L})| \Rightarrow r=\dfrac{|m(0)-0+b|}{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow b=\pm r\sqrt{m^2+1}$

Por tanto, en (1) , las ecuaciones de las tangentes son

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$ ■

17 Hallar la ecuación de la normal a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2+y^2-6x+10y+21=0$ en el punto P(6 , -3) y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

Solución. Si $\mathscr{C}: (x-3)^2+(y+5)^2=13 \Rightarrow C(3,-5)$ y $r=\sqrt{13}$

Como $P(6,-3)\in\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{L}\perp \overline{CP}$

$\Rightarrow \left(\frac{-3+5}{6-3}\right) m = -1 \Leftrightarrow m = -3/2$

Luego, la pendiente de la normal es $m_1 = 2/3$ y su

ecuación : $y+3 = \frac{2}{3}(x-6) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 2x-3y-21=0$

Si $C(3,-5)\in\mathscr{L}_1 \Rightarrow 2(3)-3(-5)=21$

$\Rightarrow 21=21$

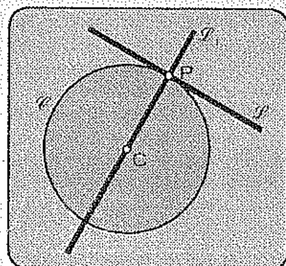


FIGURA 4.20

Por tanto, la normal $\mathscr{L}_1$ pasa por el centro de $\mathscr{C}$. ■

En cada uno de los ejercicios 18 al 20 , hallar las ecuaciones de las tangente y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal para cada circunferencia y punto de contacto dados.

Nota. Las fórmulas para calcular las longitudes de las tangente, normal, subtangente y subnormal son, respectivamente

$$t=\left|\frac{y_1}{m}\right|\sqrt{1+m^2} \quad , \quad n=|y_1|\sqrt{1+m^2} \quad , \quad \overline{ST}=\left|\frac{y_1}{m}\right| \quad , \quad \overline{SN}=|my_1|$$

donde y_1 es la ordenada del punto de tangencia y m la pendiente de la tangente.

18 $\mathscr{C}: x^2+y^2=34$, T(3 , 5)

Solución. Si C(0 , 0) y T(3 , 5) $\Rightarrow m_{CT}=m_n=5/3 \Rightarrow m_t=-3/5$

Ecuación de la tangente : $y-5=-\frac{3}{5}(x-3) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x+5y-34=0$

Ecuación de la normal : $y-5=\frac{5}{3}(x-3) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 5x-3y=0$

Longitud de la tangente : $t=\left|\frac{5}{-3/5}\right|\sqrt{1+(-3/5)^2}=\frac{5}{3}\sqrt{34}$

Longitud de la normal : $n=|5|\sqrt{1+(-3/5)^2}=\sqrt{34}$

Longitud de la subtangente : $\overline{ST}=\left|\frac{5}{-3/5}\right|=25/3$

Longitud de la subnormal : $\overline{SN}=|(-3/5)(5)|=3$ ■

Los ejercicios 19 y 20 son similares, por lo que se deja para el lector.

19 $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 2x + 2y - 15 = 0$, T(0 , 3)

Sol. $\mathscr{L}: x - 4y + 12 = 0$, $\mathscr{L}_1: 4x + y - 3 = 0$, $t = 3\sqrt{17}$, $n = 3/4\sqrt{17}$, $\overline{ST} = 12$, $\overline{SN} = 3/4$

20 $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 10x + 2y - 39 = 0$, T(-2 , 3)

Sol. $\mathscr{L}: 7x - 4y + 26 = 0$, $\mathscr{L}_1: 4x + 7y - 13 = 0$

$t = (3/7)\sqrt{65}$, $n = (3/4)\sqrt{54}$, $\overline{ST} = 12/7$, $\overline{SN} = 21/4$

21 Hallar el ángulo agudo que forman las circunferencias $\mathscr{C}_1: x^2 + y^2 = 17$ y $\mathscr{C}_2: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 11 = 0$ en su intersección.

Solución. Puntos de intersección : $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = P(1 , 4)$ y $Q(16/5 , -13/5)$

Como los ángulos que forman las tangentes son los mismos en cada punto de intersección, bastará hallar las pendientes de las tangentes en el punto P.
Los centros de las circunferencias son : $C_1(0 , 0)$ y $C_2(6 , 2)$

Pendiente del radio $\overline{C_1P} = \dfrac{4 - 0}{1 - 0} = 4 \Rightarrow m_1 = -1/4$

Pendiente del radio $\overline{C_2P} = \dfrac{4 - 2}{1 - 6} = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow m_2 = 5/2$

Luego , si $\text{Tg}\theta = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \Rightarrow \text{Tg}\theta = \left|\dfrac{5/2 + 1/4}{1 - 5/8}\right| = \dfrac{22}{3} = 7.33$

$$\therefore \ \theta = 82°\,14'$$ ■

22 Hallar el ángulo agudo que forman la recta $\mathscr{L}: 2x + 3y - 6 = 0$ y la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$

Solución. Puntos de intersección : $\mathscr{L} \cap \mathscr{C} = P(-3 , 4)$ y $Q(21/13 , 12/13)$

Como los ángulos de intersección en P y Q son iguales, hallaremos la pendiente de la tangente a la circunferencia en el punto P(-3 , 4).

Centro de la circunferencia , C(-1 , 2) $\Rightarrow m_{CP} = \dfrac{4 - 2}{-3 + 1} = -1$

Dado que el radio $\overline{CP}$ es perpendicular a la tangente $\mathscr{L}_1$, entonces : $m_1 = 1$
Pendiente de la recta $\mathscr{L}$ dada : m = - 2/3

Luego , si $Tg\theta = \left|\frac{m_1 - m}{1 + mm_1}\right| \Rightarrow Tg\theta = \left|\frac{1 + 2/3}{1 - 2/3}\right| = 5 \Rightarrow \theta = 78°41'$. ■

23 Demostrar que las circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$, se cortan ortogonalmente.

La demostración se deja para el lector. (Sugerencia : Halle los puntos de $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$, luego, las pendientes de las tangentes de tales puntos y verifique que $m\,m_1 = -1$)

25 Si de un punto exterior P se trazan tangentes a una circunferencia, el segmento que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P. Si $P_1(x_1 , y_1)$ es un punto exterior a la circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = r^2$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es $x_1x + y_1y = r^2$

Demostración. Sean $A(x_2 , y_2)$ y $B(x_3 , y_3)$ los puntos de tangencia. Por el Ejercicio 10 , la ecuación de la tangente $\overline{AP}_1$ es

$$\mathscr{L} : x_2x + y_2y = r^2$$

Como $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{L} \Rightarrow x_2x_1 + y_2y_1 = r^2$

de donde : $x^2 = \frac{r^2 - y_1y_2}{x_1}$ (1)

$A(x_2 , y_2) \in \mathscr{C} \Rightarrow x_2^2 + y_2^2 = r^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{r^2 - y_1y_2}{x_1}\right)^2 + y_2^2 = r^2$$

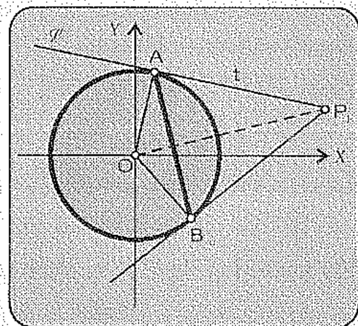


FIGURA 4.21

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + y_1^2)\,y_2^2 - 2r^2y_1y_2 + r^4 - x_1^2r^2 = 0$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{r^2y_1 \pm \sqrt{r^4y_1^2 - (x_1^2 + y_1^2)(r^4 - x_1^2r^2)}}{x_1^2 + y_1^2}$$

$= \frac{r^2y_1 \pm \sqrt{x_1^2r^2\,(x_1^2 + y_1^2 - r^2)}}{x_1^2 + y_1^2}$. Pero $\overline{AP}_1^2 = \overline{OP}_1^2 - \overline{OA}^2 \Rightarrow t^2 = x_1^2 + y_1^2 - r^2$

Luego , $y_2 = \frac{r^2y_1 + x_1\,r\,t}{x_1^2 + y_1^2}$, sustituyendo en (1) se tiene : $x_2 = \frac{r^2x_1 - r\,y_1\,t}{x_1^2 + y_1^2}$

Dado que : $\overline{AB} \perp \overline{OP}_1 \Rightarrow (m_{AB})(m_{OP_1}) = -1 \Rightarrow m_{AB} = -\frac{x_1}{y_1}$

Ecuación de $\overline{AB}$: $y - \dfrac{r^2y_1 + x_1 r t}{x_1^2 + y_1^2} = -\dfrac{x_1}{y_1}\left(x - \dfrac{r^2x_1 - r y_1 t}{x_1^2 + y_1^2}\right)$

que se reduce a , $\overline{AB} : x_1x + y_1y = r^2$ ■

4.6 TEOREMAS Y PROBLEMAS DE LUGRES GEOMETRICOS RELATIVOS A LA CIRCUNFERENCIA

EJERCICIOS . Grupo 19

1 Demostrar que las longitudes de las dos tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior son iguales.

Demostración. Probaremos que $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$

En efecto, sea $P(x_1, y_1)$ un punto exterior a la circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = r^2$

Por el teorema de Pitágoras :

En el ΔOAP : $|\overline{AP}|^2 = |\overline{OP}|^2 - |\overline{AO}|^2$

$\Rightarrow |\overline{AP}|^2 = (x_1^2 + y_1^2) - r^2 \Rightarrow |\overline{AP}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$ (1)

En el ΔOBP : $|\overline{BP}|^2 = |\overline{OP}|^2 - |\overline{OB}|^2$

$\Rightarrow |\overline{BP}|^2 = (x_1^2 + y_1^2) - r^2 \Rightarrow |\overline{BP}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}$ (2)

Por tanto, de (1) y (2) , se sigue que :

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$$ ■

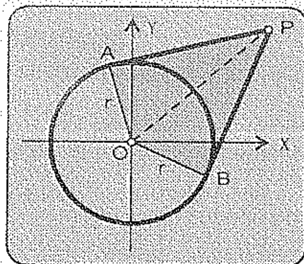


FIGURA 4.22

2 Si de un punto cualquiera de una circunferencia se traza una perpendicular a un diámetro, la longitud de la perpendicular es media proporcional entre las longitudes de los dos segmentos en los que divide al diámetro.

Demostración. Probaremos que : $|\overline{PH}|^2 = |\overline{AH}| \times |\overline{HB}|$

En efecto, sea $P(x_1, y_1)$ un punto de la circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = r^2$ mostrada en la Figura 4.23. Si A y B son los extremos de un diámetro sobre el eje X, entonces, A(-r , 0) y B(r , 0), y como H es el pie de la perpendicular $\overline{PH} \Rightarrow H(x_1, 0)$

Si $P(x_1, y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = r^2 \Rightarrow y_1^2 = r^2 - x_1^2$

Esto es, $|\overline{PH}|^2 = r^2 - x_1^2 = (r + x_1)(r - x_1)$ (1)

Ahora : $|\overline{AH}| = x_1 - (-r) = x_1 + r$, y $|\overline{HB}| = r - x_1$

Por tanto, en (1), se tiene : $|\overline{PH}|^2 = |\overline{AH}| \times |\overline{HB}|$ ■

3 Demostrar que todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.

Demostración. Sea la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = r^2$ mostrada en la Figura 4.24 cuyo diámetro $\overline{PQ}$ coincide con el eje Y, y sea la cuerda $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$. Por el teorema de Pitágoras :

En el ΔOMA : $|\overline{AM}|^2 = |\overline{OA}|^2 - |\overline{OM}|^2 = r^2 - |\overline{OM}|^2$ (1)

En el ΔOMB : $|\overline{BM}|^2 = |\overline{OB}|^2 - |\overline{OM}|^2 = r^2 - |\overline{OM}|^2$ (2)

Luego, de (1) y (2) , se sigue que :

$$|\overline{AM}|^2 = |\overline{BM}|^2 \Rightarrow |\overline{AM}| = |\overline{BM}|$$

Por tanto , la cuerda $\overline{AM}$ que divide en dos partes iguales por el diámetro $\overline{PQ}$. ■

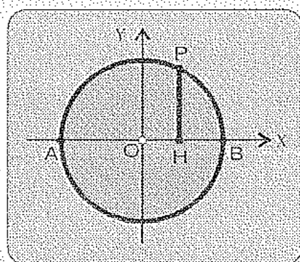


FIGURA 4.23

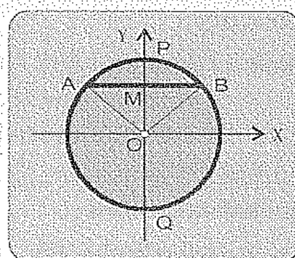


FIGURA 4.24

4 Demostrar que en dos circunferencias secantes la recta de los centros es perpendicular a su cuerda común en su punto medio.

(La demostración queda a cargo del lector.)

5 Demostrar que por los extremos de un diámetro se trazan dos cuerdas paralelas, éstas son iguales.

Demostración. En efecto, sea la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = r^2$, cuyos extremos del diámetro $\overline{EA}$, tienen por coordenadas : A(r , 0) y E(-r , 0).

Ecuación de la cuerda $\overline{AB}$, $\mathscr{L}_1 : y = mx + b_1$

Ecuación de la cuerda $\overline{DE}$, $\mathscr{L}_2 : y = mx + b_2$

Si $A(r, 0) \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow 0 = mr + b_1 \Leftrightarrow b_1 = -mr$

$E(-r, 0) \in \mathscr{L}_2 \Rightarrow 0 = -mr + b_2 \Leftrightarrow b_2 = mr$

Por lo que , $\mathscr{L}_1 : y = mx - mr$ y $\mathscr{L}_2 : y = mx + mr$

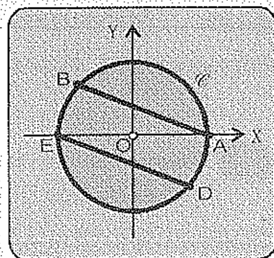


FIGURA 4.25

Luego : $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{C} = B\left(\frac{(m^2-1)r}{1+m^2}, \frac{-2mr}{1+m^2}\right)$ y $A(r, 0)$

$$\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{C} = D\left(\frac{(1-m^2)r}{1+m^2}, \frac{2mr}{1+m^2}\right) \text{ y } E(-r, 0)$$

Por el teorema de la distancia obtenemos : $|\overline{AB}| = \frac{2r}{\sqrt{1+m^2}}$ y $|\overline{DE}| = \frac{2r}{\sqrt{1+m^2}}$

$$\therefore |\overline{AB}| = |\overline{DE}|$$ ■

6 Se tiene una circunferencia circunscrita a cualquier triángulo dado. Demostrar que el producto de las longitudes de dos lados cualesquiera del triángulo es igual al producto de la longitud del diámetro por la longitud de la altura trazada al tercer lado.

Demostración. Probaremos que : $|\overline{AB}| \times |\overline{BC}| = |\overline{BD}| \times |\overline{BH}|$

En efecto , sean la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = r^2$ y el ΔABC cuyos vértices se muestran en la Figura 4.26.

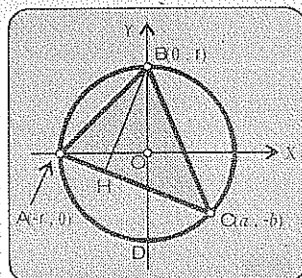


FIGURA 4.26

Por el teorema de la distancia :

$$|\overline{AB}| = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} \text{ y } |\overline{BC}| = \sqrt{a^2 + (r+b)^2}$$

de modo que : $|\overline{AB}| \times |\overline{BC}| = r\sqrt{2a^2 + 2(b+r)^2}$

$$= r\sqrt{2(a^2 + b^2 + r^2) + 4br}$$

Como $C(a, -b) \in \mathscr{C} \Rightarrow a^2 + b^2 = r^2$

$$\Rightarrow |\overline{AB}| \times |\overline{BC}| = 2r\sqrt{r^2 + br} \qquad (1)$$

Ecuación de $\overline{AC}$: $y - 0 = \left(\frac{-b}{a+r}\right)(x + r) \Leftrightarrow \mathscr{L}: bx + (a+r)y + br = 0$

$$|\overline{BH}| = |d(B, \mathscr{L})| = \Rightarrow |\overline{BH}| = \frac{|0 + (a+r)r + br|}{\sqrt{b^2 + (a+r)^2}} = \frac{r|a+b+r|}{\sqrt{2r^2 + 2ar}}$$

Si $|\overline{BD}| = 2r$ (diámetro de la circunferencia) $\Rightarrow |\overline{BD}| \times |\overline{BH}| = \frac{2r^2|a+b+r|}{\sqrt{2r^2+2ar}}$ (2)

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de (2) por $\sqrt{r^2 + br}$, se tiene :

$$|\overline{BD}| \times |\overline{BH}| = \frac{2r^2|a+b+r|\sqrt{r^2+br}}{\sqrt{2r(r+a)}\sqrt{r(r+b)}} = \frac{2r|a+b+r|\sqrt{r^2+br}}{\sqrt{2(r^2+br+ar+ab)}}$$

$$= \frac{2r|a+b+r|\sqrt{r^2+br}}{\sqrt{r^2+r^2+2ab+2ar+2br}} = \frac{2r|a+b+r|\sqrt{r^2+br}}{\sqrt{(a+b+r)^2}}$$

$$= 2r\sqrt{r^2+br} \qquad (3)$$

Por tanto, de (1) y (3), queda demostrado que:

$$|\overline{AB}| \times |\overline{BC}| = |\overline{BD}| \times |\overline{BH}|$$ ■

7 Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(2 , 0) y B(-1 , 0) es siempre igual a 5. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica: $|\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 = 5$

2. Cuya expresión analítica es:

$$(\sqrt{(x-2)^2+y^2})^2 + (\sqrt{(x+1)^2+y^2})^2 = 5$$

3. Efectuando, se reduce a: $x^2 + y^2 - x = 0$

La ecuación del lugar geométrico es una circunferencia. ■

8 Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto A(4 , 2) es siempre igual al doble de su distancia del punto B(-1 , 3). Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica: $|\overline{AP}| = 2|\overline{BP}|$

2. Por el teorema de la distancia, la expresión analítica de esta propiedad es

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

3. De donde obtenemos la ecuación: $3x^2+3y^2+16x-20y+20 = 0$

El lugar geométrico es una circunferencia. ■

9 Un punto se mueve de tal manera que su distancia del punto A(2 , -2) es siempre igual a un tercio de su distancia del punto B(4 , 1). Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

(El ejercicio es similar al anterior, por lo que su solución se deja para el lector.)

Sol. $8x^2+8y^2-28x+38y+55 = 0$

10 Un punto se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia del punto A(1 , 2) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $\mathscr{L}: 3x + 4y - 1 = 0$. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrica.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe cumplir la propiedad geométrica : $|\overline{AP}|^2 = 2|d(P , \mathscr{L})|$

2. Que está expresada analíticamente por la ecuación

$$(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2})^2 = 2\left(\frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{9+16}}\right)$$

3. Efectuando se reduce a : $5x^2 + 5y^2 - 16x - 28y + 27 = 0$
El lugar geométrico es una circunferencia. ■

11 Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias de los tres puntos A(0 , 3) , B(3 , 0) y C(-2 , -2) es siempre igual a 30. Hallar e identificar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 + |\overline{CP}|^2 = 30$

2. Por el teorema de la distancia esta condición está expresada analíticamente por

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 + (x-3)^2 + (y-0)^2 + (x+2)^2 + (y+2)^2 = 30$$

3. Efectuando operaciones y simplificando se obtiene : $3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$
La ecuación del lugar geométrico es una circunferencia. ■

12 Un punto P se mueve de tal manera que su distancia de un punto fijo es siempre igual a k veces su distancia a otro punto fijo. Demostrar que el lugar geométrico de P es una circunferencia para valores apropiados de k.

Demostración. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico , y sean $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ los puntos fijos, que deben satisfacer la condición geométrica : $|\overline{PP}_1| = k|\overline{PP}_2|$

2. Por el teorema de la distancia esta condición está expresada analíticamente por :

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = k\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

3. Elevando al cuadrado y luego agrupando términos se obtiene :

$$(1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 - 2(x_1 + k^2x_2)x - 2(y_1 + k^2y_2)y + x_1^2 - k^2x_2^2 + y_1^2 - k^2y_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow\ x^2 + y^2 - \frac{2(x_1 + k^2x_2)}{1 - k^2}\,x - \frac{2(y_1 + k^2y_2)}{1 - k^2}\,y + \frac{x_1{}^2 + y_1{}^2 - k^2(x_2{}^2 + y_2{}^2)}{1 - k^2} = 0$$

Efectivamente, el lugar geométrico representa una circunferencia $\forall\, k \neq \pm 1$ ■

13 Un punto se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia de la base de un triángulo isósceles es siempre igual al producto de sus distancias de los otros dos lados. Demostrar que el L. G. es una circunferencia.

Demostración. 1. Sea el triángulo isósceles de vértices $A(a\,,0)$, $B(0\,,b)$ y $C(-a\,,0)$ y sea $P(x\,,y)$ un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica :

$$|PH|^2 = |\overline{PD}| \times |\overline{PE}|$$

$$\Rightarrow\ y^2 = |\overline{PD}| \times |\overline{PE}| \qquad (1)$$

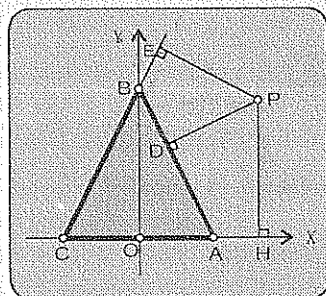


FIGURA 4.27

2. Para expresar analíticamente $|\overline{PD}|$ y $|\overline{PE}|$, hallemos las ecuaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$.

$$\overleftrightarrow{AB} : y = -\frac{b}{a}(x - a) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : bx + ay - ab = 0$$

$$\overleftrightarrow{CB} : y = \frac{b}{a}(x + a) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : bx - ay + ab = 0$$

Como $|\overline{PD}|$ y $|\overline{PE}|$ son distancias dirigidas de P a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, respectivamente, entonces, en (1)

$$y^2 = \left(\frac{bx + ay - ab}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)\left(-\frac{bx - ay + ab}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)$$

3. Efectuando se tiene :

$$(a^2 + b^2)\,y^2 = a^2y^2 - b^2x^2 - 2a^2by + a^2b^2 \Rightarrow\ bx^2 + by^2 + 2a^2y - a^2b = 0$$

Por tanto, la ecuación del lugar geométrico es una circunferencia. ■

14 Desde un punto P , se trazan tangentes a las circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 = 9$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$. Si la longitud de la tangente trazada a $\mathscr{C}_1$ es siempre igual al doble de la longitud de la tangente trazada a $\mathscr{C}_2$, hallar y construir el lugar geométrico de P.

Solución. 1. Sea $P(x\,,\,y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}| = 2\,|\overline{BP}|$ (1)

siendo A y B los puntos de tangencia a $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, respectivamente.

2. La forma analítica de (1) es la ecuación :

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 9} = 2\sqrt{(x-4)^2 + y^2 - 4}$$

3. Efectuando operaciones se reduce a

$$\mathscr{C}: 3x^2 + 3y^2 - 32x + 57 = 0$$

El lugar geométrico es una circunferencia cuya gráfica, en trazo discontinuo, se muestra en la Figura 4.28 ■

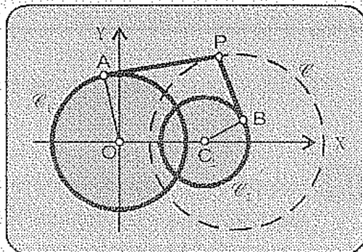


FIGURA 4.28

15 Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a las rectas $\mathscr{L}_1 : 3x - y + 4 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x + 3y - 7 = 0$ es siempre igual a 2. Hallar, identificar y trazar el lugar geométrico de P.

Solución. 1. Sea P(x, y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica: $|d(P, \mathscr{L}_1)|^2 + |d(P, \mathscr{L}_2)|^2 = 2$

2. La expresión analítrca de está condición es

$$\left|\frac{3x - y + 4}{\sqrt{10}}\right|^2 + \left|\frac{x + 3y - 7}{\sqrt{10}}\right|^2 = 2$$

3. Ecuación que se reduce a :

$$2x^2 + 2y^2 + 2x - 10y + 9 = 0$$

El lugar geométrico es una circunferencia cuya gráfica se muestra en la Figura 4.29. ■

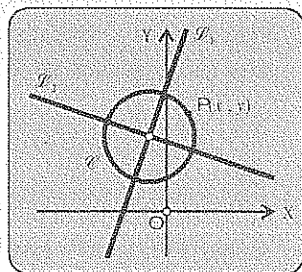


FIGURA 4.29

16 Desde un punto fijo de una circunferencia dada se trazan cuerdas. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

Demostración. 1. Sea la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = r^2$ y sean : A(r , 0) el punto fijo , B(x_1, y_1) un punto de $\mathscr{C}$ y P(x, y) un punto del lugar geométrico que satisfacer la condición geométrica

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$$

2. La forma analítica de esta condición es

$$x = \frac{x_1 + r}{2} \Rightarrow x_1 = 2x - r \;\; ; \;\; y = \frac{y_1}{2} \Rightarrow y_1 = 2y$$

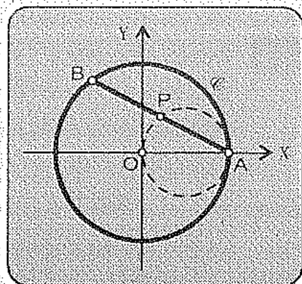


FIGURA 4.30

3. Como $B(x_1, y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = r^2$

Luego : $(2x - r)^2 + (2y)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - rx = 0$

Por tanto, la ecuación del lugar geométrico es una circunferencia. ■

EJERCICIOS DE REPASO

(Texto : F. J. De La Borbolla)

1 Hallar la ecuación de la circunferencia con centro C(-4 , 3) y tangente a la circunferencia $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$

Solución. Si $\mathscr{C}_1 : (x - 2)^2 + (y + 3/2)^2 = 25/4$, entonces $C_1(2, -3/2)$ y $r_1 = 5/2$

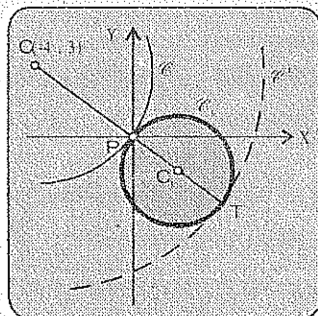


FIGURA 4.31

La ecuación de la recta que une los centros C_1 y C es:

$$y - 3 = \left(\frac{3 + 3/2}{-4 - 2}\right)(x + 4) \Leftrightarrow \mathscr{L} : 3x + 4y = 0$$

Luego, $\mathscr{L} \cap \mathscr{C}_1 = P(0, 0)$ y $T(4, -3)$

Las circunferencias buscadas son concéntricas cuyos radios son : $|\overline{CP}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, y

$$|\overline{CT}| = \sqrt{(4 + 4)^2 + (-3 - 3)^2} = 10$$

Por lo que, sus respectivas ecuaciones son :

$\mathscr{C} : (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ (línea llena)

$\mathscr{C}' : (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 100$ (línea discontinua). ■

2 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es la cuerda común a las circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 18x - 16y + 45 = 0$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 + 6x - 4y - 27 = 0$.

Solución. Restando $\mathscr{C}_2 - \mathscr{C}_1$ obtenemos la ecuación de la cuerda común (eje radical).

$$\mathscr{L} : 2x + y - 6 = 0$$

Los extremos de la cuerda son los puntos

$$\mathscr{L} \cap \mathscr{C}_2 = A(3, 0) \text{ y } B(-1, 8)$$

cuyo punto central es : $C\left(\frac{3 - 1}{2}, \frac{0 + 8}{2}\right) \Leftrightarrow C(1, 4)$

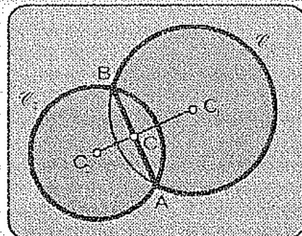


FIGURA 4.32

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(3+1)^2+(8-0)^2} = 4\sqrt{5} \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia buscada es

$$\mathscr{C}: (x-1)^2+(y-4)^2 = 20$$ ■

3 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $\mathscr{L}_1: x+2y-5=0$, es tangente a la recta $\mathscr{L}_2: 4x+3y=30$ y pasa por el punto P(3 , 0)

Solución. Sea C(h , k) el centro de la circunferencia buscada $\mathscr{C}$.

Si $C \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow h+2k-5 = 0 \Rightarrow h = 5-2k$ (1)

Como $P \in \mathscr{C} \Rightarrow r = |\overline{CP}| = |d(C, \mathscr{L}_2)|$

$$\Rightarrow \sqrt{(h-3)^2+(k-0)^2} = \frac{|4h+3k-30|}{\sqrt{16+9}}$$

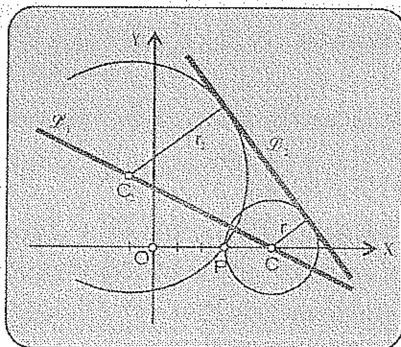


FIGURA 4.33

de donde :

$9h^2+16k^2-24hk+90h+180k-675=0$ (2)

Sustituyendo (1) en (2), la ecuación se reduce a

$k^2-3k=0 \Leftrightarrow k_1=0 \vee k_2=-3$

$\Leftrightarrow h_1=5 \vee h_2=-1$

Luego, los centros son : $C_1(5 , 0)$ y $C_2(-1 , 3)$

$r_1 = |\overline{C_1P}| = \sqrt{(5-3)^2+0} = 2$

$r_2 = |\overline{C_2P}| = \sqrt{(-1-3)^2+(3-0)^2} = 5$

Por tanto, las ecuaciones de las circunferencias son :

$$\mathscr{C}_1: (x-5)^2+(y-0)^2 = 4 \vee \mathscr{C}_2: (x+1)^2+(y-3)^2 = 25$$ ■

4 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(5 , -6) y B(7 , 2) , y es tangente a la recta $\mathscr{L}: 3x-5y+2=0$

Solución. Si C(h , k) es el centro de la circunferencia,

entonces : $r = |\overline{AC}| = |\overline{BC}| = |d(C, \mathscr{L})|$

$$\Rightarrow \sqrt{(h-5)^2+(k+6)^2} = \sqrt{(h-7)^2+(k-2)^2}$$

de donde : $h+4k+2=0 \Rightarrow h=-2-4k$ (1)

Si $|\overline{AC}| = |d(C, \mathscr{L})|$

$$\Rightarrow \sqrt{(h-r)^2+(k+6)^2} = \frac{|3h-5k+23|}{\sqrt{9+25}}$$

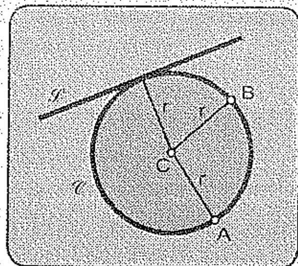


FIGURA 4.34

Efectuando obtenemos la ecuación

$$25h^2 + 9k^2 + 30hk - 478h + 638k + 1545 = 0 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) la ecuación se reduce a

$$k^2 + 10k + 9 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1 \vee k_2 = -9 \Rightarrow h_1 = 2 \vee h_2 = 34$$

Luego, los centros de las circunferencias son $C_1(2 , -1)$ y $C_2(34 , -9)$

$r_1 = |\overline{AC_1}| = \sqrt{(2-5)^2 + (-1+6)^2} = \sqrt{34}$; $r_2 = |\overline{AC_2}| = \sqrt{(34-5)^2 + (-9+6)^2} = \sqrt{850}$

Por tanto , las ecuaciones de las dos circunferencias son :

$$\mathscr{C}_1 : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 34 \ \vee \ \mathscr{C}_2 : (x-34)^2 + (y+9)^2 = 850$$ ■

5 Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $\mathscr{L} : x + 2y - 4 = 0$ y pasa por A(15 , 2) y B(7 , 6).

Solución. Si $C(h , k) \in \mathscr{L} \Rightarrow h + 2k - 4 = 0$ (1)

Dado que $A , B \in \mathscr{C} \Rightarrow r = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|$

$\Rightarrow \sqrt{(h-15)^2 + (k-2)^2} = \sqrt{(h-7)^2 + (k-6)^2}$

Efectuando se tiene : $2h - k - 18 = 0$ (2)

La solución común de (1) y (2) es : $h = 8$ y $k = -2$

$r = |\overline{AC}| = \sqrt{(8-15)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{65}$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathscr{C} : (x-8)^2 + (y+2)^2 = 65$$ ■

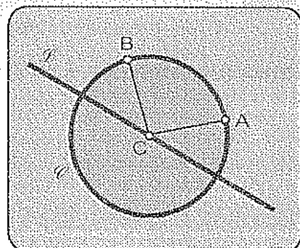


FIGURA 4.35

6 Dados A(6 , 4) , B(5 , -1) y la recta $\mathscr{L} : 2x - 3y + 13 = 0$, determinar sobre la recta un punto desde el cual se ve el segmento $\overline{AB}$ bajo un ángulo máximo.

Solución. En la Figura 4.36 vemos que para cualquier posición de P , tal como P_1 se tiene que, el ángulo inscrito APB > ángulo AP_1B. El problema se reduce, pues, a calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por A y B sea tangente a $\mathscr{L}$.

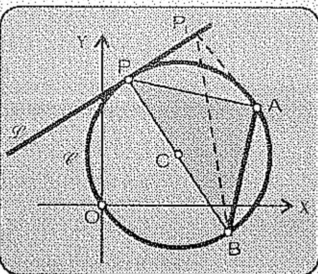


FIGURA 4.36

Como A y $B \in \mathscr{C} \Rightarrow r = |\overline{AC}| = |\overline{BC}| = |d(C , \mathscr{L})|$

Si $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| \Rightarrow \sqrt{(h-6)^2 + (k-4)^2} = \sqrt{(h-5)^2 + (k+1)^2}$

Efectuando se tiene : $h + 5k - 13 = 0 \Rightarrow h = 13 - 5k$ (1)

Si $|\overline{BC}| = |d(C, \mathscr{L})| \Leftrightarrow \sqrt{(h-5)^2+(k+1)^2} = \frac{|2h-3k+13|}{\sqrt{4+9}}$

De donde obtenemos la ecuación : $9h^2+4k^2+12hk-182h+104k+169=0$ (2)

Sustituyendo (1) en (2) y efectuando operaciones se reduce a

$$k^2 = 4 \Leftrightarrow k_1 = 2 \vee k_2 = -2 \text{, luego en (1) : } h_1 = 3 \vee h_2 = 23$$

Entonces, los centros tienen por coordenadas : $C_1(3, 2)$ y $C_2(23, -2)$

$r_1 = |\overline{AC_1}| = \sqrt{(3-6)^2+(2-4)^2} = \sqrt{13}$; $r_2 = |\overline{AC_2}| = \sqrt{(23-6)^2+(-2-4)^2} = \sqrt{325}$

Por tanto, las ecuaciones de las circunferencias son :

$$\mathscr{C}_1 : (x-3)+(y-2)^2 = 13 \vee \mathscr{C}_2 : (x-23)^2+(y+2)^2 = 325$$

Hay dos soluciones : $\mathscr{L} \cap \mathscr{C}_1 = P(1, 5)$ y $\mathscr{L} \cap \mathscr{C}_2 = Q(13, 13)$ ■

7 Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta L : $x-2y=2$ en T(8, 3) y que pasa por el punto P(12, 7).

Solución. Sea C(h, k) el centro de la circunferencia.

Como el radio es perpendicular a la tangente en el punto T, entonces :

$m_{CT} \cdot m_{\mathscr{L}} = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{k-3}{h-8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, de donde : $2h+k-19 = 0$ (1)

Además, el centro está en la mediatriz de $\overline{PT}$, entonces si

$|\overline{TC}| = |\overline{PC}| \Leftrightarrow \sqrt{(h-8)^2+(k-3)^2} = \sqrt{(h-12)^2+(k-7)^2}$

de donde se tiene : $h+k-15 = 0$ (2)

La solución común de (1) y (2) es: $h = 4$ y $k = 11 \Rightarrow C(4, 11)$

$$r = |\overline{CP}| = \sqrt{(12-4)^2+(7-11)^2} = \sqrt{80}$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$\mathscr{C} : (x-4)^2+(y-11)^2 = 80$$ ■

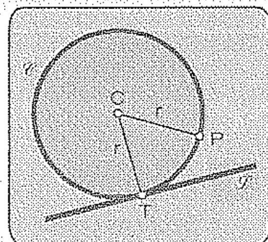


FIGURA 4.37

8 Dada la circunferencia $\mathscr{C} : x^2+y^2-2x-8y-8=0$ y dos puntos fijos A(13, 2) y B(16, 6). Hallar sobre la circunferencia los puntos P y R que unidos a A y B determinen triángulos de área máxima y mínima respectivamente.

Solución. Si trazamos la tangente $\mathscr{L}_1 \parallel \overline{AB}$, cualquier triángulo de base $\overline{AB}$ cuyo tercer vértice esté sobre $\mathscr{L}_1$ tendrá la misma altura $\overline{RH}$; es decir , tendrá la misma área que el ΔABR. Cualquier otro punto sobre $\mathscr{C}$, distinto de R , el D por ejemplo, estará encima de la tangente, y su altura será mayor que $\overline{RH}$, por lo que, su área será mayor. Luego el ΔABR será el de área mínima.

Por un razonamiento similar, el ΔABP será el de área máxima. Determinemos, entonces, los puntos P y R.

Centro de la circunferencia : C(1 , 4) y $m_{AB} = \frac{6-2}{16-13} = \frac{4}{3}$

La ecuación de la recta que pasa por $C \perp \overline{AB}$ es :

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x-1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x + 4y - 19 = 0$$

Por tanto , $\mathscr{L} \cap \mathscr{C} = R(5 , 1)$ y $P(-3 , 7)$.

Las áreas mínima y máxima son , 14.5 u^2 y 39.5 u^2 ■

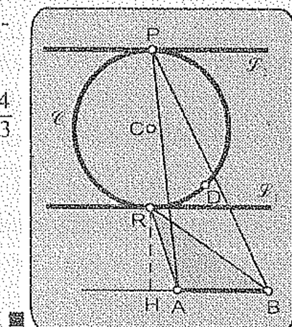


FIGURA 4.38

9 Cuál es lugar geométrico de los puntos desde donde se ve un segmento $A(-a , 0)$, $B(a , 0)$ bajo un mismos ángulo α.

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico

2. $m_{BP} = m_2 = \frac{y}{x-a}$; $m_{AP} = m_1 = \frac{y}{x+a}$

$$\text{Si } Tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow Tg\alpha = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{x^2 - a^2}}$$

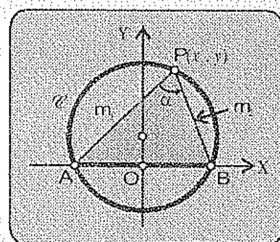


FIGURA 4.39

3. Haciendo $k = Tg\,\alpha$, se tiene :

$$kx^2 + ky^2 - 2ay = a^2k \Leftrightarrow \mathscr{C} : (x-0)^2 + \left(y - \frac{a}{k}\right)^2 = \frac{a^2}{k^2}(1 + k^2)$$

La ecuación del lugar geométrico es una circunferencia. ■

10 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P(1 , 4) y es tangente a las rectas $\mathscr{L}_1 : 3x - y + 5 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x - 3y - 9 = 0$

Solución. El centro de la circunferencia estará en la bisectriz del ángulo formado por $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

Esto es, por definición de distancia dirigida.

$$-d(C , \mathscr{L}_1) = -d(C , \mathscr{L}_2) \Rightarrow -\frac{3h - k + 5}{-\sqrt{9+1}} = -\frac{h - 3k - 9}{\sqrt{1+9}}$$

de donde : $h - k - 1 = 0 \Rightarrow h = k + 1$ (1)

Como $P \in \mathscr{C} \Rightarrow r = |\overline{PC}| = |d(C , \mathscr{L}_2)| = |d(C , \mathscr{L}_1)|$

$$\Rightarrow \sqrt{(h-1)^2 + (k-4)^2} = \frac{|h - 3k - 9|}{\sqrt{10}}$$

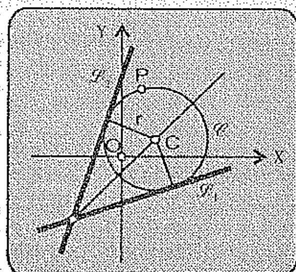


FIGURA 4.40

$$\Rightarrow 9h^2 + k^2 + 6hk - 2h - 134k + 89 = 0 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) la ecuación se reduce a

$$k^2 - 7k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1 \lor k_2 = 6 \Rightarrow h_1 = 2 \lor h_2 = 7$$

Luego, los centros de las circunferencias son : $C_1(2, 1)$ y $C_2(7, 6)$

$r_1 = |\overline{PC_1}| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10}$; $r_2 = |\overline{PC_2}| = \sqrt{(1-7)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{40}$

Por lo tanto , hay dos soluciones

$$\mathscr{C}_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \lor \mathscr{C}_2 : (x-7)^2 + (y-6)^2 = 40$$ ■

11 Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $\mathscr{L}: 5x - 3y - 1 = 0$ en $T(5, 8)$ y de radio $\sqrt{34}$.

Solución. Sea $C(h, k)$ el centro de la circunferencia $\mathscr{C}$.

Como $\overline{CT} \perp \mathscr{L} \Rightarrow m_{CT} \cdot m_{\mathscr{L}} = -1$

$$\Rightarrow \left(\frac{k-8}{h-5}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 3h + 5k - 55 = 0 \qquad (1)$$

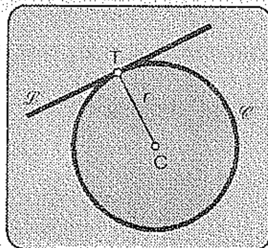


FIGURA 4.41

Además, $r = |d(C, \mathscr{L})| \Rightarrow \sqrt{34} = \dfrac{|5h - 3k - 1|}{\sqrt{25+9}}$

de donde : $|5h - 3k - 1| = 34$

$$\Leftrightarrow (5h - 3k - 1 = 34) \lor (5h - 3k - 1 = -34)$$

$$\Leftrightarrow (5h - 3k - 35 = 0) \lor (5h - 3k + 33 = 0)$$

La solución común de (1) con cada una de estas ecuaciones es : $C_1(10, 5)$ y $C_2(0, 11)$.

Por tanto, las ecuaciones de las circunferencias son

$$\mathscr{C}_1 : (x-10)^2 + (y-5)^2 = 34 \lor \mathscr{C}_2 : (x-0)^2 + (y-11)^2 = 34$$ ■

12 Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 6x - 10y + 17 = 0$, paralela a la recta $\mathscr{L}_1 : x + 4y = 0$

Solución. Si $\mathscr{C} : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 17 \Rightarrow C(3, 5)$ y $r = \sqrt{17}$

La familia de rectas paralelas a $\mathscr{L}_1$ es , $\mathscr{L}: x + 4y + k = 0 \qquad (1)$

Como un miembro de esta familia es tangente a la circunferencia, entonces

$$d(C, \mathscr{L}) = r \Rightarrow \frac{|3 + 4(5) + k|}{\sqrt{1+16}} = \sqrt{17}$$

$$\Rightarrow |k + 23| = 17 \Leftrightarrow k + 23 = 17 \lor k + 23 = -17$$

$$\Leftrightarrow k = -6 \lor k = -40$$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las rectas que son tangentes a $\mathscr{C}$, son

$$\mathscr{L}: x + 4y - 6 = 0 \lor \mathscr{L}: x + 4y - 40 = 0$$ ■

Capítulo 5

TRANSFORMACION DE COORDENADAS

En este capítulo investigaremos el efecto que tiene sobre una ecuación dos transformaciones fundamentales : *Traslación de ejes coordenados y rotación de ejes coordenados.*

5.1 TRASLACION DE EJES COORDENADOS

Una transformación es una operación por la cual una relación se cambia por otra siguiendo una ley dada.
Por esta operación, se dice que los ejes coordenados son *trasladados* si los nuevos ejes son paralelos a los originales y orientados como éstos.

TEOREMA 5.1 Si el origen O es trasladado a O'(h , k) y si (x , y) , (x' , y') son las coordenadas de un punto P referidas a los ejes original y nuevo, respectivamente, entonces

$$x = x' + h \quad , \quad y = y' + k$$

Demostración. En la Figura 5.1 , se tiene :

$\overline{DP} \perp \overline{OX}$ y $\overline{DP} \perp \overline{OX'}$

$\overline{FP} \perp \overline{OY}$ y $\overline{FP} \perp \overline{OY'}$

Por tanto : $\overline{DP} = y$, $\overline{CP} = y'$; $\overline{FP} = x$, $\overline{EP} = x'$

Además : $\overline{DC} = k$ y $\overline{FE} = h$

Entonces, si escribimos : $\overline{FP} = \overline{EP} + \overline{FE}$ y $\overline{DP} = \overline{CP} + \overline{DC}$

tendremos : $$x = x' + h \quad , \quad y = y' + k$$

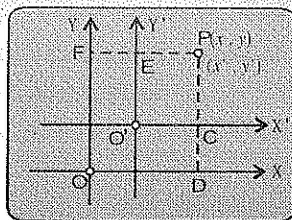


FIGURA 5.1

EJERCICIOS . Grupo 20

En cada uno de los ejercicios 1 al 5, transfórmese la ecuación dada trasladando los ejes coordenados al nuevo origen indicado. Para cada ejercicio es conveniente trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

1 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$; O'(-1 , 3)

Solución. Por el Teorema 5.1, las ecuaciones de traslación son : $x = x' - 1$; $y = y' + 3$

Sustituyendo estos valores en la ecuación original obtenemos :

$$(x' - 1) + (y' + 3)^2 + 2(x' - 1) - 6(y' + 3) + 6 = 0$$

Desarrollando y simplificando la ecuación se reduce a

$$\mathscr{C}: x'^2 + y'^2 = 4$$

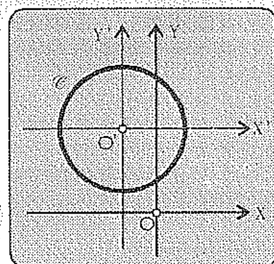


FIGURA 5.2

El lector reconocerá de inmediato que este lugar geométrico es una circunferencia, cuya gráfica, mostrada en la Figura 5.2 , es también la gráfica de la ecuación original. Evidentemente que es mucho más fácil trazar el lugar geométrico usando la ecuación transformada que la original. ■

El trazo de la gráfica de las ecuaciones en los demás ejercicios queda a cargo del lector.

2 $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$; O'(-2 , 1)

Solución. Ecuaciones de traslación : $x = x' - 2$, $y = y' + 1$

Sustituyendo en la ecuación original se tiene

$$3(x' - 2)^2 + 2(y' + 1)^2 + 12(x' - 2) - 4(y' + 1) + 8 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{E}: 3x'^2 + 2y'^2 = 6$$ ■

3 $4x^2 - y^2 - 8x - 10y - 25 = 0$; O'(1 , -5)

Solución. Ecuaciones de traslación : $x = x' + 1$, $y = y' - 5$

Sustituyendo en la ecuación dada obtenemos :

$$4(x' + 1)^2 - (y' - 5)^2 - 8(x' + 1) - 10(y' - 5) - 25 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{H}: 4x'^2 - y'^2 = 4$$ ■

4 $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0$; O'(-2 , -1)

Solución. Ecuaciones de traslación : $x = x' - 2$, $y = y' - 1$

Sustituyendo en la ecuación original tendremos :

$$(y' - 1)^3 - (x' - 2)^2 + 3(y' - 1)^2 - 4(x' - 2) + 3(y' - 1) - 3 = 0 \Leftrightarrow y'^3 - x'^2 = 0$$ ■

5 $xy - 3x + 4y - 13 = 0$; O'(-4 , 3)

Solución. Ecuaciones de traslación : $x = x' - 4$, $y = y' + 3$

Sustituyendo en la ecuación original obtenemos :

$$(x' - 4)(y' + 3) - 3(x' - 4) + 4(y' + 3) - 13 = 0 \Leftrightarrow x'y' = 1$$ ■

En cada uno de los ejercicios 6 al 10, por una traslación de ejes, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca de términos de primer grado. Use las ecuaciones de traslación del Teorema 5.1

6 $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$

Solución. Ecuaciones de traslación : $x = x' + h$, $y = y' + k$

Sustituyendo en la ecuación original se tiene :

$$2(x' + h)^2 + (y' + k)^2 + 16(x' + h) - 4(y' + k) + 32 = 0$$

Efectuando y agrupando términos puede escribirse en la forma

$$2x'^2 + y'^2 + (4h + 16)x' + (2k - 4)y' + 2h^2 + k^2 + 16h - 4k + 32 = 0 \qquad (1)$$

Si queremos que en esta nueva ecuación se anulen los términos de primer grado x' e y' , hacemos : $4h + 16 = 0$ y $2k - 4 = 0$, de donde : $h = -4$ y $k = 2$

Para estos valores de h y k , la ecuación (1) se reduce a

$$\mathscr{E} : 2x'^2 + y'^2 = 4$$ ■

7 $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$

Solución. Ecuaciones de traslación : $x = x' + h$, $y = y' + k$

Sustituyendo en la ecuación dada se tiene :

$$3(x' + h)^2 + 2(y' + k)^2 + 18(x' + h) - 8(y' + k) + 29 = 0$$

de donde : $3x'^2 + 2y'^2 + 6(h + 3)x' + 4(k - 2)y' + 3h^2 + 2k^2 + 18h - 8k + 29 = 0$ (1)

Para que $x' = 0$ e $y' = 0$, hacemos : $h + 3 = 0 \wedge k - 2 = 0$, de donde , $h = -3$, $k = 2$

Sustituyendo estos valores en (1) , obtenemos la transformada

$$\mathscr{E} : 3x'^2 + 2y'^2 = 6$$ ■

8 $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$

Solución. Ecuaciones de traslación : $x = x' + h$, $y = y' + k$

Sustituyendo en la ecuación original se tiene :

$$3(x' + h)^2 - 2(y' + k)^2 - 42(x' + h) - 4(y' + k) + 133 = 0$$

de donde : $3x'^2 - 2y'^2 + 6(h - 7)x' - 4(k + 1)y' + 3h^2 - 2k^2 - 42h - 4k + 133 = 0$ (1)

Haciendo $h - 7 = 0 \wedge k + 1 = 0 \Leftrightarrow h = 7 \wedge k = -1$, la ecuación (1) se reduce a

$$\mathscr{H} : 3x'^2 - 2y'^2 = 12$$ ■

9 $xy - x + 2y - 10 = 0$

Solución. Ecuaciones de traslación : $x = x' + h$, $y = y' + k$

Sustituyendo en la ecuación dada se tiene

$$(x' + h)(y' + k) - (x' + h) + 2(y' + k) - 10 = 0$$

de donde : $x'y' + (k - 1)x' + (h + 2)y' + hk - h + 2k - 10 = 0$ (1)

Para anular los términos lineales hacemos :

$$k - 1 = 0 \wedge h + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \wedge h = -2$$

Por tanto, en (1), la ecuación transformada es , $\mathscr{H} : x'y' = 8$ ■

10 $8x^2 + 24x^2 - 4y^2 + 24x - 12y - 1 = 0$

Solución. Sustituyendo las ecuaciones de traslación se tiene :

$$8(x' + h)^3 + 24(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 24(x' + h) - 12(y' + k) - 1 = 0$$

Después de desarrollar y agrupar términos la ecuación toma la forma

$$8x'^3 - 4y'^2 + 24(h + 1)x'^2 + 24(h + 1)2x' - 4(2k + 3)y' + 8h^3 + 24h^2 + 24h - 4k^2 - 12k = 1$$

Para eliminar los términos lineales hacemos

$$(h + 1)^2 = 0 \wedge 2k + 3 = 0 \Leftrightarrow h = -1 \wedge k = -3/2$$

Para estos valores, la ecuación (1) se reduce a

$$8x'^3 - 4y'^2 = 0 \Leftrightarrow 2x'^3 - y'^2 = 0$$ ■

En cada uno de los ejercicios 11 al 15, por una traslación de ejes coordenados transfórmese la ecuación dada en otra que carezca de términos de primer grado. Use el método de completar cuadrados.

11 $4x^2+4y^2+32x-4y+45=0$

Solución. Ordenando los términos de la ecuación dada se tiene

$$4(x^2+8x)+4(y^2-y)+45=0$$

Completando cuadrados : $4(x^2+8x+16)+4(y^2-y+1/4)=-45+64+1$

de donde : $4(x+4)^2+(y-1/2)^2=20 \Rightarrow (x+4)^2+(y-1/2)^2=5$

Haciendo las sustituciones : $x+4=x'$, $y-1/2=y'$, obtenemos la transformada

$$\mathscr{C}: x'^2+y'^2=5$$ ■

12 $2x^2+5y^2-28x+20y+108=0$

Solución. Ordenando : $2(x^2-14x)+5(y^2+4y)=-108$

Completando cuadrados : $2(x^2-14x+49)+5(y^2+4y+4)=-108+98+20$

$$\Rightarrow 2(x-7)^2+5(y+2)^2=10$$

Haciendo las sustituciones : $x-7=x'$, $y+2=y'$, obtenemos la transformada

$$\mathscr{E}: 2x'^2+5y'^2=10$$ ■

13 $x^2-3y^2+6x+6y+3=0$

Solución. Ordenando : $(x^2+6x)-3(y^2-2y)=-3$

Completando cuadrados : $(x^2+6x+9)-3(y^2-2y+1)=-3+9-3$

$$\Rightarrow (x+3)^2-3(y-1)^2=3$$

Haciendo las sustituciones , $x+3=x'$, $y-1=y'$, obtenemos la transformada

$$\mathscr{H}: x'^2-3y'^2=3$$ ■

14 $12x^2+18y^2-12x+12y-1=0$

Solución. Agrupando términos : $12(x^2-x)+18(y^2+\frac{2}{3}y)=1$

Completando cuadrados en los paréntesis se tiene :

$$12\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+18\left(y^2+\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}\right)=1+3+2 \Leftrightarrow 12(x-1/2)^2+18(y+1/3)^2=6$$

Haciendo las sustituciones , $x-1/2=x'$, $y+1/3=y'$, obtenemos la transformada

$$12x'^2+18y'^2=6 \Leftrightarrow \mathscr{E}: 2x'^2+3y'^2=1$$ ■

15 $12x^2 - 18y^2 - 12x - 12y - 5 = 0$

Solución. Agrupando términos : $12(x^2 - x) - 18(y^2 + \frac{2}{3}y) = 5$

Completando cuadrados en los paréntesis obtenemos :

$$12\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 18\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = 5 + 3 - 2 \Leftrightarrow 12(x - 1/2)^2 - 18(y + 1/3)^2 = 6$$

Haciendo las sustituciones : $x - 1/2 = x'$, $y + 1/3 = y'$, se tiene

$$12x'^2 - 18y'^2 = 6 \Leftrightarrow \mathscr{H}: 2x'^2 - 3y'^2 = 1$$



16 $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0$

Solución. Completando el cuadrado para la variable x , se tiene :

$$(x^2 + 8x + 16) = 3y - 10 + 16 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 3(y + 2)$$

Haciendo las sustituciones : $x + 4 = x'$, $y + 2 = y'$, obtenemos las transformada

$$\mathscr{P} : x'^2 = 3y'$$



17 $16x^2 + 16y^2 + 8x - 48y + 5 = 0$

Solución. Completando cuadrados para las variables x e y se tiene :

$$16(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}) + 16(y^2 - 3y + \frac{9}{4}) = -5 + 1 + 36$$

$$\Rightarrow 16(x + 1/4)^2 + 16(y - 3/2)^2 = 32$$

Haciendo las sustituciones : $x + 1/4 = x'$, $y - 3/2 = y'$, la ecuación se reduce a

$$16x'^2 + 16y'^2 = 32 \Leftrightarrow \mathscr{C}: x'^2 + y'^2 = 2$$



18 $72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$

Solución. Los términos de la ecuación pueden ordenarse de la forma

$$72(x^2 - \frac{2}{3}x) + 36(y^2 + y) = 55$$

Completando cuadrados, obtenemos

$$72(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) + 36(y^2 + y + \frac{1}{4}) = 55 + 8 + 9 \Leftrightarrow 72(x - 1/3)^2 + 36(y + 1/2)^2 = 72$$

Haciendo las sustituciones : $x - 1/3 = x'$, $y + 1/2 = y'$, se tiene la transformada

$$\mathscr{E}: 2x'^2 + y'^2 = 2$$



19 $y^2 - 6x^2 - 24x - 2y - 32 = 0$

Solución. Agrupando términos se tiene : $(y^2 - 2y) - 6(x^2 + 4x) = 32$

Completando cuadrados : $(y^2 - 2y + 1) - 6(x^2 + 4x + 4) = 32 + 1 - 24$

$$\Rightarrow (y - 1)^2 - 6(x + 2)^2 = 9$$

Haciendo las sustituciones : $y - 1 = y'$, $x + 2 = x'$, obtenemos la transformada

$$\mathscr{H}: y'^2 - 6x'^2 = 9$$ ▪

20 $30xy + 24x - 25y - 80 = 0$

Solución. Sustituyendo las ecuaciones de traslación en la ecuación dada se tiene

$$30(x' + h)(y' + k) + 24(x' + h) - 25(y' + k) - 80 = 0$$

$$\Rightarrow 30x'y' + 6(5k + 4)x' - 5(6h - 5)y' + 30hk + 24h - 25k - 80 = 0 \quad (1)$$

Igualando a cero los coeficientes de x' e y' tendremos

$$5k + 4 = 0 \ , \ 6h - 5 = 0 \ \Leftrightarrow \ k = -4/5 \ , \ h = 5/6$$

Sustituyendo estos valores en (1) , obtenemos la transformada

$$x'y' = 2$$ ▪

5.2 ROTACION DE LOS EJES COORDENADOS

Ahora consideremos el segundo tipo de cambio de posición de los ejes coordenados, el cual se caracteriza en la siguiente definición.
Se dice que los ejes coordenados son rotados si permaneciendo fijo el origen ambos ejes giran el mismo ángulo alrededor del origen.

TEOREMA 5.2 Si (x , y) son las coordenadas de un punto antes de girar los ejes un ángulo θ, y si (x' , y') son las coordenadas después de la rotación , entonces

$$x = x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta \ , \quad y = x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta$$

Demostración. En efecto, la Figura 5.3 se ha construido trazando dos pares de ejes coordenados con el mismo origen y formando entre si un ángulo $\theta < 90°$. Desde el punto P, de coordenadas (x , y) y (x' , y') con respecto a los ejes originales y nuevos , bajamos las perpendiculares $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ a los ejes X y X', y final-

mente unimos O y P. Si α es el ángulo POB, entonces, por trigonometría :

$\overline{OA} = \overline{OP}\,\text{Cos}(\theta + \alpha) = r(\text{Cos}\theta\,\text{Cos}\alpha - \text{Sen}\theta\,\text{Sen}\alpha)$

$\Rightarrow x = r\,\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\theta - r\,\text{Sen}\alpha\,\text{Sen}\theta \qquad (1)$

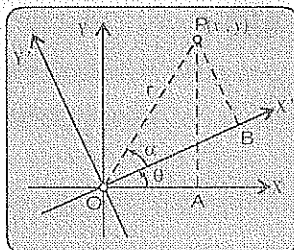


FIGURA 5.3

Como $x' = \overline{OB} = r\,\text{Cos}\alpha$, $y' = \overline{BP} = r\,\text{Sen}\alpha$, entonces en (1) se tiene :

$x = x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta$

Análogamente : $\overline{AP} = y = r\,\text{Sen}(\theta + \alpha) = r(\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\alpha + \text{Sen}\alpha\,\text{Cos}\theta)$

$$\Rightarrow y = r\,\text{Cos}\alpha\,\text{Sen}\theta + r\,\text{Sen}\alpha\,\text{Cos}\theta = x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta$$

EJERCICIOS . *Grupo 21*

1 Hallar las nuevas coordenadas del punto P(3 , -4) cuando los ejes coordenados giran un ángulo de 30°.

Solución. Resolviendo las ecuaciones de rotación del Teorema 5.2 , para las variables x' e y', obtenemos : $x' = x\,\text{Cos}\,\theta + y\,\text{Sen}\,\theta$

$$y' = -x\,\text{Sen}\,\theta + y\,\text{Sen}\,\theta$$

Luego ,
$$\left.\begin{aligned} x' &= 3\,\text{Cos}30° - 4\,\text{Sen}30° = \tfrac{3}{2}\sqrt{3} - 2 \\ y' &= -3\,\text{Sen}30° - 4\,\text{Cos}\,30° = -\tfrac{3}{2} - 2\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(3\sqrt{3}/2 - 2\,,\, -3/2 - 2\sqrt{3}) \quad ■$$

2 Hallar las nuevas coordenadas de los puntos P(1 , 0) y Q(0 , 1) cuando los ejes coordenados giran un ángulo de 90°

Solución. Haciendo uso de las fórmulas obtenidas en el Ejercicio 1 se tiene :

Para el punto P(1 , 0) : $x' = 1\,\text{Cos}\,90° + 0\,\text{Sen}\,90° = 1(0) + 0(1) = 0$

$$y' = -1\,\text{Sen}\,90° + 0\,\text{Cos}\,90° = -1(1) + 0(0) = -1$$

Por lo que las nuevas coordenadas de P son (0 , -1)

Para el punto Q(0 , 1) :
$$\left.\begin{aligned} x' &= 0\,\text{Cos}\,90° + 1\,\text{Sen}\,90° = 0 + 1(1) = 1 \\ y' &= -0\,\text{Sen}\,90 + 1\,\text{Cos}\,90° = 0 + 1(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q(1\,,\,0) \quad ■$$

En cada uno de los ejercicios 3 al 8, hallar la transformada de la ecuación dada, al girar los ejes coordenados un ángulo igual al indicado.

3 $2x+5y-3=0 \quad , \quad \theta=\text{arcTg}(2.5)$

Solución. Si $\theta=\text{arcTg}(2.5) \Leftrightarrow \text{Tg}\theta=\frac{5}{2} \Rightarrow \text{Sen}\theta=\frac{5}{\sqrt{29}}$ y $\text{Cos}\theta=\frac{2}{\sqrt{29}}$

Ecuaciones de rotación :

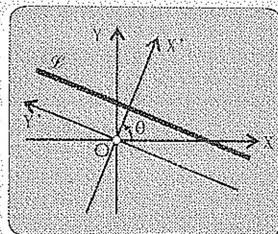


FIGURA 5.4

$$x=x'\text{Cos}\theta-y'\text{Sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{29}}(2x'-5y')$$

$$y=x'\text{Sen}\theta+y'\text{Cos}\theta=\frac{1}{\sqrt{29}}(5x'+2y')$$

Sustituyendo en la ecuación original dada se tiene :

$$\frac{2}{\sqrt{29}}(2x'-5y')+\frac{5}{\sqrt{29}}(5x'+2y')-3=0 \Leftrightarrow \mathscr{L}: \sqrt{29}\,x'-3=0$$

El lugar geométrico (Figura 5.4), en el sistema X'O'Y', es una recta vertical. ■

4 $x^2-2xy+y^2-x=0 \ , \ \theta=45°$

Solución. Ecuaciones de rotación :

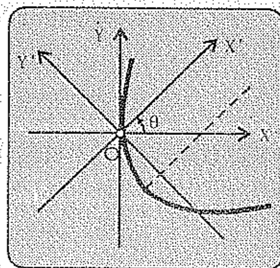


FIGURA 5.5

$$x=x'\text{Cos}\theta-y'\text{Sen}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$$

$$y=x'\text{Sen}\theta+y'\text{Cos}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

Sustituyendo en la ecuación dada se tiene :

$$\frac{1}{2}(x'-y')^2-\frac{2}{2}(x'-y)(x'+y')+(x'+y')^2-\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')=0$$

Simplificando esta ecuación obtenemos la transformada

$$4y'^2-\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'=0 \Leftrightarrow \left(y'+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x'+\frac{\sqrt{2}}{16}\right)$$

El lugar geométrico (Figura 5.5) es una parábola. ■

5 $\sqrt{3}\,y^2+3xy-1=0 \ ; \ \theta=60°$

Solución. Ecuaciones de rotación

$$x=x'\text{Cos}\theta-y'\text{Sen}\theta=\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}\,y')$$

$$y=x'\text{Sen}\theta+y'\text{Cos}\theta=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'+y')$$

Sustituyendo en la ecuación original se tiene :

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}x'+y')^2+\frac{3}{4}(x'-\sqrt{3}y')(\sqrt{3}x'+y')-1=0$$

Efectuando y simplificando obtenemos la transformada

$$\mathscr{H}: 3\sqrt{3}x'^2-\sqrt{3}y'^2=2$$

El lugar geométrico es una hipérbola que está representada en la Figura 5.6. ∎

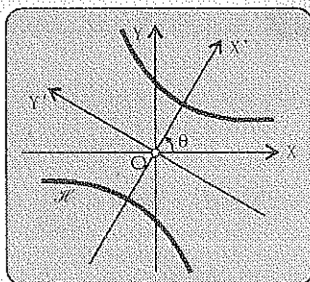


FIGURA 5.6

6 $5x^2+3xy+y^2-4=0$; $\theta=\text{arc Sen}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

Solución. Si $\theta=\text{arc Sen}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \Rightarrow \text{Sen}\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$ y $\text{Cos}\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Ecuaciones de rotación

$$x=x'\text{Cos}\theta-y'\text{Sen}\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}(3x'-y')$$

$$y=x'\text{Sen}\theta+y'\text{Cos}\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}(x'+3y')$$

Sustituyendo en la ecuación dada se tiene :

$$\frac{5}{10}(3x'-y')^2+\frac{3}{10}(3x'-y')(x+3y')+\frac{1}{10}(x'+3y')^2=4$$

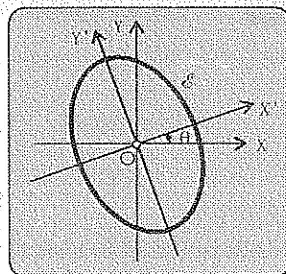


FIGURA 5.7

Efectuando operaciones , la ecuación se reduce a

$$\mathscr{E}: 11x'^2+y'^2=8$$ ∎

7 $11x^2+24xy+4y^2-20=0$; $\theta=\text{arcTg}(0.75)$

Solución. Si $\theta=\text{arcTg}\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \text{Tg}\theta=\frac{3}{4}$

Entonces : $\text{Sen}\,\theta=\frac{3}{5}$ y $\text{Cos}\,\theta=\frac{4}{5}$

Ecuaciones de rotación :

$$x=x'\,\text{Cos}\theta-y'\,\text{Sen}\theta=\frac{1}{5}(4x'-3y')$$

$$y=x'\,\text{Sen}\theta+y'\,\text{Cos}\,\theta=\frac{1}{5}(3x'+4y')$$

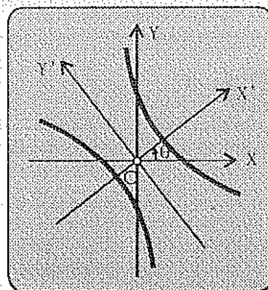


FIGURA 5.8

Sustituyendo en la ecuación dada se tiene :

$$\frac{11}{25}(4x' - 3y')^2 + \frac{24}{25}(4x' - 3y')(3x' + 4y') + \frac{4}{25}(3x' + 4y')^2 = 10$$

Desarrollando y simplificando esta ecuación obtenemos la transformada :

$$4x'^2 - y'^2 = 4$$

El lugar geométrico (Figura 5.8) es una hipérbola. ■

8 $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 32 = 0$; $\theta = 45°$

Solución. Ecuaciones de rotación

$$x = x' \text{Cos}\theta - y' \text{Sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x' \text{Sen}\theta + y' \text{Cos}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

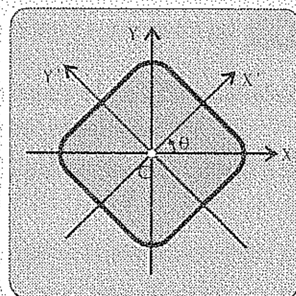


FIGURA 5.9

Sustituyendo en la ecuación original se tiene :

$$\frac{1}{4}(x' - y')^4 + \frac{1}{4}(x' + y')^4 + \frac{6}{4}(x' - y')^2(x' + y')^2 = 32$$

Desarrollando y simplificando obtenemos la ecuación de la transformada : $x'^4 + y'^4 = 16$

El lugar geométrico está representada en la Figura 5.9 ■

9 Por rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación $2x - y - 2 = 0$ en otra que carezca del término x' .

Solución. Sustituyendo las ecuaciones de rotación en la ecuación dada se tiene :

$$2(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta) - (x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\,\text{Cos}\theta - \text{Sen}\theta)x' - (2\,\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)y' - 2 = 0 \qquad (1)$$

Si $x' = 0 \Rightarrow 2\,\text{Cos}\theta - \text{Sen}\theta = 0 \Leftrightarrow \text{Tg}\theta = 2$, luego , $\text{Sen}\theta = 2/\sqrt{5}$ y $\text{Cos}\theta = 1/\sqrt{5}$

Por tanto, en (1) , se tiene : $\left(\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)y' - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}\,y' + 2 = 0$ ■

10 Por rotación de los ejes coordenados, transformar la ecuación $x + 2y - 2 = 0$ en otra que carezca del término en y'.

Solución. Sustituyendo las ecuaciones de rotación en la ecuación dada se tiene :

$$(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta) + 2(x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\text{Cos}\theta + 2\,\text{Sen}\theta)x' + (2\,\text{Cos}\theta - \text{Sen}\theta)y' = 2 \qquad (1)$$

Si $y' = 0 \Rightarrow 2\,\text{Cos}\theta - \text{Sen}\theta = 0 \Leftrightarrow \text{Tg}\theta = 2 \Rightarrow \text{Sen}\theta = 2/\sqrt{5}$ y $\text{Cos}\theta = 1/\sqrt{5}$

Por tanto en (1) : $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)x' = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5}\,x' - 2 = 0$ ■

En cada uno de los ejercicios 11 al 16, por una rotación de ejes coordenados, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca del término en $x'y'$.

11 $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$

Solución. Si en la ecuación dada sustituimos los valores de x e y dados por las ecuaciones de rotación obtenemos :

$$4(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta)^2 + 4(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta)(x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta) + (x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta)^2 +$$
$$+ \sqrt{5}(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta) = 1$$

la cual, desarrollando y agrupando términos, toma la forma

$$(4\,\text{Cos}^2\theta + 4\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + \text{Sen}^2\theta)x'^2 + (4\,\text{Cos}2\theta - 3\,\text{Sen}2\theta)x'y' +$$
$$(4\,\text{Sen}^2\theta - 4\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + \text{Cos}^2\theta)y'^2 + \sqrt{5}\,x'\,\text{Cos}\theta - \sqrt{5}\,y'\,\text{Sen}\theta = 1 \qquad (1)$$

Si $x'y' = 0 \Rightarrow 4\,\text{Cos}2\theta - 3\,\text{Sen}2\theta = 0 \Leftrightarrow \text{Tg}2\theta = 4/3 \Rightarrow \frac{2\,\text{Tg}\theta}{1 - \text{Tg}^2\theta} = \frac{4}{3}$

de donde : $2\,\text{Tg}^2\theta + 3\,\text{Tg}\theta - 2 = 0 \Leftrightarrow \text{Tg}\theta = 1/2 \vee \text{Tg}\theta = -2$

Dado que $\theta < 90° \Rightarrow \text{Tg}\theta = \frac{1}{2}$, por lo que : $\text{Cos}\theta = 2/\sqrt{5}$ y $\text{Sen}\theta = 1/\sqrt{5}$

Si sustituimos estos valores en (1), obtenemos la transformada

$$5x'^2 + 2x' - y' - 1 = 0$$ ■

Nota. Evidentemente el problema de eliminar el término x'y' por este método es muy laborioso por la cantidad de cálculos que se presentan. Existe un método mucho más corto que reduce los cálculos considerablemente y que será estudiado en el Capítulo 9. Sin embargo , como referencia , para los demás ejercicios usaremos la fórmula $\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C}$ para eliminar el término $x'y'$, y en donde : A = coeficiente de x^2 , B = coeficiente de xy , C = coeficiente de y^2.

12 $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$

Solución. Angulo de rotación para eliminar el término $x'y'$

$$\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{3}{9 - 9} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\,\text{Cos}\,\theta - y'\,\text{Sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$

$$y = x'\,\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Si sustituimos en la ecuación dada, tenemos :

$$\frac{9}{2}(x' - y')^2 + \frac{3}{2}(x' - y')(x' - y') + \frac{9}{2}(x' + y')^2 = 5$$

la cual se reduce a la ecuación transformada : $21x'^2 + 15y'^2 = 10$

El lugar geométrico es una elipse. ■

13 $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 2$

Solución. Angulo de rotación: $\text{Tg}\,2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{4}{5 - 2} = \frac{4}{3}$

Luego , si $\frac{2\,\text{Tg}\theta}{1 - \text{Tg}^2\theta} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\,\text{Tg}^2\theta + 3\,\text{Tg}\theta - 2 = 0 \Leftrightarrow \text{Tg}\theta = \frac{1}{2} \vee \text{Tg}\theta = -2$

Si $\text{Tg}\,\theta = 1/2 \Rightarrow \text{Sen}\,\theta = 1/\sqrt{5}$ y $\text{Cos}\,\theta = 2/\sqrt{5}$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\text{Cos}\,\theta - y'\text{Sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y')$

$$y = x'\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y')$$

Sustituyendo en la ecuación dada se tiene

$$\frac{5}{5}(2x' - y')^2 + \frac{4}{5}(2x' - y')(x' + 2y') + \frac{2}{5}(x' + 2y')^2 = 2$$

Simplificando obtenemos la ecuación transformada : $6x'^2 + y'^2 = 2$

El lugar geométrico es una elipse. ■

14 $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$

Solución. Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-5}{2 - 2} = \infty \Rightarrow \theta = 45°$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\text{Cos}\,\theta - y'\text{Sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$

$$y = x'\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación dada se tiene :

$$\frac{2}{2}(x' - y')^2 - \frac{5}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{2}{2}(x' + y')^2 = 0$$

De donde, simplificando obtenemos la ecuación transformada

$$x'^2 - 9y'^2 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x' + 3y' = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x' - 3y' = 0$$

El lugar geométrico representa un par de rectas concurrentes en el origen ■

15 $x^2 - 2xy + y^2 = 4$

Solución. Angulo de rotación: $\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-2}{1 - 1} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90 \Leftrightarrow \theta = 45°$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\text{Cos}\,\theta - y'\text{Sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$

$$y = x'\,\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Si sustituimos estos valores de x e y en la ecuación original obtenemos

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{2}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 4$$

De donde resulta la transformada : $y'^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : y' = \sqrt{2} \vee \mathscr{L}_2 : y' = -\sqrt{2}$

El lugar geométrico representa un par de rectas paralelas. ■

16 $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$

Solución. Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{24}{16 - 9} = \frac{24}{7}$

$$\text{Si } \frac{2 - \text{Tg}\,\theta}{1 - \text{Tg}^2\theta} = \frac{24}{7} \Rightarrow 12\,\text{Tg}^2\theta + 7\,\text{Tg}\theta - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Tg}\theta = 3/4 \vee \text{Tg}\theta = -4/3$$

Como $\theta < 90° \Rightarrow \text{Tg}\,\theta = 3/4$, luego , $\text{Sen}\theta = 3/5$ y $\text{Cos}\theta = 4/5$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\,\text{Cos}\,\theta - y'\,\text{Sen}\,\theta = \frac{1}{5}(4x' - 3y')$

$$y = x'\,\text{Sen}\,\theta + y'\,\text{Cos}\theta = \frac{1}{5}(3x' + 4y')$$

Sustituyendo en la ecuación original tenemos :

$$\frac{16}{25}(4x' - 3y')^2 + \frac{24}{25}(4x' - 3y')(3x' + 4y') + \frac{9}{25}(3x' + 4y')^2 + \frac{25}{5}(4x' - 3y') = 0$$

Simplificando esta última ecuación obtenemos la transformada

$$5x'^2 + 4x' - 3y' = 0$$

■

17 La ecuación de una circunferencia es $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = r^2$. Demostrar que la forma de esta ecuación no se altera cuando se refiere a los ejes coordenados que han girado cualquier ángulo θ. Se dice que esta ecuación es *invariante* por rotación.

Solución. Si en la ecuación de $\mathscr{C}$ sustituimos los valores de x e y dados por las ecuaciones de rotación, obtenemos

$$\mathscr{C}: (x' \operatorname{Cos}\theta - y' \operatorname{Sen}\theta)^2 + (x' \operatorname{Sen}\theta + y' \operatorname{Cos}\theta)^2 = r^2$$

la cual, después de efectuar el desarrollo y agrupar términos, toma la forma

$$\mathscr{C}: (\operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta)x'^2 + (\operatorname{Sen}^2\theta + \operatorname{Cos}^2\theta)y'^2 = r^2$$

de donde obtenemos la transformada , $\mathscr{C}': x'^2 + y'^2 = r^2$

Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{C}$ no se ha alterado. ■

18 Deducir las ecuaciones de transformación del Teorema 5.2, cuando el ángulo θ es obtuso.

El ejercicio se deja a cargo del lector . *Sol.* $x = -x' \operatorname{Cos}\theta - y' \operatorname{Sen}\theta$

$y = x' \operatorname{Sen}\theta - y' \operatorname{Cos}\theta$

19 Las ecuaciones de transformación del Teorema 5.2 pueden considerarse como un sistema de dos ecuaciones en las dos incógnitas x' e y'. Para cualquier valor de θ, demuéstrese que el determinante de este sistema es la unidad y, por tanto, que por la regla de Cramer el sistema tiene una única solución para x' e y' dada por :

$$x' = x \operatorname{Cos}\theta + y \operatorname{Sen}\theta$$
$$y' = -x \operatorname{Sen}\theta + y \operatorname{Cos}\theta$$

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones recíprocas* de las originales de transformación.

Demostración. En efecto, las ecuaciones de rotación son :

$$x = x' \operatorname{Cos}\theta - y' \operatorname{Sen}\theta$$
$$y = x' \operatorname{Sen}\theta + y' \operatorname{Cos}\theta$$

Según la regla de Cramer, el determinante del sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{Cos}\theta & -\operatorname{Sen}\theta \\ \operatorname{Sen}\theta & \operatorname{Cos}\theta \end{vmatrix} = \operatorname{Cos}^2\theta - (-\operatorname{Sen}^2\theta) = \operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta = 1$$

Luego , si : $x' = \dfrac{\begin{vmatrix} x & -\operatorname{Sen}\theta \\ y & \operatorname{Cos}\theta \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow x' = x\operatorname{Cos}\theta + y\operatorname{Sen}\theta$

$$y' = \dfrac{\begin{vmatrix} \operatorname{Cos}\theta & x \\ \operatorname{Sen}\theta & y \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow y' = -x\operatorname{Sen}\theta + y\operatorname{Cos}\theta$$ ■

20 Por una rotación de 45° de los ejes coordenados, una cierta ecuación se transformó en $4x'^2 - 9y'^2 = 36$. Hállese la ecuación original usando el resultado del Ejercicio 19.

Solución. Las ecuaciones recíprocas de rotación son

$$x' = x\operatorname{Cos}\theta + y\operatorname{Sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

$$y' = -x\operatorname{Sen}\theta + y\operatorname{Cos}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)$$

Sustituyendo estos valores de x' e y' en la ecuación transformada se tiene :

$$\frac{4}{2}(x+y)^2 - \frac{9}{2}(y-x)^2 = 36$$

De donde, efectuando obtenemos la ecuación original : $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 72 = 0$ ■

5.3 SIMPLIFICACION DE ECUACIONES POR TRANSFORMACION DE COORDENADAS

TEOREMA 5.3 Si efectuamos un cambio de ejes coordenados mediante una traslación y una rotación, tomados en cualquier orden , y las coordenadas de cualquier punto P referido a los sistemas original y final son $(x\,;\,y)$ y $(x''\,,\,y'')$, respectivamente, las ecuaciones de transformación del sistema original al nuevo sistema de coordenadas son

$$x = x''\operatorname{Cos}\theta - y''\operatorname{Sen}\theta + h$$
$$y = x''\operatorname{Sen}\theta + y''\operatorname{Cos}\theta + k$$

Nota. Aunque las ecuaciones de transformación del Teorema 5.3 pueden emplearse cuando se van a efectuar simultáneamente una traslación y una rotación, es generalmente, más sencillo, efectuar estas operaciones separadamente en dos pasos diferente. Primero, efectuar una rotación aplicando la fórmula $Tg2\theta = \frac{B}{A - C}$ para eliminar el término xy, y luego, efectuar la traslación de los X' e Y' a su nuevo origen O''(h, k).

EJERCICIOS . *Grupo 22*

En cada uno de los ejercicios del 1 al 5, simplifíquese la ecuación dada por transformación de coordenadas.

1 $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$

Solución. Angulo de rotación :

$$Tg2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-24}{16 - 9} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90 \Rightarrow \theta = 45°$$

Ecuaciones de rotación.

$$x = x'\,Cos\theta - y'\,Sen\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x'\,Sen\theta + y'\,Cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

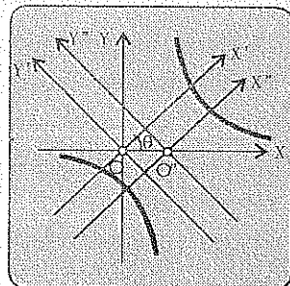


FIGURA 5.10

Sustituyendo en la ecuación original se tiene :

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 - \frac{10}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{10\sqrt{2}}{2}(x' - y') + \sqrt{2}(x' + y') + 13 = 0$$

Simplificando, la ecuación rotada toma la forma

$$4x'^2 - 6y'^2 + 4\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' = 13$$

Trasladando los ejes al nuevo origen O''(h , k), por el método de completar cuadrados resulta : $4(x' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 6(y' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 12$

Haciendo las sustituciones. $x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'' = y' + \frac{\sqrt{2}}{2}$, obtenemos la transformada : $2x''^2 - 3y''^2 = 6$

En la Figura 5.10 se han trazado el lugar geométrico de la transformada, una hipérbola, y todos los sistemas de ejes coordenados. ■

2 $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 104x + 72y - 48 = 0$

Solución. Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \dfrac{-72}{52-73} = \dfrac{24}{7}$

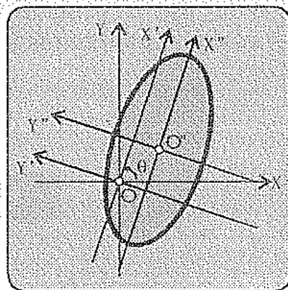


FIGURA 5.11

Si $\dfrac{2 - \text{Tg}\,\theta}{1 - \text{Tg}^2\theta} = \dfrac{24}{7} \Rightarrow 12\,\text{Tg}^2\theta + 7\,\text{Tg}\theta - 12 = 0$

$\Leftrightarrow \text{Tg}\,\theta = 3/4 \;\vee\; \text{Tg}\,\theta = -4/3$

Como $\theta < 90° \Rightarrow \text{Tg}\theta = 3/4$, luego: $\text{Sen}\theta = 3/5$ y $\text{Cos}\theta = 4/5$

Ecuaciones de rotación :

$$x = x'\text{Cos}\,\theta - y'\text{Sen}\,\theta = \frac{1}{5}(4x' - 3y')$$

$$y = x'\,\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{5}(3x' + 4y')$$

Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación dada , se tiene :

$$\frac{52}{25}(4x' - 3y')^2 - \frac{72}{25}(4x' - 3y')(3x' + 4y') + \frac{73}{25}(3x' + 4y')^2 - \frac{104}{5}(4x' - 3y')$$

$$+ \frac{72}{5}(3x' + 4y') = 48$$

De donde, simplificando resulta : $25x'^2 + 100y'^2 - 40x' + 120y' - 48 = 0$

Por el método de completar cuadrados, trasladamos los ejes al nuevo origen O''(h , k)

$$25(x' - 4/5)^2 + 100(y' + 3/5)^2 = 100 \Rightarrow (x' - 4/5)^2 + 4(y' + 3/5)^2 = 4$$

Haciendo las sustituciones , $x'' = x' - 4/5$, $y'' = y' + 3/5$, obtenemos la ecuación transformada : $x''^2 + 4y''^2 = 4$

El lugar geométrico es una elipse, cuya gráfica se muestra en la Figura 5.11 ■

3 $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y + 100 = 0$

Solución. Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{24}{16-9} = \dfrac{24}{7}$

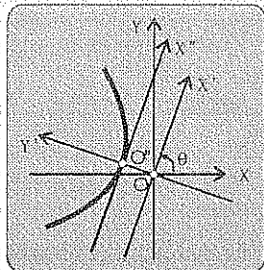


FIGURA 5.12

Por el Ejercicio 2 , $\text{Tg}\theta = 3/4$,

luego : $\text{Sen}\,\theta = 3/5$ y $\text{Cos}\,\theta = 4/5$

Ecuaciones de rotación : $x = \frac{1}{5}(4x' - 3y')$, $y = \frac{1}{5}(3x' + 4y')$

Sustituyendo en la ecuación original se tiene :

$$\frac{16}{25}(4x' - 3y')^2 + \frac{24}{25}(4x' - 3y')(3x' + 4y') + \frac{9}{25}(3x' + 4y')^2 +$$

$$+ \frac{60}{5}(4x' - 3y') - \frac{80}{5}(3x' + 4y') + 100 = 0$$

Efectuando operaciones, la ecuación se reduce a

$$625x'^2 - 2500y' + 2500 = 0 \Leftrightarrow x'^2 - 4y' + 4 = 0$$

la cual podemos escribir : $(x' - 0)^2 = 4(y' - 1)$

Trasladamos los ejes X' e Y', haciendo : $x' - 0 = x''$, $y' - 1 = y''$

Entonces, la ecuación transformada se reduce a su forma más simple : $x''^2 = 4y''$

El lugar geométrico es una parábola ilustrada en la Figura 5.12. ■

4 $3x + 4y - 5 = 0$

Solución. Sustituyendo las ecuaciones de rotación en la ecuación de la recta dada se tiene :

$$3(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta) + 2(x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta) = 5$$

$$\Rightarrow (3\,\text{Cos}\theta + 2\,\text{Sen}\theta)x' + (2\,\text{Cos}\theta - 3\,\text{Sen}\theta)y' = 5 \quad (1)$$

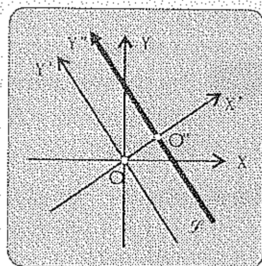


FIGURA 5.13

Para obtener la $\text{Tg}\theta > 0$, igualamos a cero el coeficiente de y' , esto es : $2\,\text{Cos}\theta - 3\,\text{Sen}\theta = 0 \Rightarrow \text{Tg}\theta = \frac{2}{3}$

Luego : $\text{Sen}\theta = 2/\sqrt{13}$ y $\text{Cos}\theta = 3/\sqrt{13}$.

Por lo que en (1) se tiene : $\left(\frac{9}{\sqrt{13}} + \frac{4}{\sqrt{13}}\right)x' = 5 \Leftrightarrow x' - 5/\sqrt{13} = 0$

Haciendo $x' - 5/\sqrt{13} = x''$, trasladamos el eje Y' sobre la recta $\mathscr{L}$, de modo que su ecuación reducida a su más simple expresión es, $\mathscr{L} : x'' = 0$ ■

5 $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$

Solución. Angulo de rotación :

$$\text{Tg}2\theta = \frac{2}{2-2} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90° \Leftrightarrow \theta = 45°$$

Ecuaciones de rotación :

$$x = x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

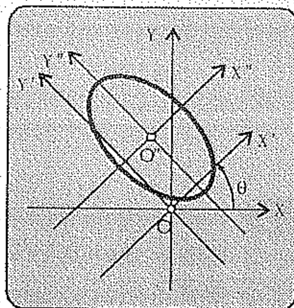


FIGURA 5.14

Sustituyendo en la ecuación original se tiene :

$$\frac{2}{2}(x' - y')^2 + \frac{2}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{2}{2}(x' + y')^2 - \sqrt{2}(x' - y')$$

$$- 5\sqrt{2}(x' + y') + 11 = 0$$

Efectuando operaciones, la ecuación se reduce a :

$$3x'^2 + y'^2 - 6\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' + 11 = 0 \Leftrightarrow 3(x' - \sqrt{2})^2 + (y' - 2\sqrt{2})^2 = 3$$

Haciendo : $x' - \sqrt{2} = x''$ y $y' - 2\sqrt{2} = y''$, obtenemos la transformada en su forma más simple , esto es : $3x''^2 + y''^2 = 3$

El lugar geométrico es una elipse mostrada en la Figura 5.14 ■

Nota. Los ejercicios 6 y 7 se refieren a los trazados de los lugares geométricos de los ejercicios 1 y 2, respectivamente, aplicando directamente los métodos del Capítulo 2 (Gráfica de una ecuación). La solución se deja a cargo del lector.

8 Por transformación de coordenadas, demuéstrese que la ecuación general de una recta, $Ax + By + C = 0$, puede transformarse en $y'' = 0$, que es la ecuación del eje X''

Demostración. En efecto, sustituyendo las ecuaciones de traslación en la ecuación de la recta dada, se tiene :

$$A(x' + h) + B(y' + k) + C = 0 \Rightarrow \mathscr{L}: Ax' + By' + (Ah + Bk + C) = 0$$

Como en el sistema X' O' Y' la recta pasa por O' , entonces , $Ah + Bk + C = 0$; por lo que en este sistema, la ecuación de la recta es , $\mathscr{L}' : Ax' + By' = 0$

Ahora, rotando los ejes X' e Y' un ángulo θ , tenemos :

$$\mathscr{L}'': A(x''\text{Cos}\theta - y''\text{Sen}\theta) + B(x''\text{Sen}\theta + y''\text{Cos}\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}'': (A\,\text{Cos}\theta + B\,\text{Sen}\theta)x'' + (B\,\text{Cos}\theta - A\,\text{Sen}\theta)\,y'' = 0 \qquad (1)$$

Si $x'' = 0 \Rightarrow A\,\text{Cos}\theta + B\,\text{Sen}\theta = 0 \Leftrightarrow \text{Cos}\theta = -\dfrac{B}{A}\text{Sen}\theta$

Sustituyendo este valor en (1) resulta : $\left(\dfrac{A^2 + B^2\ \text{Sen}\theta}{A}\right) y'' = 0$

Dado que $\dfrac{A^2 + B^2}{A}\text{Sen}\theta \neq 0$, implica que : $y'' = 0$ ■

9 Por transformación de coordenadas, demuéstrese que la ecuación general de la recta $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$, puede transformarse en $x'' = 0$, que es la ecuación del eje Y''.

La demostración es similar a la del Ejercicio 8 , por lo que se deja a cargo del lector.

10 Hallar las coordenadas del nuevo origen si los ejes coordenados se trasladan de manera que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se transforma en otra ecuación que carezca de términos de primer grado.

Solución. Trasladando los ejes X e Y al nuevo origen O' (h , k) se tiene :

$$A(x' + h)^2 + B(x' + h)(y' + k) + C(y' + k)^2 + D(x' + h) + E(y' + k) + F = 0$$

Efectuando operaciones y agrupando términos toma la forma

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Ah + Bk + D)x' + (Bh + 2Ck + E)y' + (Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) = 0$$

Si queremos que $x' = 0$ e $y' = 0 \Rightarrow 2Ah + Bk + D = 0$ (1)

$$Bh + 2Ck + E = 0 \quad (2)$$

De la solución común de (1) y (2) para h y k , obtenemos las coordenadas del nuevo origen :

$$O'\left(\frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} , \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}\right)$$ ■

11 Hallar las nuevas coordenadas del punto P(-1 , 3) cuando los ejes coordenados son trasladados primero al nuevo origen O'(4 , 5) y después se le gira un ángulo de 60°

Solución. Haciendo uso de las fórmulas de rotación y traslación del Teorema 5.3 , se tiene :

$$x = x''\text{Cos}\theta - y''\text{Sen}\theta + h \Rightarrow -1 = x''\left(\frac{1}{2}\right) - y''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 \Leftrightarrow x'' - \sqrt{3}\,y'' = -10 \quad (1)$$

$$y = x''\text{Sen}\theta + y''\text{Cos}\theta + k \Rightarrow 3 = x''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y''\left(\frac{1}{2}\right) + 5 \Leftrightarrow \sqrt{3}\,x'' + y'' = 4 \quad (2)$$

De (1) y (2) , resultan las nuevas coordenadas del punto P , esto es

$$P\left(-\frac{5}{2} - \sqrt{3} \; , \; \frac{5}{2}\sqrt{3} - 1\right)$$ ■

12 Hallar las nuevas coordenadas del punto P(2 , 2) cuando los ejes coordenados son girados primero un ángulo de 45° y después son trasladados al nuevo origen O'(-1 , 1).

La solución es similar a la del Ejercicio 11 , por lo que se deja a cargo del lector.

Sol. $P(2\sqrt{2} , \sqrt{2})$

13 Por traslación de los ejes coordenados al nuevo origen O'(3 , 3) y después rotación en un ángulo de 30° ; las coordenadas de un cierto punto P se transforman en (7 , 6). Hállese las coordenadas de P con respecto a los ejes originales.

Solución. Si $x = x''\text{Cos}\theta - y''\text{Sen}\theta + h \Rightarrow x = 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 6\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{7}{2}\sqrt{3}$

$$y = x''\text{Sen}\theta + y''\text{Cos}\theta + k \Rightarrow y = 7\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 = \frac{13}{2} + 3\sqrt{3}$$

$$\therefore\ P\left(\frac{7}{2}\sqrt{3}\ ,\ \frac{13}{2} + 3\sqrt{3}\right)$$ ■

14 Por una traslación de ejes coordenadas al nuevo origen O'(1 , 1) y luego rotación de los ejes en un ángulo de 45° , la ecuación de cierto lugar geométrico se transformó en $x''^2 - 2y''^2 = 2$. Hallar la ecuación del lugar geométrico con respecto a los ejes originales.

Solución. Por las ecuaciones recíprocas de rotación se tiene :

$$x'' = x'\text{Cos}\theta + y'\text{Sen}\theta \Rightarrow x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

$$y'' = -x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta \Rightarrow y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$$

Sustituyendo en la ecuación transformada tenemos :

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)(y' - x')^2 = 2 \Rightarrow 6x'y' - x'^2 - y'^2 = 4 \qquad (1)$$

Como , $x = x' + h$, $y = y' + k \Rightarrow x' = x - 1$, $y' = y - 1$

Sustituyendo estos valores de x' e y' en (1) obtenemos la ecuación original :

$$6(x-1)(y-1) - (x-1)^2 - (y-1)^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y = 0$$ ■

15 Demostrar, analíticamente que la distancia entre dos puntos en el plano coordenado no se altera (es invariante) con la transformación de coordenadas.

La demostración se deja para el lector.

En cada uno de los ejercicios del 16 al 20, hállese la ecuación del lugar geométrico del punto móvil y simplifíquese por transformación de coordenadas.

16 El punto se mueve de tal manera que su distancia del punto A(-2 , 2) es siempre igual a su distancia a la recta $\mathscr{L}$: $x - y + 1 = 0$

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}| = |d(P, \mathscr{L})|$

2. Forma analítica : $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2} = \dfrac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$

3. De donde obtenemos la ecuación del lugar geométrico :

$$x^2 + 2xy + y^2 + 6x - 6y + 15 = 0 \qquad (1)$$

Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{2}{1-1} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90° \Leftrightarrow \theta = 45°$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\text{Cos}\,\theta - y'\text{Sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$

$$y = x'\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Sustituyendo estos valores de x e y , en (1), la ecuación se reduce a

$$4x'^2 - 12\sqrt{2}\,y' + 15 = 0 \Rightarrow 4x'^2 = 12\sqrt{2}\left(y' - \frac{5\sqrt{2}}{8}\right)$$

Por lo tanto , $x''^2 = 3\sqrt{2}\,y''$ es la ecuación más simple del lugar geométrico. ■

17 El punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos A(1 , 1) y B(-1 , -1) es siempre igual a 4.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}| + |\overline{BP}| = 4$

2. Por el teorema de la distancia, esta condición geométrica está expresada analíticamente por : $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = 4$

3. De donde obtenemos : $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0$ (1)

Simplificación de la ecuación del lugar geométrico por rotación de ejes.

Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{-3}{3-3} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90 \Leftrightarrow \theta = 45°$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\text{Cos}\,\theta - y'\text{Sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$

$$y = x'\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Sustituyendo estos valores de x e y en (1) , se tiene :

$$\frac{3}{2}(x'-y')^2-\frac{2}{2}(x'-y')(x'+y')+\frac{3}{2}(x'+y')^2-8=0 \Rightarrow x'^2+2y'^2=4$$

Es la ecuación más simple del lugar geométrico (elipse). ■

18 El punto se mueve de tal manera que su distancia del punto A(2 , 1) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $\mathscr{L}: x+2y-2=0$

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}| = 2\,|d(P, \mathscr{L})|$

2. Forma analítica : $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 2\left(\frac{|x+2y-2|}{\sqrt{1+4}}\right)$

3. De donde obtenemos : $x^2-16xy-11y^2-4x+22y+9=0$ (1)

Simplificación de la ecuación por rotación de ejes

Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-16}{1-11} = -\frac{4}{3}$

Si $\frac{2\,\text{Tg}\theta}{1-\text{Tg}^2\theta} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 2\,\text{Tg}^2\theta-3\,\text{Tg}\theta-3\,\text{Tg}\theta-2=0 \Leftrightarrow \text{Tg}\theta=2 \lor \text{Tg}\theta=-1/2$

Como $\theta < 90° \Rightarrow \text{Tg}\theta = 2$, luego : $\text{Sen}\theta = 2/\sqrt{5}$ y $\text{Cos}\theta = 1/\sqrt{5}$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y')$

$$y = x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y')$$

Sustituyendo estos valores de x e y , en (1) , y simplificando, obtenemos la transformada : $15x'^2-5y'^2-8\sqrt{5}\,x'-6\sqrt{5}\,y'-9=0$

Ahora, por una traslación de ejes al nuevo origen O'(h , k) , se tiene :

$$15\left(x'^2-\frac{8\sqrt{5}}{15}x+\frac{16}{45}\right)-5\left(y'^2-\frac{6\sqrt{5}}{5}y'+\frac{9}{5}\right)=9+\frac{16}{3}-9$$

$$\Rightarrow 15\left(x'-\frac{4\sqrt{5}}{15}\right)^2-5\left(y'-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{16}{3}$$

Mediante las sustituciones : $x'-\frac{4\sqrt{5}}{15}=x''$, $y'-\frac{3\sqrt{5}}{5}=y''$, obtenemos la ecuación más simple del lugar geométrico, esto es :

$$15x''^2-5y''^2=16/3 \Leftrightarrow 45x''^2-15y''^2=16$$ ■

19 El punto se mueve de tal manera que su distancia de la recta L : x + 2y - 2 = 0 , es siempre igual al doble de su distancia del punto A(-1 , 1)

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|d(P, \mathscr{L})| = 2|\overline{AP}|$

2. Expresión analítica : $\dfrac{|x+2y-2|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

3. De donde obtenemos : $19x^2 - 4xy + 16y^2 + 44x - 32y + 36 = 0$ (1)

Simplificación de la ecuación por rotación de ejes.

Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{-4}{19-16} = -\dfrac{4}{5}$

Si $\dfrac{2\,\text{Tg}\theta}{1-\text{Tg}^2\theta} = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow 2\,\text{Tg}^2\theta - 3\,\text{Tg}\theta - 2 = 0 \Leftrightarrow \text{Tg}\theta = 2 \vee \text{Tg}\theta = -1/2$

Como $\theta < 90° \Rightarrow \text{Tg}\theta = 2$, luego, $\text{Sen}\,\theta = 2/\sqrt{5}$ y $\text{Cos}\,\theta = 1/\sqrt{5}$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\text{Cos}\,\theta - y'\text{Sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$

$$y = x'\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$$

Sustituyendo estos valores de x e y en (1), y simplificando obtenemos la transformada

$$15x'^2 + 20y'^2 - 4\sqrt{5}\,x' - 24\sqrt{5}\,y' + 36 = 0$$

Completando cuadrados resulta : $15\left(x' - \dfrac{2\sqrt{5}}{15}\right)^2 + 20\left(y' - \dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \dfrac{4}{3}$

Por tanto , $45x''^2 + 60y''^2 = 4$ es la ecuación más simple del lugar geométrico. ■

20 El punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos A(1 , 4) y B(-2 , 1) es siempre igual a 3.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}| - |\overline{BP}| = 3$

2. Expresión analítica : $\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} - \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} = 3$

3. De donde obtenemos : $8xy - 20x + 4y - 19 = 0$ (1)

Simplificación de la ecuación hallada por rotación de ejes coordenados.

Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{8}{0-0} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90 \Leftrightarrow \theta = 45°$

Ecuaciónes de rotación : $x = x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$

$$y = x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Sustituyendo estos valores de x e y en (1) , se tiene :

$$4(x' - y')(x' + y') - 10\sqrt{2}(x' - y') + 2\sqrt{2}(x' + y') - 19 = 0$$

$$\Rightarrow 4x'^2 - 4y'^2 - 8\sqrt{2}\,x' + 12\sqrt{2}\,y' - 19 = 0$$

Completando cuadrados resulta : $4(x' - \sqrt{2})^2 - 4\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9$

Por tanto , $4x''^2 - 4y''^2 = 9$, es la ecuación más simple del lugar geométrico. ■

Capítulo

6

LA PARABOLA

6.1 DEFINICION

La parábola es el conjunto de puntos situados en un plano de tal modo que desde cada punto, las distancias no orientadas a un punto fijo y una recta fija son iguales.

El punto fijo F se llama *foco*, y la recta fija $\mathscr{L}$, *directriz*. La recta que pasa por el foco perpendicularmente a la directriz se llama *eje*. El segmento de recta que pasa por el foco perpendicularmente al eje y que es interceptado por la parábola se llama *lado recto*. (Muchos autores lo llaman cuerda normal). La recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola tal como $\overline{CD}$ se llama *cuerda*, en particular, a la cuerda que pasa por el foco, tal como $\overline{AB}$, se llama *cuerda focal*. Si P es un punto cualquiera de la parábola, la recta $\overline{PF}$ se llama *radio focal* de P, o *radio vector*.

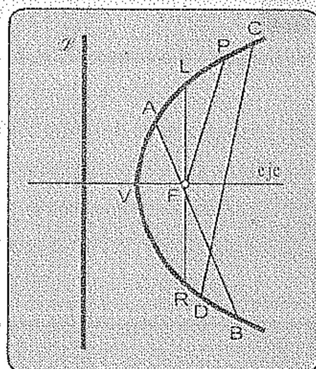


FIGURA 6.1

6.2 ECUACION DE LA PARABOLA DE VERTICE EN EL ORIGEN Y EJE UN EJE COORDENADO

TEOREMA 6.1 La ecuación de una parábola de vértice en el origen y eje, el eje Y, es

$$y^2 = 4px \qquad (1)$$

en donde el foco es el punto (p , 0) y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.
Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, y el vértice está en el origen, su ecuación es :

$$x^2 = 4py \qquad (2)$$

en donde el foco es el punto (0 , p), y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba ; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo. En cada caso, la longitud del lado recto está dado por el valor absoluto de 4p , que es el coeficiente del término de primer grado.

Nota. Las ecuaciones (1) y (2) se llaman, generalmente, *primera ecuación ordinaria* de la parábola.

EJERCICIOS . *Grupo 23*

En cada uno de los ejercicios del 1 al 4, hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada, y discutir el lugar geométrico correspondiente.

1 $y^2 = 12x$

Solución. La ecuación es de la forma : $y^2 = 4px$
$\Rightarrow 4p = 12 \Leftrightarrow p = 3 \ (p > 0)$

a) Coordenadas del foco : $F(p , 0) \Rightarrow F(3 , 0)$
b) Ecuación de la directriz : $x = -p \Rightarrow \mathscr{L} : x = -3$
c) Longitud del lado recto : $LR = |4p| = 12$
d) Como $p > 0$, la curva se abre hacia la derecha del eje Y, y su eje coincide con el eje X ∎

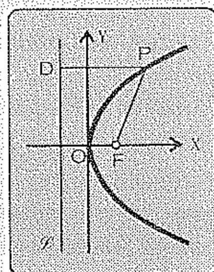


FIGURA 6.2

2 $x^2 = 12y$

Solución. La ecuación es de la forma : $x^2 = 4py$
$\Rightarrow 4p = 12 \Leftrightarrow p = 3 \ (p > 0)$

a) Coordenadas del foco : $F(0 , p) \Rightarrow F(0 , 3)$
b) Ecuación de la directriz : $y = -p \Rightarrow \mathscr{L}: y = -3$
c) Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = 12$

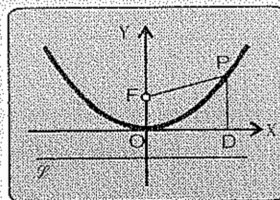


FIGURA 6.3

d) Como $p > 0$, la curva se abre hacia arriba y su eje coincide con el Y ■

3 $y^2 = -8x$

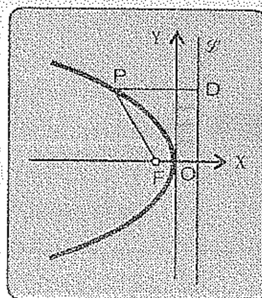


FIGURA 6.4

Solución. La ecuación es de la forma $y^2 = 4px$

Si $4p = -8 \Rightarrow p = -2$ $(p < 0)$

a) Coordenadas del foco : $F(p, 0) \Rightarrow F(-2, 0)$

b) Ecuación de la directriz : $x = -p \Rightarrow \mathscr{L}: x = 2$

c) Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = 8$

d) Dado que $p < 0$, la curva se abre hacia la izquierda del eje Y, y su eje de simetría coincide con el eje X. ■

4 $x^2 = -2y$

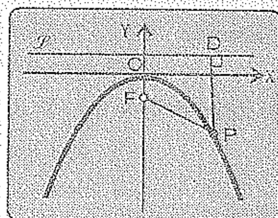


FIGURA 6.5

Solución. La ecuación es de la forma $x^2 = 4py$

Si $4p = -2 \Rightarrow p = -1/2$ $(p < 0)$

a) Coordenadas del foco : $F(0, p) \Rightarrow F(0, -1/2)$

b) Ecuación de la directriz : $y = -p \Rightarrow \mathscr{L}: 2y - 1 = 0$

c) Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = 2$

d) Como $p < 0$, la curva se abre hacia abajo del eje X, y su eje coincide con el eje Y. (Figura 6.5) ■

5 Deducir y discutir la ecuación ordinaria $x^2 = 4py$

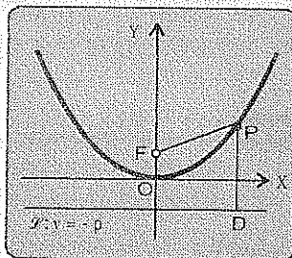


FIGURA 6.6

Solución. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola, $F(0, p)$ el foco y $\mathscr{L}$ su directriz.

Por definición de parábola el punto P debe satisfacer la condición geometría : $|\overline{FP}| = |d(P, \mathscr{L})|$

cuya forma analítica es :

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y + p|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y simplificando, obtenemos : $x^2 = 4py$ ■

La discusión de la ecuación se deja a cargo del lector.

8 Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $F(3, 0)$.

Solución. Como el foco F(3 , 0) está sobre el eje X, la ecuación de la parábola es de la forma : $y^2 = 4px$.

Por el Teorema 6.1, F(p , 0) $\Rightarrow$ p = 3 , por lo que la ecuación de la parábola es

$$\mathscr{P} : y^2 = 12x$$ ■

9 Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto F(0 , -3).

Solución. Dado que el foco F(0 , -3) está sobre el eje Y, la ecuación de la parábola es de la forma , $\mathscr{P}: x^2 = 4py$

Por el Teorema 6.1 , F(0 , p) $\Rightarrow$ p = -3 , por tanto, la ecuación de la parábola es

$$\mathscr{P}: x^2 = -12y$$ ■

10 Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $\mathscr{L}: y - 5 = 0$

Solución. Como la directriz es una recta horizontal, el eje de la parábola es vertical, por lo que su ecuación es de la forma , $\mathscr{P}: x^2 = 4py$

Por el Teorema 6.1 , $\mathscr{L}: y = -p \Rightarrow p = -5$, y la ecuación buscada es

$$\mathscr{P}: x^2 = -20y$$ ■

11 Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $\mathscr{L}: x + 5 = 0$

Solución. Siendo la directriz $\mathscr{L}: x = -5$, una recta vertical, la ecuación de la parábola, de eje horizontal, es de la forma , $\mathscr{P} = y^2 = 4px$

Por el Teorema 6.1 , $\mathscr{L}: x = -p \Rightarrow p = 5$, por tanto, la ecuación de la parábola es

$$\mathscr{P}: y^2 = 20x$$ ■

12 Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coinciden con el eje X pasa por el punto A(-2 , 4). Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. La ecuación de la parábola es de la forma , $\mathscr{P}: y^2 = 4px$

Si $A(-2 , 4) \in \mathscr{P} \Rightarrow (4)^2 = 4p(-2) \Leftrightarrow p = -2$. Luego, $\mathscr{P}: y^2 = -8x$

a) Coordenadas del foco : $F(p , 0) \Rightarrow F(-2 , 0)$

b) Ecuación de la directriz : $x = -p \Rightarrow \mathscr{L}: x = 2$

c) Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = 8$ ■

13 Una cuerda de la parábola $\mathscr{P}: y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $\mathscr{L}: x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.

Solución. Sean $A(x_1 , y_1)$ y $B(x_2 , y_2)$ los extremos de la cuerda. Entonces la solución común de las ecuaciones de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{P}$ serán las coordenadas de A y B, esto es :

$$(x - 2y + 3 = 0) \cap (y^2 = 4x) = A(1 , 1) \text{ y } B(9 , 6)$$

Por el teorema de la distancia : $|\overline{AB}| = \sqrt{(9 - 1)2 + (6 - 2)^2} = 4\sqrt{5}$ ■

14 Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $\mathscr{P} : x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $\mathscr{L}_1 : 3x + 4y - 7 = 0$

Solución. Si $x^2 = -8y \Rightarrow 4p = -8 \Leftrightarrow p = -2$; luego , $F(0 , -2)$

La ecuación de la cuerda focal, paralela a la recta $\mathscr{L}_1$ es

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 0) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x + 4y + 8 = 0$$

De la intersección de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{P}$ obtendremos las coordenadas de los extremos de la cuerda focal, esto es :

$$(3x + 4y + 8 = 0) \cap (x^2 + 8y = 0) = A(-2 , -1/2) , B(8 , -8)$$

$$\therefore |\overline{AB}| = \sqrt{(8 + 2)^2 + (-8 + 1/2)^2} = 25/2$$ ■

15 Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1 , y_1)$ de la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 4px$ es igual $|x_1 + p|$.

Demostración. En efecto, si $F(p , 0)$ son las coordenadas del foco, entonces, por el teorema de la distancia, la longitud del radio vector es

$$r = |\overline{FP_1}| = \sqrt{(x_1 - p)^2 + (y_1)^2} \qquad (1)$$

Como $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1$

Luego, en (1) se tiene : $r = \sqrt{(x_1)^2 - 2px_1 + p^2 + 4px_1} = \sqrt{(x_1 + p)^2}$

$$\therefore r = |x_1 + p|$$ ■

16 Hallar la longitud del radio de un punto de la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 9x$, cuya ordenada es igual a 6.

Solución. Si $P_1(x_1 , 6) \in \mathscr{P} \Rightarrow (6)^2 = 9x_1 \Leftrightarrow x_1 = 4$

Además, si $y^2 = 9x \Rightarrow 4p \Leftrightarrow p = 9/4$

Haciendo uso de la fórmula del Ejercicio 15 tendremos :

$$r = |4 + 9/4| = 25/4$$ ■

17 De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción de eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

Demostración. Probaremos que : $|\overline{AP_1}|^2 = |\overline{LR}| \times |\overline{OA}|$

En efecto, sea la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 4px$

Si $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1$ (1)

En esta ecuación : $y_1 = |\overline{AP_1}|$, $4p = |\overline{LR}|$ y $x_1 = |\overline{OA}|$

Por lo tanto, sustituyendo cada uno de estos valores en (1) obtendremos :

$$|\overline{AP_1}|^2 = |\overline{LR}| \times |\overline{OA}|$$ ■

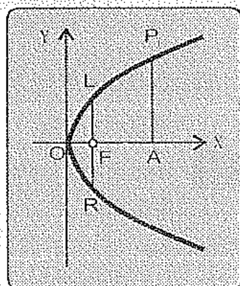


FIGURA 6.7

18 Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $\mathscr{P}: x^2 - 4y = 0$.

Solución. Si $x^2 = 4y \Rightarrow 4p = 4 \Leftrightarrow p = 1$

Por el Teorema 6.1, las coordenadas del foco son : F(0 , 1) y por simetría las coordenadas de los extremos del lado recto son

$$L(|2p| , 1) \text{ y } R(-|2p| , 1) \Rightarrow L(2 , 1) \text{ y } R(-2 , 1)$$

Sea la ecuación de la circunferencia , $\mathscr{C}: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1)

Si $V(0 , 0) \in \mathscr{C} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + F = 0 \Rightarrow F = 0$

$L(2 , 1) \in \mathscr{C} \Rightarrow 4 + 1 + 2D + E = 0 \Rightarrow 2D + E = -5$ (2)

$R(-2 , 1) \in \mathscr{C} \Rightarrow 4 + 1 - 2D + E = 0 \Rightarrow -2D + E = -5$ (3)

La solución común de (2) y (3) es : $D = 0$ y $E = -5$

Por tanto, en (1), la ecuación de la circunferencia buscada es, $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 5y = 0$ ■

19 Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.

Demostración. En efecto, sea la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 4px$ cuyo foco es F(p , 0) , y cuyos extremos de su lado recto tienen por coordenadas: L(p , 2p) y R(p , -2p)

La ecuación de la directriz es , $\mathscr{L}: x = -p$

Si $A \in \mathscr{L} \Rightarrow A(-p , 0)$.

Pendiente de $\overline{AL}$: $m_1 = \dfrac{2p - 0}{p + p} = 1$

Pendiente de $\overline{AR}$: $m_2 = \dfrac{-2p - 0}{p + p} = -1$

Dado que $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \overline{AL} \perp \overline{AR}$ ■

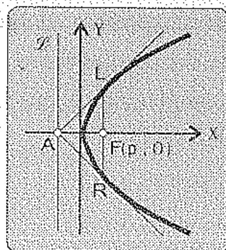


FIGURA 6.8

20 Una circunferencia cuyo centro es el punto C(4 , -1) pasa por el foco de la parábola $\mathscr{P}: x^2 + 16y = 0$. Demostrar que es tangente a la directriz de la parábola.

Demostración. Bastará probar que $r = d(C , \mathscr{L})$, donde $\mathscr{L}$ es la directriz de la parábola.

En efecto, si $x^2 = -16y \Rightarrow 4p = -16 \Leftrightarrow p = -4$

Por el Teorema 6.1, las coordenadas del foco son F(0 , -4) y la ecuación de la directriz , $\mathscr{L}: y - 4 = 0$

Radio de la circunferencia : $r = |\overline{CF}|$

$$\Rightarrow r = \sqrt{(4 - 0)^2 + (-1 + 4)^2} = 5$$

$$d(C , \mathscr{L}) = |-1 - 4| = 5$$

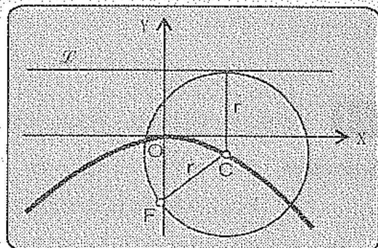


FIGURA 6.9

Como $r = d(C , \mathscr{L})$, hemos probado que la circunferencia es tangente a la directriz de la parábola. ■

21 Hallar la ecuación de una parábola tomando como ejes X e Y, el eje y la directriz respectivamente.

La solución se deja a cargo del lector. *Sol.* $y^2 = 4p(x - p)$

En cada uno de los ejercicios del 22 al 25, aplicando la definición de parábola, hallar la ecuación de la parábola a partir de los datos dados. Reducir la ecuación a la primera forma ordinaria por transformación de coordenadas.

22 Foco: F(3 , 4) ; directriz , $\mathscr{L}: x - 1 = 0$

Solución. Sea P(*x* , *y*) un punto cualquiera de la parábola, el cual, por definición debe satisfacer la propiedad geométrica

$$|\overline{FP}| = |d(P , \mathscr{L})|$$

cuya expresión analítica es : $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = |x-1|$
de donde obtenemos : $y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$
Completando el cuadrado para la variable y, se tiene : $(y-4)^2 = 4(x-2)$
Haciendo $x' = x - 2$, $y' = y - 4$, obtenemos la transformada

$$y'^2 = 4x'$$ ■

23 Foco : F(3 , -5) ; directriz , $\mathscr{L}$: $y - 1 = 0$

Solución. Sea P(x , y) un punto cualquiera de la parábola que, por definición, debe satisfacer la propiedad : $|\overline{FP}| = |d(P, \mathscr{L})|$

cuya forma analítica es : $\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2} = |y-1|$
de donde obtenemos : $x^2 - 6x + 12y + 33 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -12(y+2)$
Haciendo : $x' = x - 3$, $y' = y + 2$, se tiene la transformada : $x'^2 = 12y'$ ■

24 Vértice : V(2 , 0) , Foco : F(0 , 0)

Solución. Si $p = \overline{VF} \Rightarrow p = 0 - 2 = -2$

Ecuación de la directriz : $x = 2 - p = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow \mathscr{L}: x - 4 = 0$

Si P(x , y) es un punto de la parábola $\Rightarrow |\overline{FP}| = |d(P, \mathscr{L})|$
Cuya expresión analítica es : $\sqrt{x^2+y^2} = |x - 4|$
de donde : $y^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow y^2 = -8(x-2)$
Haciendo $y = y'$, $x - 2 = x'$, obtenemos la transformada : $y'^2 = -8x'$ ■

25 Foco : F(-1 , 1) , directriz : $\mathscr{L}: x + y - 5 = 0$

Solución. Sea P(x , y) un punto cualquiera de la parábola que por definición, debe satisfacer la propiedad geométrica : $|\overline{FP}| = |d(P, \mathscr{L})|$

cuya expresión analítica es : $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \dfrac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}$

de donde : $x^2 - 2xy + y^2 + 14x + 6y - 21 = 0$ (1)

Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{-2}{1-1} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90° \Leftrightarrow \theta = 45°$

Ecuaciones de rotación : $x = x'\text{Cos}\,\theta - y'\text{Sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$

$$y = x'\text{Sen}\,\theta + y'\text{Cos}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y_1)$$

Sustituyendo estos valores de x e y en (1) y simplificando obtenemos

$$2y'^2 + 10\sqrt{2}\,x' - 4\sqrt{2}\,y' - 21 = 0$$

$$\Rightarrow 2(y'^2 - 2\sqrt{2}\,y' + 2) = -10\sqrt{2}\,x' + 21 + 4 \Leftrightarrow 2(y' - \sqrt{2})^2 = -10\sqrt{2}\left(x' - \frac{5\sqrt{2}}{4}\right).$$

Haciendo : $y' - \sqrt{2} = y''$, $x' - \frac{5\sqrt{2}}{4} = x''$, obtenemos la transformada

$$y''^2 = -5\sqrt{2}\,x''$$ ■

6.3 ECUACION DE UNA PARABOLA DE VERTICE (h , k) Y EJE PARALELO A UN EJE COORDENADO

TEOREMA 6.2 La ecuación de una parábola con vértice en (h , k), foco en (h + p , k), y eje paralela al eje X , es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad (3)$$

Si p > 0 , la parábola se abre hacia la derecha; Si p < 0, la parábola se abre hacia la izquierda.

La ecuación de la parábola de vértice (h , k) , foco (h , k + p), y eje paralelo al eje Y, es de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad (4)$$

Si p > 0, la parábola se abre hacia arriba ; si p < 0, la parábola se abre hacia abajo.

Demostración. Traslademos los ejes coordenados de modo que el nuevo origen O' coincide con el vértice V(h , k). Por el Teorema 6.1, la ecuación de la parábola referida a los ejes X' e Y' está dada por

$$y'^2 = 4px' \qquad (1)$$

De las ecuaciones de traslación: $x = x' + h$, $y = y' + k$ se tiene : $x' = x - h$, $y' = y - k$, que sustituida en (1) obtenemos :

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

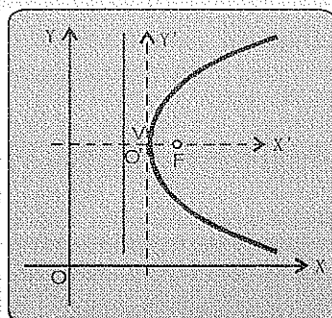


FIGURA 6.10

Análogamente, para la parábola de vértice V(h , k) y cuyo eje es paralelo al eje Y , se demuestra que tiene por ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Nota. Las ecuaciones (3) y (4) se llaman generalmente, *segunda ecuación ordinaria* de la parábola.

6.4 ECUACION GENERAL DE UNA PARABOLA

TEOREMA 6.3 Una ecuación cuadrática en las variables x e y, y sin término en xy puede escribirse de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a) Si $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, la ecuación representa una parábola de eje paralelo o coincidente con el eje X. Si D = 0 , la ecuación representa dos rectas paralelas o coincidentes con el eje X , o un conjunto vacío, según que las raíces de la ecuación $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y desiguales, reales o iguales o complejas.

b) Si $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, $(E \neq 0)$, la ecuación representa una parábola de eje paralelo o coincidente con el eje Y. Si E = 0, la ecuación representa dos rectas paralelas o coincidentes con el eje Y o un conjunto vacío según que las raíces de la ecuación $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y desiguales, reales e iguales o complajos.

EJERCICIOS . *Grupo 24*

Nota. Los ejercicios del 1 al 6 son demostraciones y deducciones de fórmula que pueden ser fácilmente probadas y deducidas por el estudiante, por lo que se les deja como tarea.

7 Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos V(-4 , 3) y F(-1 , 3), respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje.

Solución. Como el vértice están sobre una línea horizontal , (tienen la misma ordenada), la ecuación de la parábola es de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad (1)$$

Por el Teorema 6.2 : $V(h , k) = V(-4 , 3) \Rightarrow h = -4$ y $k = 3$

$$F(h + p , k) = F(-1 , 3) \Rightarrow h + p = -1$$

$$\Rightarrow -4 + p = -1 \Leftrightarrow p = 3$$

Luego, en (1), la ecuación de la parábola es , $\mathscr{P}: (y - 3)^2 = 12(x + 4)$

Ecuación de la directriz : $x = h - p \Rightarrow \mathscr{L}: x = -7$

Ecuación del eje de simetría : $y = k \Rightarrow y = 3$ ■

8 Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos V(3 , 3) y F(3 , 1), respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Solución. Como los puntos V y F están sobre una línea vertica l, (tienen la misma abscisa), el eje de la parábola es paralelo al eje Y, y su ecuación es de la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ (1)

Por el Teorema 6.2 : $V(h, k) = V(3, 3) \Rightarrow h = k = 3$

$F(h, k+p) = F(3, 1) \Rightarrow k + p = 1$

$\Rightarrow 3 + p = 1 \Leftrightarrow p = -2$

Luego, en (1), la ecuación de la parábola es, $\mathscr{P}: (x-3)^2 = -8(y-3)$

Ecuación de la directriz : $y = k - p \Rightarrow \mathscr{L}: y = 5$

Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = 8$ ■

9 La directriz de una parábola es la recta $\mathscr{L}: y - 1 = 0$, y su foco es el punto F(4 , -3). Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

Solución. ***Método 1.*** *Aplicando la definición de parábola*

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola que debe satisfacer la propiedad geométrica : $|\overline{FP}| = |d(P, \mathscr{L})|$

cuya expresión analítica es : $\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} = |y-1|$

de donde obtenemos la ecuación de la parábola $\mathscr{P}: (x-4)^2 = -8(y+1)$

Método 2. *Aplicando el Teorema 6.2*

Forma de la ecuación de la parábola : $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ (1)

Si $F(h, k+p) = F(4, -3) \Rightarrow h = 4 \wedge k + p = -3$ (2)

Ecuación de la directriz , $\mathscr{L}: y = k - p \Rightarrow k - p = 1$ (3)

La solución común de las ecuaciones (2) y (3) es : $k = -1$, $p = -2$

Por tanto, en (1), la ecuación de la parábola es , $\mathscr{P}: (x-4)^2 = -8(y+1)$ ■

10 La directriz de una parábola es la recta $\mathscr{L}: x + 5 = 0$, y su vértice es el punto V(0 , 3). Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

Solución. ***Método 1.*** *Aplicando la definición de parábola*

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{FP}| = |d(P, \mathscr{L})|$

y cuya expresión analítica es : $\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = |x+5|$

de donde obtenemos la ecuación de la parábola , $\mathscr{P}: (y-3)^2 = 20(x-0)$ ■

El segundo método, por aplicación del Teorema 6.2, se deja para el lector.

En cada uno de los ejercicios del 11 al 15, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, de la longitud del lado recto.

11 $4y^2 - 48x - 20y = 71$

Solución. Completando el cuadrado para la variable y, se tiene :

$$4(y^2 - 5y + \frac{25}{4}) = 48x + 71 + 25 \Leftrightarrow (y - 5/2)^2 = 12(x + 2)$$

$$\Rightarrow h = -2 \ , \ k = 5/2 \ , \ p = 3$$

a) Coordenadas del vértice : V(h , k) $\Rightarrow$ V(-2 , 5/2)

b) Coordenadas del foco : F(h + p , k) $\Rightarrow$ F(1 , 5/2)

c) Ecuación de la directriz : $x = h - p \Rightarrow \mathscr{L}: x + 5 = 0$

d) Ecuación del eje : $y = k \Rightarrow y = 5/2 \Leftrightarrow \ell : 2y - 5 = 0$

e) Longitud del lado recto : LR = |4p| $\Rightarrow$ LR = 12 ■

12 $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

Solución. Completando el cuadrado para la variable x , se tiene :

$$9(x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{16}{9}) = -72y - 16 + 16 \Leftrightarrow (x + 4/3)^2 = -8(y - 0)$$

$$\Rightarrow h = -4/3 \ , \ k = 0 \ , \ p = -2$$

a) Coordenadas del vértice : V(h , k) $\Rightarrow$ V(-4/3 , 0)

b) Coordenadas del foco : F(h , k + p) $\Rightarrow$ F(-4/3 , -2)

c) Ecuación de la directriz : $y = k - p \Rightarrow \mathscr{L}: y = 2$

d) Ecuación del eje : $x = h \Rightarrow x = -4/3 \Leftrightarrow \ell : 3x + 4 = 0$

e) Longitud del lado recto : LR = |4p| $\Rightarrow$ LR = 8 ■

13 $y^2 + 4x = 7$

Solución. Si $y^2 = -4x + 7 \Rightarrow (y - 0)^2 = -4(x - 7/4)$

$$\Rightarrow h = 7/4 \ , \ k = 0 \ , \ p = -1$$

a) Coordenadas del vértice : V(h , k) $\Rightarrow$ V(7/4 , 0)

b) Coordenadas del foco : F(h + p , k) $\Rightarrow$ F(3/4 , 0)

c) Ecuación de la directriz : $x = h - p \Rightarrow \mathscr{L}: x = 11/4 \Leftrightarrow \mathscr{L}: 4x - 11 = 0$

d) Ecuación del eje : $y = k \Rightarrow y = 0$

e) Longitud del lado recto : LR = |4p| $\Rightarrow$ LR = 4 ■

14 $4x^2 + 48y + 12x = 159$

Solución. Reduciendo la ecuación a la segunda forma ordinaria se tiene :

$$4(x^2 + 3x + \frac{9}{4}) = -48y + 159 + 9 \Leftrightarrow (x+3/2)^2 = -12(y - 7/2)$$

$$\Rightarrow h = -3/2 \ , \ k = 7/2 \ , \ p = -3$$

a) Coordenadas del vértice : $V(h, k) \Rightarrow V(-3/2, 7/2)$

b) Coordenadas del foco : $F(h, k+p) \Rightarrow F(-3/2, 1/2)$

c) Ecuación de la directriz : $y = k - p \Rightarrow \mathscr{L}: y = 13/2 \Leftrightarrow \mathscr{L}: 2y - 13 = 0$

d) Ecuación del eje : $x = h \Rightarrow x = -3/2 \Leftrightarrow \ell : 2x + 3 = 0$

e) Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = 12$ ■

15 $y = ax^2 + bx + c$

Solución. Reduciendo la ecuación a la segunda forma ordinaria se tiene :

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y - b^2 - \frac{4ac}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow h = -\frac{b}{2a} \ , \ k = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \ , \ p = \frac{1}{4a}$$

a) Coordenadas del vértice : $V(h, k) \Rightarrow V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

b) Coordenadas del foco : $F(h, k+p) \Rightarrow F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac + 1}{4a}\right)$

c) Ecuación de la directriz : $y = k - p \Rightarrow \mathscr{L}: y = \frac{b^2 - 4ac - 1}{4a}$

d) Ecuación del eje : $x = h \Rightarrow \ell : x = -b/2a$

e) Longitud del lado recto : $LR = |4p| \Rightarrow LR = |1/a|$ ■

17 Resolver el Ejercicio 14 trasladando los ejes coordenados.

La solución se deja a cargo del lector.

18 Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = E = F = 0$ y $C \neq 0$, $D \neq 0$

Solución. Si $A = E = F = 0$, la ecuación se reduce a $Cy^2 + Dx = 0 \Rightarrow y^2 = -\frac{D}{C}x$

La ecuación representa una parábola con vértice en el origen y eje de

simetría coincidente con el eje X.

Dado que $4p = -D/C$, la longitud del lado recto es : $LR = |4p| = D/C$

Si $\frac{D}{C} < 0$, la parábola se abre hacia la derecha

Si $\frac{D}{C} > 0$, la parábola se abre hacia la izquierda. ■

19 Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres punto P(3/2 , -1) , Q(0 , 5) y R(-6 , -7)

Solución. Por el Teorema 6.2, la ecuación buscada es de la forma

$$\mathscr{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad (1)$$

Si $P(3/2, -1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (-1 - k)^2 = 4p(3/2 - h)$ (2)

$Q(0, 5) \in \mathscr{P} \Rightarrow (5 - k)^2 = 4p(0 - h)$ (3)

$R(-6, -7) \in \mathscr{P} \Rightarrow (-7 - k)^2 = 4p(-6 - h)$ (4)

Resolviendo, por simultáneas, (2) , (3) y (4) obtenemos : $h = 2$, $k = 1$ y $p = -2$

Por tanto, en (1), la ecuación de la parábola es, $\mathscr{P}: (y - 1)^2 = -8(x - 2)$ ■

20 Hallar las coordenadas del foco y el vértice, las ecuaciones de la directriz y el eje, y la longitud del lado recto de la parábola $y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$

La solución se deja al lector. ***Sol.*** $V(0, 2)$, $F(0, 1)$, $\mathscr{L}: x = 4$, $\ell : y = 1$, $LR = 8$

21 Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común F(3 , 4) y un eje común paralelo al eje Y.

Solución. Las parábolas cuyos ejes son paralelos al eje Y tienen por ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad (1)$$

Dado que el foco común es $F(3, 4) = F(h, k + p)$, entonces , por igualdad de pares ordenados : $(h = 3) \wedge (k + p = 4 \Rightarrow p = 4 - k)$

Sustituyendo estos valores de h y p en (1), obtenemos la ecuación pedida, esto es :

$$(x - 3)^2 = 4(4 - k)(y - k)$$ ■

22 La ecuación de una familia de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Discutir como varía el lugar geométrico cuando se hace variar el valor del parámetro c.

Solución. Reduciendo la ecuación a su forma ordinaria se tiene :

$$(x+1/2)^2 = \frac{1}{4}(y+1-c)$$

La ecuación representa una familia de parábolas con vértice sobre la recta $x = -1/2$ (Eje de simetría). Entonces :

Si $c = 1$, el vértice está sobre el eje X

Si $c < 1$, el vértice está debajo del eje X

Si $c > 1$, el vértice está arriba del eje X ■

23 La ecuación de una familia de parábolas es $\mathscr{P}: y = ax^2 + bx$. Hállese la ecuación del elemento de la familia que pasa por A(2 , 8) y B(-1 , 5).

Solución. Si $A(2, 8) \in \mathscr{P} \Rightarrow 8 = 4a + 2b$ (1)

$B(-1, 5) \in \mathscr{P} \Rightarrow 5 = a - b$ (2)

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2) obtenemos : $a = 3$ y $b = -2$

Sustituyendo estos valores en $\mathscr{P}$ se tiene : $y = 3x^2 - 2x$ ■

24 Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos A(0 , 0) , B(8 , -4) y C(3 , 1).

Solución. Sea la parábola $\mathscr{P}: y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1)

Si $A(0, 0) \in \mathscr{P} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + F = 0 \Rightarrow F = 0$

$B(8, -4) \in \mathscr{P} \Rightarrow 16 + 8D - 4E = 0 \Rightarrow 2D - E = -4$ (2)

$C(3, 1) \in \mathscr{P} \Rightarrow 1 + 3D + E = 0 \Rightarrow 3D + E = -1$ (3)

La solución común de (2) y (3) es : $D = -1$ y $E = 2$

Sustituyendo estos valores en (1) obtenemos la ecuación de la parábola

$$\mathscr{P}: y^2 - x + 2y = 0$$ ■

25 Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto V(4 , -1) , eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto A(3 , -3).

Solución. Como el eje es una recta horizontal ($y = -1$), la ecuación de la parábola es de la forma , $\mathscr{P}: (y+1)^2 = 4p(x-4)$

Si $A(3, -3) \in \mathscr{P} \Rightarrow (-3+1)^2 = 4p(3-4)$, de donde se tiene , $p = -1$

$$\therefore\ \mathscr{P}: (y+1)^2 = -4(x-4)$$ ■

26 Demostrar, analíticamente, que cualquier recta paralela al eje de la parábola corta a ésta en uno y solamente en un punto.

Demostración. En efecto, sea la parábola de eje horizontal

$$\mathscr{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Como se sabe, su eje tiene por ecuación $\ell: y = k$. Entonces, la ecuación de una recta paralela al eje es , $\ell_1: y = a$. Si interceptamos esta recta con la parábola obtendremos :

$$(a - k)^2 = 4p(x - h) \Rightarrow x = \frac{(a - k)^2}{4p} + p$$

Por tanto, la recta ℓ_1 corta a la parábola en un sólo punto. ■

27 Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $\mathscr{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h)$ es igual a $|x_1 - h + p|$.

Demostración. En efecto, las coordenadas del foco de la parábola son F(h + p , k)

$$\text{Si } r = |FP_1| \Rightarrow r = \sqrt{(x_1 - h - p)^2 + (y_1 - k)^2} \quad (1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_1 - k)^2 = 4p(x_1 - h)$

Sustituyendo en (1) se tiene : $r = \sqrt{(x_1 - h - p)^2 + 4p(x_1 - h)}$

de donde obtenemos : $r = \sqrt{x_1^2 + h^2 + p^2 - 2hx_1 + 2px_1 - 2ph} = \sqrt{(x_1 - h + p)^2}$

$$\therefore\ r = |x_1 - h + p|$$ ■

28 Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$, cuya ordenada es igual a 3.

Solución. La ecuación en su forma ordinaria es, $\mathscr{P}: (y + 1)^2 = -4(x - 5)$

de donde se tiene : $h = 5$, $k = -1$ y $4p = -4 \Rightarrow p = -1$

Si $A(x_1, 3) \in \mathscr{P} \Rightarrow (3 + 1)^2 = -4(x_1 - 5) \Leftrightarrow x_1 = 1$

Luego haciendo uso de la fórmula obtenida en el Ejercicio 27 , se sigue que

$$r = |1 - 5 - 1| = 5$$ ■

29 Hallar e identificar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $\mathscr{L}: x + 3 = 0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia del punto A(1 , 1)

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|d(P, \mathscr{L})| + 2 = |\overline{AP}|$

2. La forma analítica de esta condición es : $|x + 3| + 2 = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$

3. Por definición de valor absoluto, tendremos :

a) Si $x > -3 \Rightarrow |x+3| = +(x+3) \Rightarrow x+5 = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$
de donde resulta la ecuación : $y^2 - 12x - 2y - 23 = 0$

b) Si $x < -3 \Rightarrow |x+3| = -(x+3) \Rightarrow -x-1 = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$
de donde obtenemos : $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
En ambos casos, el lugar geométrico es una parábola. ■

30 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $\mathscr{L}$: $y - 1 = 0$ y a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = 9$.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que satisface la condición mostrada en la Figura 6.11, esto es :

$\overline{OP} = \overline{OT} + \overline{TP} \Rightarrow \overline{OP} = 3 + |d(P, \mathscr{L})|$

2. La forma analítica de esta condición es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 + |y - 1|$$

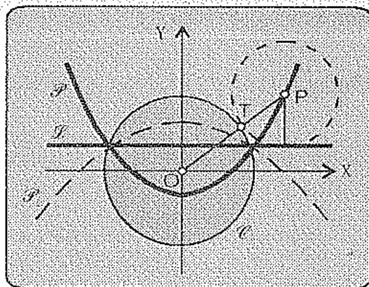


FIGURA 6.11

3. Por definición de valor absoluto se tiene :

a) Si $y > 1 \Rightarrow |y-1| = y - 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = y + 2$
de donde resulta la ecuación , $\mathscr{P}: x^2 - 4y - 4 = 0$

b) Si $y < 1 \Rightarrow |y-1| = -(y-1) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 4 - y$
de donde obtenemos la ecuación , $P_1 : x^2 + 8y - 16 = 0$
En ambos casos los lugares geométricos son parábolas cuyas gráficas se muestran en la Figura 6.11 ■

6.5 ECUACION DE LA TANGENTE A UNA PARABOLA

La determinación de la ecuación de la tangente a la parábola es similar a la ya estudiada para la circunferencia; esto es, los casos que se presentan son :

1. *Tangente en un punto de contacto dado*
2. *Tangente con una pendiente dada*
3. *Tangente trazada desde un punto exterior*

TEOREMA 6.4 La tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto cualquiera de la curva tiene por ecuación

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Demostración. En efecto, sea $P_1(x_1 , y_1)$ un punto de la parábola

$$\mathscr{P}: y^2 = 4px$$

La ecuación de la tangente que pasa por P_1 es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y = mx + y_1 - mx_1 \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene :

$$m^2x^2 + (2m\,y_1 - 2m^2x_1 - 4p)x + (y_1^2 + m^2x_1^2 - 2\,mx_1y_1) = 0$$

Por condición de tangencia

$$(2my_1 - 2m^2x_1 - 4p)^2 - 4m^2(y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0$$

efectuando se reduce a : $x_1m^2 - y_1m + p = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{y_1 \pm \sqrt{(y_1)^2 - 4px_1}}{2x_1}$ (2)

Como $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1 \Rightarrow (y_1)^2 - 4px_1 = 0$

Luego, en (2) , $m = \dfrac{y_1}{2x_1}$. Sustituyendo este valor en (1), obtenemos

$$y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow 2x_1y = y_1(x + x_1) \qquad (3)$$

De la ecuación $(y_1)^2 = 4px_1$, se tiene : $2x_1 = \dfrac{(y_1)^2}{2p}$

Por lo tanto, en (3) : $\dfrac{(y_1)^2}{2p}y = y_1(x + x_1) \Rightarrow y_1y = 2p(x + x_1)$

TEOREMA 6.5 La tangente de pendiente m a la parábola $y^2 = 4px$ tiene por ecuación

$$\mathbf{y = mx + \frac{p}{m} \;,\; m \neq 0}$$

Demostración. En efecto, sea la ecuación de la tangente : $y = mx + b$ (1)

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola se tiene :

$$(mx + b)^2 = 4px \Leftrightarrow m^2x^2 + (2bm - 4p) + b^2 = 0$$

Por condición de tangencia : $(2bm - 4p)^2 - 4m^2b^2 = 0 \Rightarrow b = p/m$

Sustituyendo este valor de b en (1), nos da la ecuación buscada

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

EJERCICIOS . *Grupo 25*

En cada uno de los ejercicios del 1 al 3, hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la parábola y punto de contacto dados.

1 $y^2 - 4x = 0$, T(1 , 2)

Solución. La ecuación de la tangente que pasa por T es : $y - 2 = m(x - 1)$ (1)

de donde despejamos , $x = \frac{1}{m}(y + m - 2)$

Sustituyendo en la ecuación dada se tiene :

$$y^2 = \frac{4}{m}(y + m - 2) \Leftrightarrow my^2 - 4y + 4(2 - m) = 0$$

Para que haya tangencia : $(-4)^2 - 4m(4)(2 - m) = 0 \Rightarrow (m - 1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$

Luego, en (1), la ecuación de la tangente es , $y - 2 = 1(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x - y + 1 = 0$

Ecuación de la normal : $y - 2 = -1(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + y - 3 = 0$

Longitud de la tangente : $t = \left|\frac{y_1}{m}\right|\sqrt{1 + m^2}$, $\Rightarrow t = 2\sqrt{1 + 1} = 2\sqrt{2}$

Longitud de la normal : $n = |y_1|\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow n = 2\sqrt{1 + 1} = 2\sqrt{2}$

Longitud de la subtangente : $|\overline{ST}| = \left|\frac{y_1}{m}\right| = 2$

Longitud de la subnormal : $|\overline{SN}| = |m\,y_1| = |1(2)| = 2$ ∎

2 $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$, T(-6 , 3)

Solución. Ecuación de la tangente : $y - 3 = m(x + 6) \Rightarrow x = \frac{1}{m}(y - 6m - 3)$

valor que sustituido en la ecuación de la parábola nos da

$$y^2 + \frac{4}{m}(y - 6m - 3) + 2y + 9 = 0 \Leftrightarrow my^2 + 2(2 + m)y + (-12 - 15m) = 0$$

Por la condición de tangencia : $4(2 + m)^2 - 4m(-12 - 15m) = 0$

de donde se obtiene : $(2m + 1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1/2$

Ecuación de la tangente : $y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 6) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x + 2y = 0$

Ecuación de la normal : $y - 3 = 2(x + 6) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 2x - y + 15 = 0$

Longitud de la tangente : $t = \left|\frac{y_1}{m}\right|\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow t = \left|\frac{3}{-1/2}\right|\sqrt{1 + 1/4} = 3\sqrt{5}$

Longitud de la normal : $n = |y_1|\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow n = 3\sqrt{1 + 1/4} = 3\sqrt{5/2}$

Longitud de la subtangente : $|\overline{ST}| = \left|\frac{y_1}{m}\right| = \left|\frac{3}{-1/2}\right| = 6$

Longitud de la subnormal : $|\overline{SN}| = |m\,y_1| = |(-1/2)(3)| = 3/2$ ■

3 $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$, T(-2 , -1)

Solución. Ecuación de la tangente : $y + 1 = m(x + 2) \Rightarrow y = mx + 2m - 1$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola se obtiene :

$$x^2 - 6x + 5(mx + 2m - 1) - 11 = 0 \Rightarrow x^2 + (5m - 6)x + 10m - 16 = 0$$

Por condición de tangencia : $(5m - 6)^2 - 4(1)(10m - 16) = 0 \Rightarrow m = 2$

Ecuación de la tangente : $y + 1 = 2(x + 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 2x - y + 3 = 0$

Ecuación de la normal : $y + 1 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + 2y + 4 = 0$

Longitud de la tangente : $t = \left|\frac{y_1}{m}\right|\sqrt{1 + m^2} \Rightarrow t = \left|\frac{-1}{2}\right|\sqrt{1 + 4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Longitud de la normal : $n = |y_1|\sqrt{1 + m} = |-1|\sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

Longitud de la subtangente : $|\overline{ST}| = \left|\frac{y_1}{m}\right| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Longitud de la subnormal : $|\overline{SN}| = |m\,y_1| = |2(-1)| = 2$ ■

4 Por medio del Teorema 6.4, hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 4x = 0$ en el punto T(1 , 2)

Solución. Si $y^2 = 4x \Rightarrow 4p = 4 \Leftrightarrow p = 1$ y $x_1 = 1$, $y_1 = 2$

Por el Teorema 6.4 ; la ecuación de la tangente en el punto $T(x_1 , y_1)$ es

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \Rightarrow 2y = 2(x + 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x - y + 1 = 0$$ ■

5 Demostrar que la ecuación de la normal a la parábola $\mathscr{P}$: $y^2 = 4px$ en el punto $P_1(x_1 , y_1)$ es $\mathscr{L} : y_1 x + 2py = x_1 y_1 + 2py_1$

Demostración. En efecto , por el Teorema 6.5 , la pendiente de la tangente en P_1

$$m_t = \frac{y_1}{2x_1}$$ es , entonces la pendiente de la normal será

$m_n = -\frac{2x_1}{y_1}$, y su ecuación : $\quad y - y_1 = -\frac{2x_1}{y_1}(x - x_1)$

$$\Rightarrow \; 2x_1 x + y_1 y = (y_1)^2 + 2(x_1)^2 \qquad (1)$$

Como $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1 \Rightarrow 2x_1 = \frac{(y_1)^2}{2p}$

Sustituyendo este valor en (1) se tiene : $\frac{(y_1)^2}{2p}x + y_1 y = (y_1)^2 + \frac{(y_1)^2}{2p}x_1$

$$\therefore \; y_1 x + 2py = x_1 y_1 + 2py_1$$ ■

6 Por medio del resultado del Ejercicio 5, hallar la ecuación de la normal a la parábola $\mathscr{P}$: $y^2 = 4x$ en el punto T(1 , 2)

Solución. Si $y^2 = 4x \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$ y $x_1 = 1$, $y_1 = 2$

Ahora, haciendo uso de la fórmula del Ejercicio 5, se tiene

$$2x + 2y = (1)(2) + 2(1)(2) \Rightarrow \mathscr{L}: x + y - 3 = 0$$ ■

7 Demostrar que las tangentes a una parábola en los puntos extremos de su lado recto son perpendiculares entre si.

Demostración. En efecto, sea la parábola $\mathscr{P}$: $y^2 = 4px$ cuyo foco tiene por coordenadas F(p , 0)

Como LR = FR = 2p , entonces las coordenadas de los extremos del lado recto son : L(p , 2p) y R(p , -2p)

Por el Teorema 6.4, las ecuaciones de las tangentes en L y R son :

$$2py = 2p(x + p) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : y = x + p \Rightarrow m_1 = 1$$

$$-2py = 2p(x + p) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : y = -x - p \Rightarrow m_2 = -1$$

Dado que $m_1 \cdot m_2 = -1$, las tangentes de L y R son perpendiculares entre si. ■

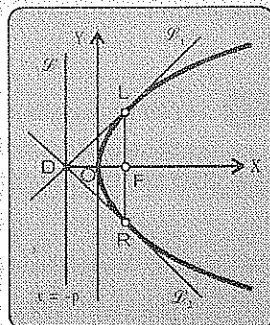


FIGURA 6.12

8 Demostrar que el punto de intersección de las tangentes del Ejercicio 7 está sobre la directriz de la parábola. (Ver el Ejercicio 19 del grupo 23.)

Demostración. En efecto, refiriéndonos a la parábola de la Figura 6.12

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = (y = x + p) \cap (y = -x - p) = D(-p, 0)$$

y dado que la ecuación de la directriz es $\mathscr{L}: x + p = 0$, por lo tanto

$$D \in \mathscr{L}$$ ■

9 Hallar la ecuación de la tangente de pendiente -1 a la parábola $y^2 - 8x = 0$

Solución. Si $y^2 = 8x \Rightarrow 4p = 8 \Leftrightarrow p = 2$

Por el Teorema 6.5, la ecuación de la tangente es $y = mx + \frac{p}{m}$

Por lo que, $y = -x + \frac{2}{-1} \Rightarrow \mathscr{L}: x + y + 2 = 0$ ■

10 Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que es paralela a la recta $\mathscr{L}: 3x + 9x - 11 = 0$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas paralelas a $\mathscr{L}$ es

$$x + 3y + k = 0 \Rightarrow y = -\tfrac{1}{3}(x + k) \qquad (1)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola nos da

$$x^2 + 4x - 4(x + k) - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4k - 8 = 0$$

Por condición de tangencia $(0)^2 - 4(1)(-4k - 8) = 0 \Leftrightarrow k = -2$

En consecuencia, por (1), la ecuación de la tangente es : $x + 3y - 2 = 0$ ■

11 Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ que es perpendicular a la recta $\mathscr{L}: 2x + y + 7$.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que son perpendiculares a $\mathscr{L}$, es

$$x - 2y + k = 0 \Rightarrow x = 2y - k \qquad (1)$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola se tiene :

$$y^2 - 2(2y - k) + 2y + 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 2k + 3 = 0$$

Condición de tangencia : $(-2)^2 - 4(1)(2k + 3) = 0 \Leftrightarrow k = -1$

Por lo tanto, en (1), la ecuación de la tangente buscada es : $x - 2y - 1 = 0$ ■

12 Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(-3 , 3) a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por P es

$$y - 3 = m(x+3) \Rightarrow x = \frac{1}{m}(y - 3 - 3m) \qquad (1)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola se tiene :

$$y^2 - \frac{3}{m}(y - 3 - 3m) - 8y + 10 = 0 \Leftrightarrow my^2 - (3 + 8m)y + 9 + 19m = 0$$

Por condición de tangencia : $(3+8m)^2 - 4m(9+19m) = 0$

Esta ecuación se reduce a : $4m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 3/2 \vee m_2 = -1/2$

Por tanto , en (1) , las ecuaciones de las tangentes buscadas son :

$$\mathscr{L}_1 : 3x - 2y + 15 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x + 2y - 3 = 0$$ ■

13 Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(1 , 4) a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9$

La solución es similar a la del Ejercicio 12. Se deja a cargo del lector.

Sol. $\mathscr{L}_1 : 3x - 2y + 5 = 0$, $\mathscr{L}_2 : x + 2y - 9 = 0$

14 Del punto P(-1 , 1), se trazan dos tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$. Hallar el ángulo agudo formado por estas rectas.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto P es

$$y + 1 = m(x+1) \Rightarrow x = \frac{1}{m}(y + 1 - m)$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola se tiene :

$$y^2 - \frac{1}{m}(y + 1 - m) + 4y + 6 = 0 \Leftrightarrow my^2 + (4m + 1)y + 7m - 1 = 0$$

Para que haya tangencia : $(4m + 1)^2 - 4m(7m - 1) = 0$

$$\Rightarrow 12m^2 + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -1/2 \vee m_2 = 1/6$$

Luego , si $\text{Tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \Rightarrow \text{Tg}\theta = \left|\frac{1/6 + 1/2}{1 - 1/12}\right| = \frac{8}{11} \Leftrightarrow \theta = 36°\,2'$ ■

15 Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$

a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes,

b) son tangentes a la parábola,

c) no cortan a la parábola.

Solución. Si $x = -2y - k$, sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene

$$y^2 - 2(-2y - k) + 6y + 9 = 0 \Rightarrow y^2 + 10y + 2k + 9 = 0$$

El discriminante de esta ecuación es : $\Delta = (10)^2 - 4(2k + 9) = 8(8 - k)$

a) Ocurre cuando $\Delta > 0$, esto es, si $8 - k > 0 \Leftrightarrow k \in \langle -\infty , 8\rangle$

b) Sucede cuando $\Delta = 0$, es decir, si $8 - k = 0 \Leftrightarrow k = 8$

c) Ocurre cuando $\Delta < 0$, esto es, si $8 - k < 0 \Leftrightarrow k \in \langle 8 , +\infty \rangle$ ■

16 Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $\mathscr{L} : x - y - 4 = 0$ y la parábola $\mathscr{P} : y^2 = 2x$ en cada uno de los puntos de intersección.

Solución. De la ecuación de la parábola : $4p = 2 \Rightarrow p = 1/2$

$$(\mathscr{L}: x - y - 4 = 0) \cap (\mathscr{P}: y^2 = 2x) = P_1(8 , 4) \text{ y } P_2(2 , -2)$$

Por el Teorema 6.4, la ecuación de la tangente es : $y_1 y = 2p(x + x_1)$

Para el punto $P_1(8 , 4)$: $4y = 2(1/2)(x + 8) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow m_1 = 1/4$

Para el punto $P_2(2 , -2)$: $-2y = 2(1/2)(x + 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow m_2 = -1/2$

Por lo tanto, el ángulo formado por $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_1$ es :

$$\text{Tg}\theta_1 = \left| \frac{m - m_1}{1 + m \cdot m_1} \right| = \left| \frac{1 - 1/4}{1 + 1/4} \right| = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta_1 = 30° \, 58'$$

y el ángulo agudo formado por $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_2$ es :

$$\text{Tg}\theta_2 = \left| \frac{m - m_2}{1 + m \cdot m_2} \right| = \left| \frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} \right| = 3 \Rightarrow \theta_2 = 71° \, 34'$$ ■

17 Hallar el ángulo agudo de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la parábola $x^2 - 4y - 4 = 0$ en uno cualquiera de sus puntos de intersección.

Solución. $(x^2 + y^2 = 25) \cap (x^2 - 4y - 4 = 0) = P_1(4 , 3)$ y $P_2(-4 , 3)$

La ecuación de la tangente a la parábola que pasa por P_1, es

$$y - 3 = m(x - 4) \Rightarrow y = mx + 3 - 4m$$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene :

$$x^2 - 4(mx + 3 - 4m) - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 16(m - 1) = 0$$

Por condición de tangencia : $(4m)^2 - 4(16)(m - 1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 2$

La ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto $P_1(x_1 , y_1)$ es

$x_1x + y_1y = r^2$ (Ver Ejercicio 10. Grupo 18)
Entonces para la circunferencia dada, la ecuación de la tangente en $P_1(4, 3)$ es

$$4x + 3y = 25 \Rightarrow m_2 = -4/3$$

Por tanto, si $\text{Tg}\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \Rightarrow \text{Tg}\theta = \left|\frac{2 + 4/3}{1 - 8/3}\right| = 2 \Rightarrow \theta = 63° 26'$ ■

18 Demostrar que las parábolas $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ y $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ son ortogonales entre si en cada uno de sus puntos de intersección.

La demostración se deja para el lector. (Sugerencia : Halle las ecuaciones de las tangentes en los puntos de intersección y compruebe que son perpendiculares.)

19 Desde el foco de una parábola se traza una recta perpendicular a una tangente cualquiera a la parábola. Demostrar que el punto de intersección de estas rectas está sobre la tangente a la parábola en el vértice.

Demostración. En efecto, sea la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 4px$

Por el Teorema 6.4 , la ecuación de la tangente en $P_1(x_1, y_1)$ es, $\mathscr{L}: y_1 y = 2p(x + x_1)$ (1)

y que tiene pendiente : $m = \dfrac{2p}{y_1}$

La ecuación de la recta perpendicular a $\mathscr{L}$ que pasa por el foco F(p , 0) es

$$\mathscr{L}_1 : y = -\frac{y_1}{2p}(x - p)$$

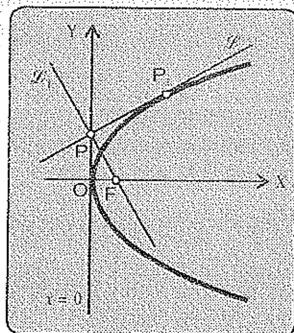


FIGURA 6.13

Sustituyendo este valor de y en (1) se tiene :

$$-\frac{(y_1)^2}{2p}(x - p) = 2p(x + x_1) \Leftrightarrow (y_1^2 + 4p^2)x = p(y_1^2 - 4px_1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow y_1^2 = 4px_1$; luego , $(y_1^2 + 4p^2)x = p(0) = 0$

Dado que $y_1^2 + 4p^2 \neq 0 \Rightarrow x = 0$, que es precisamente la ecuación de la tangente en el vértice de la parábola. Por tanto , $P \in (\mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1)$ está sobre dicha tangente. ■

20 Demostrar que la normal de pendiente m a la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 4px$ tiene por ecuación : $y = mx - 2pm - pm^3$

Demostración. Por el Teorema 6.4, la pendiente de la tangente a la parábola $\mathscr{P}$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es : $m_t = \dfrac{2p}{y_1}$

Entonces, la ecuación de la normal en P_1 es :

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2p}(x - x_1) \Rightarrow y = -\frac{y_1}{2p}x + y_1 + \frac{x_1 y_1}{2p} \qquad (1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow y_1^2 = 4px_1$, de donde : $x_1 = \dfrac{(y_1)^2}{4p}$

Sustituyendo este valor en (1) se tiene : $y = -\dfrac{y_1}{2p}x + y_1 + \dfrac{(y_1)^3}{8p^2}$

y dado que $m = -\dfrac{y_1}{2p}$, entonces : $y = mx - 2pm - pm^3$ ■

21 Demostrar que cualquier tangente a una parábola, excepto la tangente en el vértice, corta a la directriz y al lado recto (prolongado si es necesario) en puntos que son equidistantes del foco.

Demostración. Sea la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 4px$, y sean A y B los puntos de intersección de la tangente con el lado recto (prolongado) y la directriz, respectivamente. Por el Teorema 6.4, la ecuación de la tangente en $P_1(x_1, y_1)$ es : $y_1 y = 2p(x + x_1)$

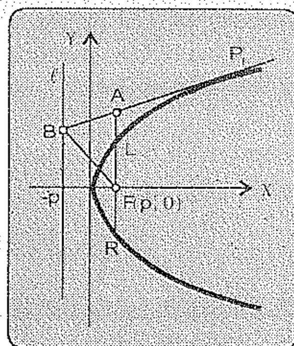


FIGURA 6.14

Para $x = p$ (ecuación del lado recto), se tiene :

$$y = \frac{2p}{y_1}(p + x_1)$$

Luego, A tiene por coordenadas : $\left(p, \dfrac{2p}{y_1}(p + x_1)\right)$

Para $x = -p$ (ecuación de la directriz) obtenemos

$$y = \frac{2p}{y_1}(x_1 - p)$$

Entonces, las coordenadas de B son : $\left(-p, \dfrac{2p}{y_1}(x_1 - p)\right)$

La longitud de $\overline{AF}$ es la ordenada de A, esto es : $|\overline{AF}| = \left|\dfrac{2p}{y_1}(x_1 + p)\right| \qquad (1)$

$$|\overline{BF}| = \sqrt{(p+p)^2 + \frac{4p^2}{y_1^2}(x_1 - p)^2} = \sqrt{\frac{4p^2}{y_1^2}[y_1^2 + (x_1 - p)^2]}$$

Dado que $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow y_1^2 = 4px_1$

$$\Rightarrow |\overline{BF}| = \sqrt{\frac{4p^2}{y_1^2}[4px_1 + (x_1 - p)^2]} = \sqrt{\frac{4p^2}{y_1^2}(x_1 + p)^2} = \left|\frac{2p}{y_1}(x_1 + p)\right| \qquad (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2), se deduce que : $|\overline{AF}| = |\overline{BF}|$ ■

22 En cualquier punto P de una parábola, no siendo el vértice, la tangente y la normal cortan al eje de la parábola en los puntos A y B, respectivamente. Demostrar que los puntos A, B y P son equidistantes del foco.

Demostración. En efecto, la ecuación de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$y_1 y = 2p(x + x_1) \qquad \text{(Teorema 6.4)}$$

Para $y = 0 \Rightarrow 2p(x + x_1) = 0 \Leftrightarrow x = -x_1$

Luego $A(-x_1, 0)$ y como $Q(x_1, 0)$, entonces

$$\overline{AO} = \overline{OQ} \Rightarrow \overline{AQ} = \overline{AO} + \overline{OQ} = 2\,\overline{AO} \quad (1)$$

Longitud de la subnormal : $\overline{QB} = |m y_1|$

Dado que , $m = \dfrac{2p}{y_1} \Rightarrow \overline{QB} = 2p \qquad (2)$

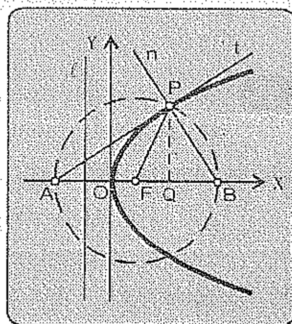


FIGURA 6.15

Sumando (1) y (2) se tiene :

$$\overline{AQ} + \overline{QB} = 2(\overline{AO} + p) \Rightarrow \overline{AB} = 2(\overline{AO} + \overline{OF}) = 2\overline{AF}$$

Esto es, $|\overline{AF}| = |\overline{FB}|$; además, por el Ejercicio 15 , Grupo 23 :

$$r = |\overline{PF}| = |x_1 + p| \Rightarrow |\overline{PF}| = |\overline{OQ} + \overline{OF}| = |\overline{AO} + \overline{OF}| = |\overline{AF}|$$

$$\therefore |\overline{AF}| = |\overline{FB}| = |\overline{FP}|$$ ■

23 Por medio del resultado del Ejercicio 22, demuéstrese un procedimiento para trazar la tangente y la normal en cualquier punto de la parábola dada.

Solución. La demostración del procedimiento se muestra en la Figura 6.15, y consiste en trazar una circunferencia de radio $r = \overline{PF}$, que intercepte al eje X en los puntos A y B. Uniendo estos puntos con el punto P de tangencia obtendremos las gráficas de la tangente y normal respectivamente. ■

24 Demostrar que la tangente a la parábola $(y-k)^2=4p(x-h)$, de pendiente m, tiene por ecuación : $y = mx - mh + k + \frac{p}{m}$, $m \neq 0$.

Demostración. En efecto, trasladando los ejes coordenados al nuevo origen O'(h , k), la ecuación dada se transforma en : $y'^2 = 4px'$

Por el Teorema 6.5, la ecuación de la tangente, de pendiente m, es :

$$y' = mx' + \frac{p}{m} \ , \ m \neq 0 \qquad (1)$$

y por las ecuaciones de traslación : $x = x' + h \Rightarrow x' = x - h$

$$y = y' + k \Rightarrow y' = y - k$$

Si sustituimos estos valores de x' e y' en (1) obtenemos

$$y - k = m(x-h) + \frac{p}{m} \Leftrightarrow y = mx - mh + k + \frac{p}{m} \ , \ m \neq 0$$ ■

25 Demostrar que toda circunferencia que tiene de diámetro una cuerda focal de una parábola, es tangente a la directriz.

Demostración. Sea la parábola $y^2 = 4px$, y sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de la cuerda focal $\overline{P_1P_2}$ y C(h , k) el centro de la circunferencia de radio r.

Probaremos que : $r = \overline{DC} = h + p$

En efecto, los puntos A , B y D tienen por abscisa , $x = -p$

$$\Rightarrow \overline{AP_1} = x_1 - (-p) = x_1 + p$$
$$\overline{BP_2} = x_2 - (-p) = x_2 + p$$

Sumando ambos miembros de estas dos igualdades se tiene :

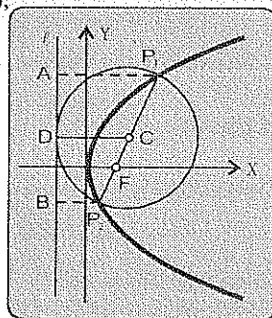


FIGURA 6.16

$$\overline{AP_1} + \overline{BP_2} = x_1 + x_2 + 2p \Rightarrow \frac{1}{2}(\overline{AP_1} + \overline{BP_2}) = \frac{x_1 + x_2}{2} + p$$

Como el centro C(h , k) biseca al segmento $\overline{P_1P_2}$ $\Rightarrow h = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Luego, $\overline{DC} = h + p = r$. Por lo tanto, la circunferencia es tangente a la directriz de la parábola. ■

27 Si desde un punto exterior P se trazan tangentes a una parábola, el segmento de

recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P para esa parábola. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto exterior a la parábola $y^2 = 4px$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

Demostración. Sean los puntos de tangencia :

$$P(x_2, y_2) \text{ y } Q(x_3, y_3)$$

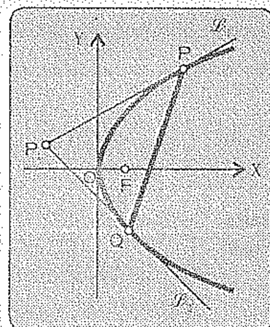


FIGURA 6.17

Por el Teorema 6.4, la ecuación de tangente $\mathscr{L}_1$ es

$$y_2 y = 2p(x + x_2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 2px - y_2 y + 2px_2 = 0$$

y la ecuación de la tangente $\mathscr{L}_2$ es

$$y_3 y = 2p(x + x_3) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2 : 2px - y_3 y + 2px_3 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas que pasan por P_1 son :

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \Leftrightarrow \mathscr{L}'_1 : m_1 x - y + y_1 - m_1 x_1 = 0$$

$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \Leftrightarrow \mathscr{L}'_2 : m_2 x - y + y_1 - m_2 x_1 = 0$$

Como $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_1' \Rightarrow \dfrac{2p}{m_1} = \dfrac{y_2}{1} = \dfrac{2px_2}{y_1 - m_1 x_1} \Rightarrow y_2 = \dfrac{2p}{m_1}$ y $x_2 = \dfrac{y_1 - m_1 x_1}{m_1}$

$$\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2' \Rightarrow \frac{2p}{m_2} = \frac{y_3}{1} = \frac{2px_3}{y_1 - m_2 x_1} \Rightarrow y_3 = \frac{2p}{m_2} \text{ y } x_3 = \frac{y_1 - m_2 x_1}{m_2}$$

Por lo que : $P\left(\dfrac{y_1 - m_1 x_1}{m_1}, \dfrac{2p}{m_1}\right)$ y $Q\left(\dfrac{y_1 - m_2 x_1}{m_2}, \dfrac{2p}{m_2}\right)$

Pendiente de la cuerda $\overline{PQ}$: $m = \dfrac{\dfrac{2p}{m_2} - \dfrac{2p}{m_1}}{\dfrac{y_1 - m_2 x_1}{m_2} - \dfrac{y_1 - m_1 x_1}{m_1}} = \dfrac{2p}{y_1}$

Ecuación de $\overline{PQ}$: $y - y_2 = \dfrac{2p}{y_1}(x - x_2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: y_1 y = 2px + y_1 y_2 - 2px_2$ (1)

Dado que $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow y_2 y_1 = 2p(x_1 + x_2) \Rightarrow y_1 y_2 - 2px_2 = 2px_1$ (2)

Finalmente, sustituyendo el valor de (2) en (1) obtenemos

$$\mathscr{L}: y_1 y = 2p(x + x_1)$$

28 Demostrar que la cuerda de contacto de cualquier punto de la directriz de una parábola pasa por su foco.

Demostración. En efecto, sea la parábola $y_2 = 4px$, cuyo foco es F(p , 0) y directriz $\ell : x = -p$

Si $P_1 \in \ell \Rightarrow P_1(-p, y_1)$. Por la fórmula del Ejercicio 27, la ecuación de la cuerda de contacto $\overline{PQ}$ es

$$y_1 y = 2p(x - p)$$

Si $y = 0 \Rightarrow 2p(x - p) = 0$, como $p \neq 0 \Rightarrow x - p = 0 \Leftrightarrow x = p$, hemos obtenido la abscisa del foco.

Por lo tanto, la cuerda de contacto $\overline{PQ}$ pasa por el foco. ■

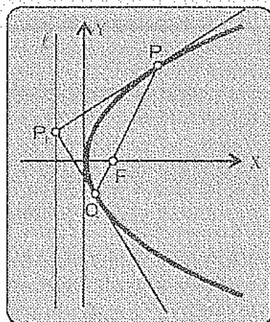


FIGURA 6.18

29 Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una parábola es una recta paralela al eje. Esta recta se llama *diámetro* de la parábola.

Demostración. En efecto sea la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 4px$ y sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

La familia de cuerdas paralelas está representada por la ecuación : $y = mx + b \Rightarrow x = \frac{1}{m}(y - b)$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación de la parábola se tiene : $y^2 = \frac{4p}{m}(y - p) \Rightarrow my^2 - 4py + 4bp = 0$

La suma de las raíces de esta ecuación es :

$$y_1 + y_2 = \frac{4p}{m} \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2p}{m} \quad \text{(constante)}$$

Por lo tanto, $y = \frac{2p}{m}$ es la ecuación del diámetro de la parábola y es paralela al eje X. ■

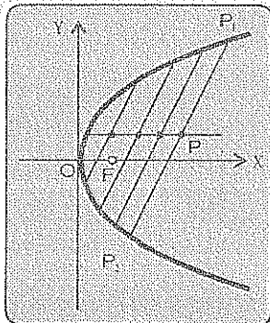


FIGURA 6.19

30 Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $y^2 = 16x$ para un sistema de cuerdas paralelas de pendiente 2.

Solución. Si $y^2 = 16x \Rightarrow 4p = 16 \Leftrightarrow p = 4$

Por la fórmula del Ejercicio 29, la ecuación del diámetro de la parábola es :

$$y = \frac{2p}{m} \Rightarrow y = \frac{2(4)}{2} \Leftrightarrow y = 4$$ ■

EJERCICIOS DE REPASO

(Texto : F. J. De La Borbolla)

1 Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto F(5 , 0), lado recto, LR = 12, y el eje coincide con el eje X.

Solución. La forma típica de la ecuación es : $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ (1)

Si $LR = |4p| = 12 \Leftrightarrow p_1 = 3 \vee p_2 = -3$

$$F(5, 0) = F(h + p, k) \Rightarrow k = 0 \wedge h + p = 5 \Rightarrow \begin{cases} h + 3 = 5 \Leftrightarrow h_1 = 2 \\ h - 3 = 5 \Leftrightarrow h_2 = 8 \end{cases}$$

Luego en (1), las ecuaciones de las parábolas son

$$\mathscr{P}_1 : (y - 0)^2 = 12(x - 2) \vee \mathscr{P}_2 : (y - 0)^2 = -12(x - 8)$$ ■

2 Hallar la ecuación de la parábola sabiendo que : LR = 4 ; pasa por Q(-1 , -2), eje paralelo al eje X, vértice sobre la recta $\mathscr{L}: x = 3$.

Solución. Forma típica de la ecuación de la parábola, $\mathscr{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h)$

Si $V(h, k) \in \mathscr{L}: x = 3 \Rightarrow h = 3 \Rightarrow \mathscr{P}: (y - k)^2 = 4p(x - 3)$

Si $Q(-1, -2) \in \mathscr{P} \Rightarrow (-2 - k)^2 = 4p(-1 - 3) \Rightarrow (k + 2)^2 = -16p$ (1)

Como $LR = 4 \Rightarrow |4p| = 4 \Leftrightarrow p = 1 \vee p = -1$

Está claro que la segunda alternativa satisface la ecuación (1), luego, si

$$p = -1 \Rightarrow (k + 2)^2 = 16 \Leftrightarrow k_1 = 2 \vee k_2 = -6$$

Por tanto, las ecuaciones de las parábolas son

$$\mathscr{P}_1 : (y - 2)^2 = -4(x - 3) \vee \mathscr{P}_2 : (y + 6) = -4(x - 3)$$ ■

3 Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y, y que pasa por los puntos A(-6 , -1) , B(-2 , -1) y C(0 , 5)

Solución. Sea la parábola $\mathscr{P}: x^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1)

Si $A(-6, -1) \in \mathscr{P} \Rightarrow 36 - 6D - E + F = 0$ (2)

$B(-2, -1) \in \mathscr{P} \Rightarrow 4 - 2D - E + F = 0$ (3)

$C(0, 5) \in \mathscr{P} \Rightarrow 0 + 0 + 5E + F = 0 \Rightarrow F = -5E$ (4)

Restando (2) - (3) se tiene : $32 - 4D = 0 \Rightarrow D = 8$

Restando (3) - (4) obtenemos : $4 - 2D - 6E = 0$, de donde $E = -2 \Rightarrow F = 10$

Por tanto, en (1), la ecuación de la parábola es , $\mathscr{P}: x^2 + 8x - 2y + 10 = 0$ ■

4 Dados, el foco F(0 , 0), y la directriz $\ell : x+y+4=0$; obtener la ecuación de la parábola y los demás elementos.

Solución. Sea P(x , y) un punto de la parábola.

En cualquier posición de P se debe verificar que : $|\overline{PF}| = |d(P , \ell)| \Rightarrow x^2+y^2 = \dfrac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}$

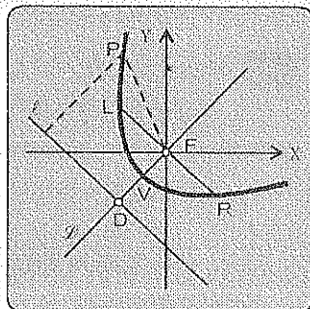


FIGURA 6.20

de donde obtenemos, $\mathscr{P}: x^2-2xy+y^2-8x-8y-16=0$

Como el eje es perpendicular a la directriz y pasa por F(0 , 0), su ecuación es , $\mathscr{L}: y=x$

$$\Rightarrow \ell \cap \mathscr{L} = D(-2 , -2)$$

El vértice es punto medio de $\overline{FD} \Rightarrow V(-1 , -1)$

$$p = |\overline{VF}| = \sqrt{(0+1)^2+(0+1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow LR = |4p| = 4\sqrt{2}$$

Dado que el lado recto es paralelo a la directriz, su ecuación es $\mathscr{L}_1 : y = -x$

$$\therefore\ (\mathscr{L}_1 \cap P) = L(-2 , 2) \ \text{ y } \ R(2 , -2)$$

5 Obtener la ecuación de la parábola si se conocen : Foco F(5 , 1) y vértice V(3 , 2). Hallar también los demás elementos de la parábola.

Solución. Sea D(x_1 , y_1) el punto de intersección de la directriz ℓ y eje $\mathscr{L}$. Como V biseca el segmento $\overline{FD}$, entonces

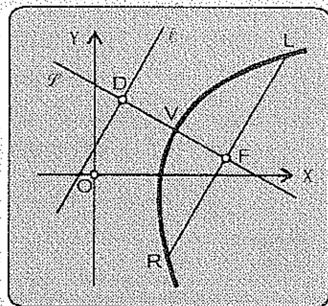


FIGURA 6.21

$$\left.\begin{array}{l} 3 = \frac{1}{2}(x_1+5) \Leftrightarrow x_1 = 1 \\ 2 = \frac{1}{2}(y_1+1) \Leftrightarrow y_1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow D(1 , 3)$$

Pendiente de $\overline{VF}$: $m = \dfrac{1-2}{5-3} = -\dfrac{1}{2}$

Ecuación de la directriz :

$$y-3 = 2(x-1) \Leftrightarrow \ell : 2x-y+1=0$$

Si P(x , y) es un punto genérico de la parábola, entonces por definición :

$$|\overline{PF}| = |d(P , \ell)|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2} = \frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \mathscr{P}: x^2+4xy+4y^2-54x-8y+129=0$$

$p = |\overline{VF}| = \sqrt{(5-3)^2+(1-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow LR = |4p| = 4\sqrt{5}$

Ecuación del eje : $y-3 = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x+2y-7 = 0$

Ecuación del lado recto, paralelo a $\ell : y-1 = 2(x-5) \Rightarrow \mathscr{L}_1 : 2x-y-9 = 0$

Extremos del lado recto : $(\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{P}) = L(7,5)$ y $R(3,-3)$ ■

6 Una parábola pasa por A(-2 , 4) y B(8 , -1). Su directriz es $\ell : y+6=0$. Cuál es su ecuación? (Dos soluciones.)

Solución. Forma típica de la ecuación buscada

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad (1)$$

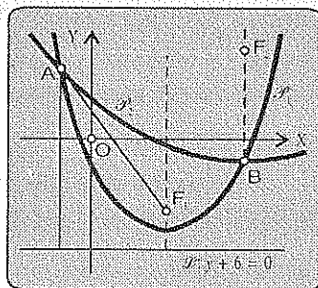


FIGURA 6.22

Si F(x , y) es el foco, entonces por definición :

$|\overline{AF}| = |d(A, \ell)| \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2} = |4+6|$

de donde : $x^2+y^2+4x-8y-80 = 0 \qquad (2)$

$|\overline{BF}| = |d(B, \ell)| \Rightarrow \sqrt{(x-8)^2+(y+1)^2} = |-1+6|$

de donde : $x^2+y^2-16x+2y+40 = 0 \qquad (3)$

Resolviendo (2) y (3) obtenemos :

$$F_1(4, -4) \quad y \quad F_2(8, 4)$$

Si $F(h, k+p) = F_1(4,-4) \Rightarrow h_1 = 4$, $k_1+p_1 = -4$
Ecuación de la directriz , $\ell : y = k-p \Rightarrow k_1-p_1 = -6$ $\Bigg\} \Rightarrow k_1 = -5 \wedge p_1 = 1$

Si $F(h, k+p) = F_2(8,4) \Rightarrow h_2 = 8$, $k_2+p_2 = 4$
De la ecuación de la directriz : $k_2-p_2 = -6$ $\Bigg\} \Rightarrow k_2 = -1 \wedge p_2 = 5$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las parábolas son

$$\mathscr{P}_1 : (x-4)^2 = 4(y+5) \vee \mathscr{P}_2 : (x-8)^2 = 20(y+1)$$ ■

7 Una parábola pasa por P(7 , 3) y Q(-1 , -5). Su foco es F(11 , 0). Cuál es su ecuación? (Dos soluciones.)

Solución. Debemos considerar las dos formas de la ecuación de la parábola

Caso 1. Forma típica , $\mathscr{P}_1 : (y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad (1)$

Ecuación de la directriz , $\ell_1 : x = h-p$

Un punto sobre ℓ_1, a la misma altura que P es $D_1(h-p, 3)$. Entonces por definición de

parábola

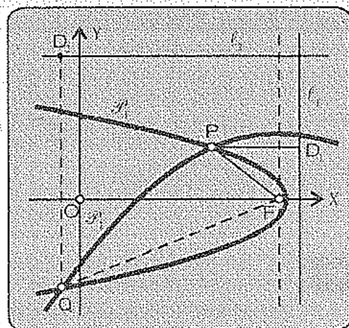


FIGURA 6.23

$$|\overline{PD}_1| = |\overline{PF}|$$

$\Rightarrow \sqrt{(h-p-7)^2+(3-3)^2} = \sqrt{(7-1)^2+(3)^2}$

$\Rightarrow (h-p-7)^2 = 25 \Leftrightarrow h-p = 7 \pm 5$

Si $F(h+p, k) = F(11, 0) \Rightarrow k = 0$ y $h+p = 11$

La solución común de $(h-p=12) \wedge (h+p=11)$ es:

$$h = 23/2 \wedge p = -1/2$$

y la solución común de $(h-p=2) \wedge (h+p=11)$ es:

$$h = 13/2 \wedge p = 9/2$$

Como $p < 0$ (la parábola se abre hacia la izquierda) descartamos la segunda solución.

Por tanto, en (1), la primera solución es, $\mathscr{P}_1 : (y-0)^2 = -2(x-23/2)$

Caso 2. Forma típica, $\mathscr{P}_2 : (x-h)^2 = 4p(y-k)$ (2)

Ecuación de la directriz, ℓ_2: $y = k-p$

Un punto sobre ℓ_2, en la misma línea de Q es $D_2(-1, k-p)$

Luego, si $|\overline{QD}_2| = |\overline{QF}| \Rightarrow \sqrt{(-1+1)^2+(k-p+5)^2} = \sqrt{(11+1)^2+(0+5)^2}$

$\Rightarrow (k-p+5)^2 = 169 \Leftrightarrow k-p = -5 \pm 13$

Si $F(h, k+p) = F(11, 9) \Rightarrow h = 11$ y $k+p = 0$

La solución común de $(k+p=0) \wedge (k-p=8)$ es: $k = 4 \wedge p = -4$

y la solución común de $(k+p=0) \wedge (k-p=-18)$ es: $k = -9 \wedge p = 9$

Como $p < 0$ (la curva se abre hacia abajo), descartamos la segunda solución

Por lo tanto, en (2), la segunda solución es, $\mathscr{P}_2 : (x-11)^2 = -6(y-4)$ ■

8 Una parábola pasa por A(4 , -2) y B(-2 , 4). Su tangente en el vértice V es la recta $\mathscr{L}: y+4=0$. Cual es su ecuación.

Solución. La forma típica de la ecuación es, $\mathscr{P}: (x-h)^2 = 4p(y-k)$ (1)

Si $V(h, k) \in \mathscr{L}: y+4=0 \Rightarrow k+4=0$

$\Rightarrow k = -4$

$A(4, -2) \in \mathscr{P} \Rightarrow (4-h)^2 = 4p(-2+4)$

$\Rightarrow (4-h)^2 = 8p$ (2)

$B(-2, 4) \in \mathscr{P} \Rightarrow (-2-h)^2 = 4p(4+4)$

$\Rightarrow (2+h)^2 = 32p$ (3)

Dividiendo (2) entre (3) se tiene :

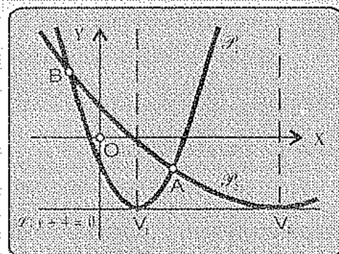


FIGURA 6.24

$$\frac{(4-h)^2}{(2+h)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow h_2 - 12h + 20 = 0 \Leftrightarrow h_1 = 2 \vee h_2 = 10$$

Para $h_1 = 2$, en (2) : $(4-2)^2 = 8p \Rightarrow h_1 = 1/2$

Si $h_2 = 10 \Rightarrow (4-10)^2 = 8p \Rightarrow p_2 = 9/2$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las parábolas son

$$\mathscr{P}_1 : (x-2)^2 = 2(y+4) \vee \mathscr{P}_2 : (x-10)^2 = 18(y+4)$$ ▪

9 Si L(-9 , 3) y R(-1 , -5) son los extremos del lado recto, hallar la ecuación de la parábola. (Dos soluciones.)

Solución. Como el foco biseca al lado recto, entonces : $F\left(\frac{-9-1}{2} , \frac{3-5}{2}\right) \Leftrightarrow F(-5 , -1)$

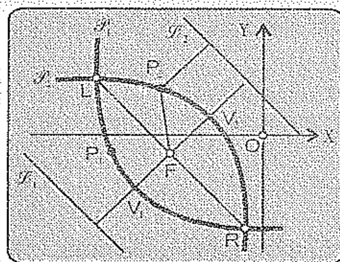


FIGURA 6.25

$\overline{LR} = |4p| = \sqrt{(-1+9)^2 + (-5-3)^2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow p = 2\sqrt{2}$

Ecuación del lado recto :

$$y - 3 = \frac{-5-3}{-1+8}(x+9) \Rightarrow \overline{LR} : x + y + 6 = 0$$

La ecuación de la familia de rectas paralelas a $\overline{LR}$ es

$$\mathscr{L} : x + y + k = 0 \qquad (1)$$

Si $d(F , \mathscr{L}) = 2p \Rightarrow \frac{|-5-1+k|}{\sqrt{2}} = 2(2\sqrt{2}) \Rightarrow |k-6| = 8 \Leftrightarrow k-6 = 8 \vee k-6 = -8$

$$\Leftrightarrow k_1 = 14 \vee k_2 = -2$$

Sustituyendo estos valores de k en (1), obtenemos las ecuaciones de las directrices

$$\mathscr{L}_1 : x + y + 14 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x + y - 2 = 0$$

Si $P_1(x , y)$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces por definición

$$|\overline{P_1F}| = |d(P_1 , \mathscr{L}_1)| \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x+y+14|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_1 : x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 24y - 144 = 0$$

También : $|\overline{P_2F}| = |d(P_2 , \mathscr{L}_2)| \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_2 : x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$$ ▪

10 Hallar la ecuación de la parábola que pasa por el punto A(7 , 5), cuya directriz es $\ell : 2x - y + 1 = 0$ y la tangente en el vértice es $\mathscr{L}: 2x - y - 4 = 0$

Solución. La distancia entre las rectas paralelas ℓ y $\mathscr{L}$ es :

$$p = \frac{|1 - (-4)|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$$

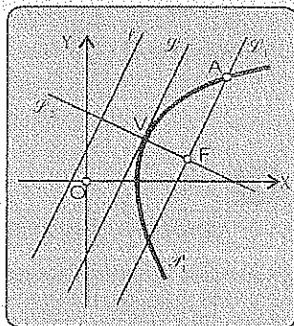


FIGURA 6.26

y si

$$d(A , \ell) = \frac{|2(7) - 5 + 1|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow d(A , \ell) = 2d(\ell , \mathscr{L})$$

Por lo que el punto A se halla en la recta $\mathscr{L}_1 \| \mathscr{L}$, cuya ecuación es : $y - 5 = 2(x - 7) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 2x - y - 9 = 0$

La familia de rectas perpendiculares a $\mathscr{L}_1$ está dada por la ecuación , $\mathscr{L}_2 : x + 2y + k = 0$ (1)

Como la $d(A , \mathscr{L}_2) = 2p \Rightarrow \frac{|7 + 2(5) + k|}{\sqrt{1+4}}$

$$\Rightarrow |k + 17| = 10 \Leftrightarrow k + 17 = 10 \vee k + 17 = -10$$

$$\Leftrightarrow k_1 = -7 \vee k_2 = -27$$

Entonces, en (1) , se tiene , $\mathscr{L}_2 : x + 2y - 7 = 0 \vee \mathscr{L}_3 : x + 2y - 27 = 0$

Luego : $(\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_1) = F_1(5 , 1)$ y $(\mathscr{L}_3 \cap \mathscr{L}_1) = F_2(9 , 9)$

Si $P(x , y)$ es un punto genérico de la parábola, entonces

$$|\overline{PF_1}| = |d(P , \ell)| \Rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2} = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{4+1}}$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_1 : x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0$$

$$|PF_2| = |d(P , \ell)| \Rightarrow \sqrt{(x-9)^2 + (y-9)^2} = \frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \mathscr{P}_2 : x^2 + 4xy + 4y^2 - 94x - 88y + 809 = 0$$ ∎

11 Qué ángulo debe formar la cuerda que pasa por el foco de la parábola $y^2 = 5x$ con su eje, para que la longitud de la cuerda sea 4 veces la del lado recto.

Solución. Si $y^2 = 5x \Rightarrow p = 5/4 \Rightarrow F(5/4 , 0)$

Sean $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ los extremos de la cuerda focal. Luego por definición de parábola

$$\overline{P_1F} = \overline{P_1D_1} = x_1 - (-p) = x_1 + p$$

$\overline{P_2F} = \overline{P_2D_2} = x_2 - (-p) = x_2 + p$

$\Rightarrow \overline{P_1F} + \overline{P_2F} = \overline{P_1P_2} = (x_1 + x_2) + 2p$

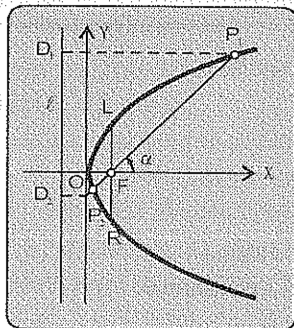


FIGURA 6.27

De la condición del problema, se sigue que :

$\overline{P_1P_2} = 4\,\overline{LR} \Rightarrow (x_1 + x_2) + 2p = 4(4p)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 14p \Rightarrow x_1 + x_2 = 35/2$ (1)

Ecuación de la cuerda : $y = m(x - 5/4)$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene :

$(mx - 5m/4)^2 = 5x \Rightarrow 16m^2x^2 - 40(m^2 + 2)x + 25m^2 = 0$

La suma de las raíces de esta ecuación es :

$$x_1 + x_2 = \frac{40(m^2 + 2)}{16m^2} = \frac{5(m^2 + 2)}{2m^2}$$

Luego, en (1) : $\dfrac{5(m^2 + 2)}{2m^2} = \dfrac{35}{2}$, de donde obtenemos $m^2 = 1/3 \Rightarrow m = \sqrt{3}/3$

Dado que $m = \text{Tg}\alpha$, entonces si $\text{Tg}\alpha = \sqrt{3}/3 \Leftrightarrow \alpha = 30°$ ■

12 Por el foco de la parábola $y^2 = 4px$ pasa una cuerda que forma un ángulo de 60° con el eje. Qué relación hay entre la longitud de la cuerda y la del lado recto.

Solución. Las coordenadas del foco son F(p , 0) y si la pendiente de la cuerda focal $\overline{P_1P_2}$ es $m = \text{Tg}60° = \sqrt{3}$, su ecuación es :

$$y = \sqrt{3}\,(x - p)$$

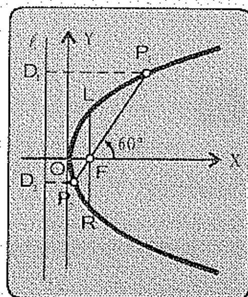


FIGURA 6.28

Sustituyendo este valor en la ecuación de la parábola se tiene :

$3(x - p)^2 = 4px \Rightarrow 3x^2 - 10px + 3p = 0$

La suma de las raíces de esta ecuación es : $x_1 + x_2 = \dfrac{10p}{3}$

Como $\overline{P_1P_2} = (x_1 + x_2) + 2p$ (Ver Ejercicio 11)

Entonces : $\overline{P_1P_2} = \dfrac{10p}{3} + 2p = \dfrac{16p}{3}$

$$\therefore \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{LR}} = \frac{16p/3}{4p} = \frac{4}{3}$$ ■

13 Hallar la ecuación del diámetro de la parábola $x^2 - x + 4y + 1 = 0$, sabiendo que

biseca a las cuerdas paralelas a la recta $\mathscr{L}_1 : 5x + 4y = 0$

Solución. En el Ejercicio 29 del grupo 25, determinamos la ecuación del diámetro ($y = 2p/m$) para una parábola de la forma $y^2 = 4px$. Análogamente se puede demostrar que la ecuación del diámetro de la parábola de la forma $x^2 = 4py$, es $x = 2pm$, y de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ es, $x = 2pm + h$. En todos los casos m es la pendiente de las cuerdas paralelas.

Luego, si $\mathscr{L}_1 : 5x + 4y = 0 \Rightarrow m_1 = m = -5/4$

La ecuación de la parábola en su forma ordinaria es $(x - 1/2)^2 = -4(y - 3/16)$ de donde :

$$h = 1/2 \quad y \quad 4p = -4 \Rightarrow p = -1$$

Por lo que, si $x = 2pm + h \Rightarrow x = 2(-1)(-5/4) + 1/2 \Leftrightarrow x = 3$, es la ecuación del diámetro de la parábola dada. ∎

14 Si M(3 , 7) es el punto medio de una cuerda de la parábola $x^2 - 10x + 12y = 119$, hallar las ecuaciones del diámetro y la cuerda de dicha parábola.

Solución. Reduciendo la ecuación de la parábola a su forma ordinaria se tiene

$$(x - 5)^2 = -12(y - 12) \Rightarrow h = 5 \ \ y \ \ p = -3$$

Como el diámetro de la parábola es paralelo al eje Y, y pasa por M(3 , 7), su ecuación es $x = 3$.

Pero sabemos que $x = 2pm + h \Rightarrow 3 = 2(-3)m + 5 \Leftrightarrow m = 1/3$ es la pendiente de la cuerda, por lo que su ecuación es

$$y - 7 = \frac{1}{3}(x - 3) \Leftrightarrow \mathscr{L}: x - 3y + 18 = 0$$ ∎

15 Cuál debe ser la pendiente de las cuerdas paralelas que son bisecadas por el diámetro $y = 1$, en la parábola $y^2 + 2y - 4x - 7 = 0$.

Solución. Si $y^2 + 2y = 4x + 7 \Rightarrow (y + 1)^2 = 4(x + 2) \Rightarrow k = -1 \ y \ p = 1$

Ecuación del diámetro : $y = \dfrac{2p}{m} + k \Rightarrow 1 = \dfrac{2}{m} - 1 \Leftrightarrow m = 1$ ∎

16 Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de un haz de cuerdas que pasan por A(8 , 0) del eje de la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 8x$

Solución. 1. Sean $P_1(x_1 , y_1)$, $P_2(x_2 , y_2)$ los extremos de una cuerda de la parábola dada, y sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica.

$$\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$$

2. Cuya expresión analítica es :

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad , \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

3. Si $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 8x_1$

$P_2(x_2, y_2) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_2)^2 = 8x^2$

$\Rightarrow (y_1)^2 - (y_2)^2 = 8(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 8(x_1 - x_2)$

$\Rightarrow (2y)\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) = 8 \Leftrightarrow my = 4$.

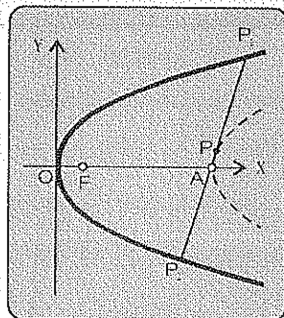


FIGURA 6.29

Pero, dado que : $m = \frac{y - 0}{x - 8} \Rightarrow \left(\frac{y}{x - 8}\right) y = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4x - 32$

El lugar geométrico es una parábola coaxial con la primera y con vértice en el punto A(8 , 0) ■

17 En qué punto del eje de la parábola $\mathscr{P}$: $y^2 = 8x$ concurren las cuerdas que se ven desde el vértice bajo un ángulo de 90°.

Solución. La ecuación de la recta que contiene al segmento $\overline{AV}$ es , $\mathscr{L}_1 : y = mx$

Como $\overline{AV} \perp \overline{BV}$, la ecuación de $\overline{BV}$ es , $\ell_2 : y = -\frac{1}{m}x$

Interceptando $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ con la parábola obtenemos :

$$A(8/m^2, 8/m) \text{ y } B(8m^2, -8m)$$

Pendiente de $\overline{AB}$: $m_1 = \frac{8/m + 8m}{8/m^2 - 8m^2} = \frac{m}{1 - m^2}$

Ecuación de $\overline{AB}$: $y + 8m = \frac{m}{1 - m^2}(x - 8m^2)$

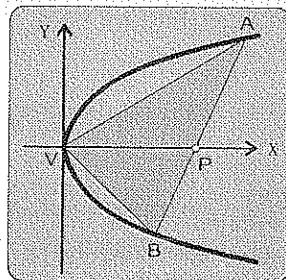


FIGURA 6.30

Para $y = 0$, se tiene : $8m = \frac{m}{1 - m^2}(x - 8m^2)$, de donde $x = 8$

Por lo tanto, P(8 , 0) es el punto buscado ■

18 El vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo es el extremo L del lado recto de la parábola $y^2 = 8x$. El segundo vértice del triángulo es el vértice de la parábola. Cuál es el tercer vértice del triángulo.

Solución. Designemos por $A(x, 0)$ las coordenadas del tercer vértice. Si $y^2 = 8x \Rightarrow p = 2$

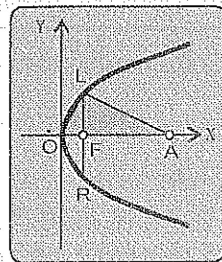


FIGURA 6.31

Entonces las coordenadas del foco son : $F(2, 0)$

Como $|\overline{FL}| = 2p = 4 \Rightarrow L(2, 4)$

La pendiente de $\overline{OL}$ es , $m_1 = \frac{4}{2} = 2$

Dado que $\overline{OL} \perp \overline{AL} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = 1 \Leftrightarrow m_2 = -1/2$

y si $m_2 = \frac{0-4}{x-2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{-4}{x-2}$, de donde , $x = 10$. Por lo que : $A(10, 0)$ ■

19 El vértice de la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 4px$ coincide con el de un triángulo equilátero. Los otros dos vértices del mismo se encuentran sobre la curva. Cuáles son?

Solución. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_1, -y_1)$ las coordenadas de los otros dos vértices.

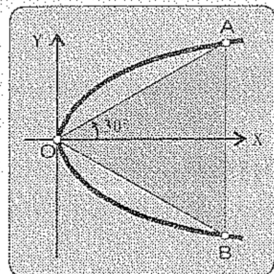


FIGURA 6.32

La ecuación de $\overline{OA}$ es : $y = (\text{Tg}30°)x \Rightarrow y_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x_1$ (1)

Si $A(x_1, y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (y_1)^2 = 4px_1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_1\right)^2 = 4px_1$

de donde obtenemos : $x_1 = 12p$.

Sustituyendo este valor en (1) se tiene : $y_1 = 4\sqrt{3}\,p$

$\therefore A(12p, 4\sqrt{3}\,p)$ y $B(12p, -4\sqrt{3}\,p)$ ■

20 Qué lugar geométrico describe el centro de una circunferencia móvil tangente a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = 16$ y a la recta $\mathscr{L}: x = 8$?

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica $\overline{OP} = \overline{OT} + \overline{TP}$

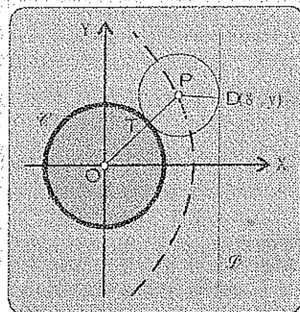


FIGURA 6.33

Pero : $\overline{TP} = \overline{PD}$ (radios de la circunferencia móvil)

$$\Rightarrow \overline{OP} = \overline{OT} + \overline{PD}$$

2. La expresión analítica de esta propiedad es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4 + (8 - x) = 12 - x$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros y simplifi-

cando obtenemos la ecuación del lugar geométrico.

$$y^2 = -24(x-6)$$ ■

21 Qué lugar geométrico describe un móvil M que equidista de una circunferencia fija y de un diámetro de la misma? La circunferencia fija es $\mathscr{C}: x^2+y^2=36$, y el diámetro fijo, la recta $x = 0$

Solución. 1. Sea M(x, y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad

$$TM = |\overline{PM}|$$

Dado que: $\overline{TM} = \overline{OM} - \overline{OT} \Rightarrow \overline{OM} - \overline{OT} = |\overline{PM}|$

2. Expresión analítica : $\sqrt{x^2+y^2} - 6 = \pm x$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 6 \pm x$$

3. Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando obtenemos la ecuación del lugar geométrico

$$\mathscr{P}_1: y^2 = 12(x+3) \vee \mathscr{P}_2: y^2 = -12(x-3)$$ ■

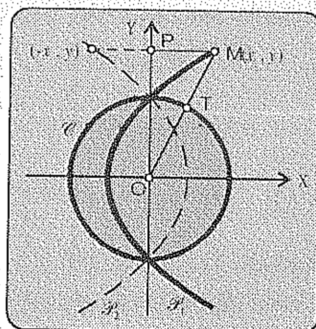


FIGURA 6.34

22 Hallar las tangentes comunes a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2+y^2+10x-20=0$ y a la parábola $\mathscr{P}: y^2 = 20x$

Solución. Si $\mathscr{C}: (x+5)^2+(y-0)^2 = 45 \Rightarrow C(-5, 0)$ y $r = 3\sqrt{5}$

Ecuación de las tangentes buscadas : $y = mx + b$ (1)

Sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene

$$(mx+b)^2 = 20x \Rightarrow m^2x^2 + 2(bm-10)x + b^2 = 0$$

Por condición de tangencia : $4(bm-10)^2 - 4m^2b^2 = 0 \Rightarrow bm = 5$ (2)

Si $\mathscr{L}: mx - y + b = 0 \Rightarrow |d(C, \mathscr{L})| = r \Rightarrow \dfrac{|-5m+b|}{\sqrt{m^2+1}} = 3\sqrt{5}$

de donde obtenemos : $20m^2 + 10bm + 45 - b^2 = 0$ (3)

Sustituyendo el valor de (2) en (3) se tiene : $20m^2 + 50 + 45 - \dfrac{25}{m^2} = 0$

$$\Rightarrow 4m^4 + 19m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1/4 \vee m^2 = -5$$

Para $m^2 = 1/4 \Leftrightarrow m = \pm 1/2$, sustituyendo en (2) : $b = \pm 10$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathscr{L}_1: x - 2y + 20 = 0 \vee \mathscr{L}_2: x + 2y + 20 = 0$$ ■

23 Determinar los vértices del cuadrado inscrito a las parábolas $\mathscr{P}_1 : x^2 + 6y - 39 = 0$ y $\mathscr{P}_2 : 4x^2 - 9y - 45 = 0$. Se piden solamente los vértices interiores y el lado del cuadrado.

Solución. Si $\mathscr{P}_1 : (x - 0)^2 = -6(y - 13/2)$ y $\mathscr{P}_2 : (x - 0)^2 = \frac{9}{4}(y + 5)$

para el cuadrado inscrito ABCD se necesita que :

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$$

Como las ordenadas de C y D son negativas

$\Rightarrow \overline{BC}$ = ordenada de $\mathscr{P}_1$ + (- ordenada de $\mathscr{P}_2$)

$$\Rightarrow \overline{BC} = y_1 - y_2 = \frac{39 - x^2}{6} - \frac{4x^2 - 45}{9}$$

$$\text{Si } \overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow 2x = \frac{39 - x^2}{6} - \frac{4x^2 - 45}{9}$$

de donde: $11x^2 + 36x - 207 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -69/11$

El valor de $x = 3$ determina B y C, y sus respectivos simétricos A y D.

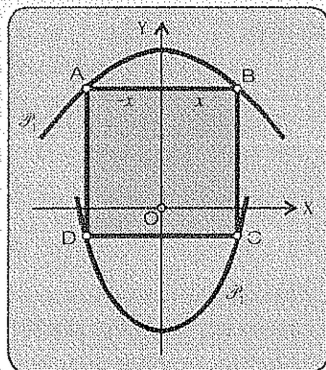


FIGURA 6.35

$$\text{Si } x = 3 \Rightarrow y_1 = \frac{39 - 9}{6} = 5 \;,\; y_2 = \frac{36 - 45}{9} = -1$$

Por tanto : A(-3 , 5) , B(3 , 5) , C(3 , -1) y D(-3 , -1)

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| = 6$$ ■

Capítulo 7

LA ELIPSE

7.1 DEFINICION

Una elipse es el conjunto de puntos sobre un plano colocados de tal manera que la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos* de la elipse.

ELEMENTOS DE UNA ELIPSE

$\overline{V_1V_2}$ = Eje mayor = $2a$

$\overline{B_1B_2}$ = Eje menor = $2b$

$\overline{F_1F_2}$ = Eje focal = $2c$

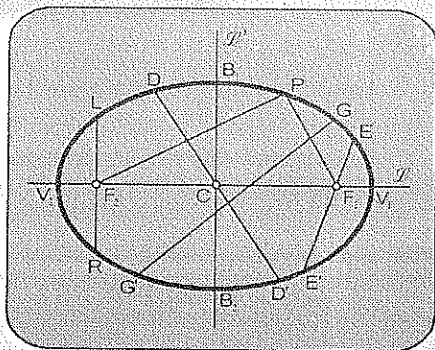


FIGURA 7.1

La recta $\mathscr{L}$ que pasa por los focos se llama *eje focal*. Los puntos V_1 y V_2 se llaman *vértices* de la elipse. El punto C del eje focal, se llama *centro*. La recta $\mathscr{L}' \perp \mathscr{L}$ se llama *eje normal*. Los puntos B_1 y B_2 son los extremos del eje menor.

El segmento que une dos puntos diferentes, tal como $\overline{GG'}$, se llama *cuerda*. La cuerda que pasa por uno de los focos, tal como $\overline{EE'}$, se llama *cuerda focal*. La cuerda focal perpendicular al eje focal se llama *lado recto* ($\overline{LR}$). La cuerda que pasa por el centro de la elipse, tal como $\overline{DD'}$, se llama *diámetro*. Los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ se llaman r*adios vectores* de P.

7.2 ECUACION DE LA ELIPSE DE CENTRO EL ORIGEN Y EJES DE COORDENADAS LOS EJES DE LA ELIPSE

TEOREMA 7.1 La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a $2c$ y cantidad constante igual a $2a$ es :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean $(0, c)$ y $(0, -c)$, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (2)$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor, y a, b y c están ligados por la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$ y la excentricidad e está dada por la fórmula : $e = c/a$, $e < 1$

Nota. Las ecuaciones (1) y (2) se llaman , generalmente , *primera ecuación ordinaria de la elipse* y son conocidas como las formas *canónicas* de la ecuación de una elipse.

EJERCICIOS . *Grupo 27*

En cada uno de los ejercicios del 6 al 9 , hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de los lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar el lugar geométrico.

6 $9x^2 + 4x^2 = 36$

Solución. Dividiendo cada término entre 36 obtenemos

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ . Elipse de la forma (2)}$$

Entonces : $a = 3$ y $b = 2$; $c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

a) Vértices : $V(0, \pm a) \Rightarrow V_1(0, 3)$, $V_2(0, -3)$

b) Focos : $F(0, \pm c) \Rightarrow F_1(0, \sqrt{5})$, $F_2(0, -\sqrt{5})$

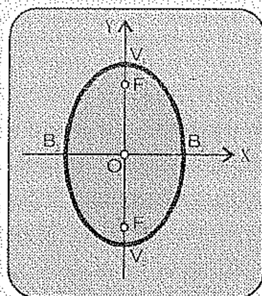


FIGURA7.2

c) Eje mayor : $2a = 6$. Eje menor : $2b = 4$

d) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{5}/3$, $(e < 1)$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = \dfrac{2b^2}{a} \Rightarrow LR = \dfrac{8}{3}$ ■

7 $4x^2 + 9y^2 = 36$

Solución. Dividiendo cada término entre 36, se tiene :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ . Elipse de la forma } \mathbf{(1)}$$

Luego : $a = 3$, $b = 2$; $c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

a) Vértices : $V(\pm a , 0) \Rightarrow V_1(3 , 0)$, $V_2(-3 , 0)$

b) Focos : $F(\pm c , 0) \Rightarrow F_1(\sqrt{5} , 0)$, $F_2(-\sqrt{5} , 0)$

c) Eje mayor : $2a = 6$. Eje menor : $2b = 4$

d) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{5}/3$, $(e < 1)$

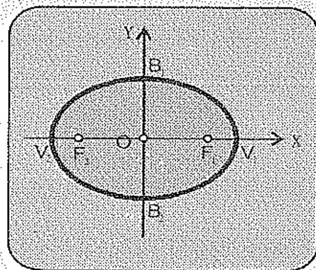


FIGURA 7.3

e) Longitud de cada lado recto : $LR = \dfrac{2b^2}{a} \Rightarrow LR = \dfrac{8}{3}$ ■

8 $16x^2 + 25y^2 = 400$

Solución. Dividiendo cada término entre 400 se tiene :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ . Elipse de la forma } \mathbf{(1)}$$

Luego : $a = 5$, $b = 4$; $c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

a) Vértices : $V(\pm a , 0) \Rightarrow V_1(5 , 0)$, $V_2(-5 , 0)$

b) Focos : $F(\pm c , 0) \Rightarrow F_1(3 , 0)$, $F_2(-3 , 0)$

c) Eje mayor : $2a = 10$. Eje menor : $2b = 8$

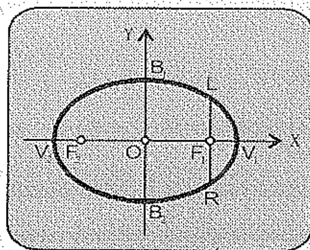


FIGURA 7.4

d) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = 3/5$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a \Rightarrow LR = 32/5$ ■

10 Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (4 , 0) y (-4 , 0) , y cuyos focos son los puntos (3 , 0) y (-3 , 0).

Solución. Estando los vértices y focos sobre el eje X, la ecuación de la elipse es de la forma :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Dado que $a = 4$ y $c = 3$, de la relación $c^2 = a^2 - b^2$, se sigue que :

$$9 = 16 - b^2 \Rightarrow b^2 = 7$$

Por tanto, en (1), se tiene : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ ■

11 Los vértices de una elipse con los puntos $(0, \pm 6)$, y sus focos son los puntos $(0, \pm 4)$. Hallar su ecuación.

Solución. Como los vértices y focos están sobre el eje Y, la ecuación de la elipse es de la forma :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (1)$$

Si $a = 6$ y $c = 4$, de la relación $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene : $16 = 36 - b^2 \Rightarrow b^2 = 20$

Luego, en (1), la ecuación de la elipse es : $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$ ■

12 Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(\pm 2, 0)$, y su excentricidad es igual a 2/3.

Solución. Estando los focos sobre el eje X, la ecuación de la elipse es de la forma :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Si $c = 2$ y $e = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, de donde $a = 3$

De la relación $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene : $4 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 5$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ■

13 Los focos de una elipse son los puntos $(\pm 3, 0)$, y la longitud de cada uno de sus lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la elipse.

Solución. Como los focos están sobre el eje X, la ecuación de la elipse es de la forma :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Si $c = 3$ y $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9 \qquad (2)$

$\text{LR} = \dfrac{2b^2}{a} \Rightarrow 9 = \dfrac{2b^2}{a} \Rightarrow 2b^2 = 9a$ (3)

La solución común de (2) y (3) es : $a = 6$ y $b = 3\sqrt{3}$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es : $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$ ■

14 Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices es el punto (0 , -7) y pasa por P($\sqrt{5}$, 14/3).

Solución. Estando uno de los vértices de la elipse sobre el eje Y, su ecuación es de la forma : $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (1)

Si $V_2(0, -7) \Rightarrow a = 7$, y si $P(\sqrt{5}, 14/3) \in \mathscr{E} \Rightarrow \dfrac{5}{b^2} + \dfrac{196/9}{49} = 1$

de donde obtenemos : $b = 3$

Por tanto, en (1), se tiene , $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{49} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 9 = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}$. Luego : $e = 2\sqrt{10}/7$ ■

15 Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos P($\sqrt{6}$, -1) y Q(2 , $\sqrt{2}$).

Solución. Forma típica de la ecuación. $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

Si $P(\sqrt{6}, -1) \in \mathscr{E} \Rightarrow \dfrac{6}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$ (2)

$Q(2, \sqrt{2}) \in \mathscr{E} \Rightarrow \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{2}{b^2} = 1$ (3)

Resolviendo (2) y (3) obtenemos : $a^2 = 8$ y $b^2 = 4$

Por tanto , en (1) se tiene : $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ ■

16 Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto P($\sqrt{7}/2$, 3), tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

Solución. La forma típica de la ecuación es , $\mathscr{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (1)

Si $P(\sqrt{7}/2, 3) \in \mathscr{E} \Rightarrow \frac{7}{4a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$, y si $a = 2b$, resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos : $a = 4$ y $b = 2$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es , $\mathscr{E}: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ ■

17 Demostrar que la longitud del eje menor de una elipse es media proporcional entre las longitudes de su eje mayor y su lado recto.

Demostración. Probaremos que : $(2b)^2 = (2a)\,(\overline{LR})$

En efecto, sea la elipse , $\mathscr{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

cuyo lado recto mide : $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 4b^2 = (2a)\,\overline{LR}$

$\Rightarrow (2b)^2 = (2a)\,(\overline{LR})$ ■

18 Demostrar que la longitud del semieje menor de una elipse es media proporcional entre los dos segmentos del eje mayor determinado por uno de los dos focos.

Demostración. En efecto, sea la elipse $\mathscr{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Refiriéndonos a la Figura 7.5 vemos que : $\overline{V_2F_1} = \overline{V_2O} + \overline{OF_1} = a + c$

$\overline{F_1V_1} = \overline{OV_1} - \overline{OF_1} = a - c$

De la relación : $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$\Rightarrow b^2 = (a + c)\,(a - c)$

$\therefore\ (\overline{OB_1})^2 = (\overline{V_2F_1})(\overline{F_1V_1})$ ■

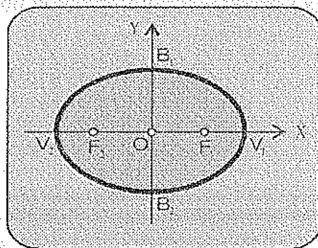


FIGURA 7.5

19 Demostrar que si dos elipses tienen la misma excentricidad, las longitudes de sus semiejes mayor y menor son proporcionales.

Demostración. En efecto, sean las elipses de excentricidad

$$e_1 = \frac{c_1}{a_1} \text{ y } e_2 = \frac{c_2}{a_2} \text{ . Si } e_1 = e_2 \Rightarrow \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene : $\left(\frac{c_1}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{c_2}{a_2}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{(a_1)^2 - (b_1)^2}{(a_1)^2} = \frac{(a_2)^2 - (b_2)^2}{(a_2)^2} \Rightarrow 1 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$ ■

20 Si $P_1(x_1 , y_1)$ es un punto cualquiera de la elipse $\mathscr{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que sus radios vectores son $a + ex_1$ y $a - ex_1$. Establecer el significado de la suma de estas longitudes.

Demostración. En efecto, si los focos de la elipse tienen por coordenadas $F_1(c , 0)$ y $F_2(-c_2 , 0)$ por el teorema de la distancia

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2} \quad (1)$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2} \quad (2)$$

Si $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{E} \Rightarrow b_2(x_1)^2 + a_2(y_1)^2 = a^2b^2$

$$\Rightarrow (y_1)^2 = \frac{a^2b^2 - b^2(x_1)^2}{a^2} \quad (3)$$

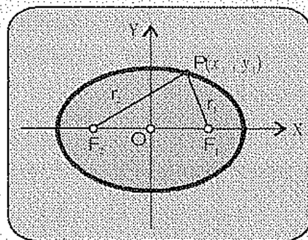


FIGURA 7.6

Sustituyendo el valor de (3) en (1) se tiene :

$$r_1 = \sqrt{(x_1)^2 - 2cx_1 + c^2 + \frac{a^2b^2 - b^2(x_1)^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2) - 2a^2cx_1 + (a^2 - b^2)(x_1)^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot a^2 - 2a^2cx_1 + c^2(x_1)^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 - 2aex_1 + e^2(x_1)^2} = \sqrt{(a - ex_1)^2}$$

de donde : $r_1 = |a - ex_1|$

Como $e < 1 \Rightarrow a - ex_1 > 0 , \ \forall x_1 \in \langle -a , a\rangle \Rightarrow r_1 = a - ex_1$

Análogamente, sustituyendo (3) en (2) obtenemos : $r_2 = a + ex_1$

Sumando ambos resultados se tiene : $r_1 + r_2 = 2a$, cuyo significado es el siguiente : *La suma de las distancias de un punto cualquiera de una elipse es igual a la longitud del eje mayor.* ■

21 Hallar los radios vectores del punto P(3 , 7/4) que está sobre la elipse $\mathscr{E}: 7x^2 + 16y^2 = 112$

Solución. Si $\mathscr{E}: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \Rightarrow a = 4$ y $b = \sqrt{7}$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9 \Rightarrow c = 3 \text{ . Luego : } e = c/a = 3/4$$

Ahora, haciendo uso de las fórmulas obtenidas en el Ejercicio 20 se tiene :

$$r_1 = a - ex_1 = 4 - (3/4)(3) = 7/4$$
$$r_2 = a + ex_1 = 4 + (3/4)(3) = 25/4$$ ■

22 Los puntos extremos de un diámetro de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ son P_1 y P_2. Si F es uno de los focos de la elipse, demostrar que la suma de los radios vectores $\overline{FP_1}$ y $\overline{FP_2}$ es igual a la longitud del eje mayor.

Demostración. En efecto, refiriéndonos a la gráfica de la elipse, mostrada en la Figura 7.7 , y a la fórmula hallada en el Ejercicio 20, tenemos :

Para el punto P_1 : $\overline{FP_1} = a - ex_1$

y para el punto P_2 : $\overline{FP_2} = a - ex_2$

$$\Rightarrow \overline{FP_1} + \overline{FP_2} = 2a - e(x_1 + x_2) \qquad (1)$$

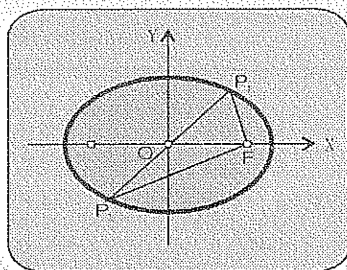


FIGURA 7.7

Pero, por simetría de la elipse respecto del origen , $x_1 = -x_2$; por lo que , en (1) , se tiene : $\overline{FP_1} + \overline{FP_2} = 2a$ ■

23 Si k es un número positivo, demostrar que la ecuación $\mathscr{E}: 3x^2 + 4y^2 = k$ representa una familia de elipses cada una de las cuales tiene excentricidad 1/2.

Demostración. En efecto , si $\mathscr{E}: \frac{x^2}{k/3} + \frac{y^2}{k/4} = 1 \Rightarrow a^2 = k/3$ y $b^2 = k/4$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = k/12$$

Si $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{k/12}{k/3} = \frac{1}{4} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$ ■

En cada uno de los ejercicios del 24 al 26 usando la definición de elipse, hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos dados. Redúzcase la ecuación a la primera forma ordinaria por traslación de coordenadas.

24 Focos : $F_1(3 , 8)$ y $F_2(3 , 2)$; longitud del eje mayor = 10

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto cualquiera de la elipse que debe cumplir la

condición geométrica : $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$

2. Por el teorema de la distancia esta condición queda expresada analíticamente por : $\sqrt{(x-3)^2+(y-8)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 10$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-8)^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando términos se tiene :

$$5\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13} = 3y+10$$

Elevando nuevamente al cuadrado, la ecuación se reduce a

$$25x^2+16y^2-150x-160y+225 = 0$$

Reduciendo a la forma canónica, por el método de completar cuadrados, obtenemos

$$25(x-3)^2+16(y-5)^2 = 400$$

Por las ecuaciones de traslación : $x-3=x'$, $y-5=y'$, resulta la ecuación transformada : $25(x')^2+16(y')^2 = 400$ ■

25 Vértices : $V_1(5,-1)$, $V_2(-3,-1)$; excentricidad = 3/4

Solución. Si $2a = |\overline{V_1V_2}| \Rightarrow 2a = |5-(-3)| = 8$; $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \left(\frac{3}{4}\right)4 = 3$

Coordenadas del centro de la elipse : $C\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) \Rightarrow C(1,-1)$

Coordenadas de los focos : $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(4,-1)$ y $F_2(-2,-1)$

1. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la elipse que satisface la condición geométrica : $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$
2. La expresión analítica de esta condición es

$$\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} = 8$$

3. Procedimiento como en el Ejercicio 24 obtenemos la ecuación de la elipse

$$7x^2+16y^2-14x+32y-89 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{E}: 7(x-1)^2+16(y+1)^2 = 112$$

Haciendo uso de las ecuaciones de traslación $x-1=x'$, $y+1=y'$, se tiene la transformada : $7(x')^2+16(y')^2 = 112$ ■

26 Vértices : $V_1(2,6)$, $V_2(2,-2)$; longitud del lado recto = 2

Solución. Si $2a = |\overline{V_1V_2}| = |6-(-2)| = 8 \Rightarrow a=4$; $LR = 2 \Rightarrow \frac{2b^2}{a} = 2 \Leftrightarrow b=2$

$$c^2 = a^2-b^2 = 16-4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

Coordenadas del centro de la elipse : $C\left(\frac{2+2}{2}, \frac{6-2}{2}\right) \Rightarrow C(2, 2)$

Coordenadas de los focos : $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(2, 2+2\sqrt{3}), F_2(2, 2-2\sqrt{3})$.

1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$
2. Por el teorema de la distancia, la expresión analítica de esta propiedad es
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2-2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-2+2\sqrt{3})^2} = 8$$
3. Efectuando las operaciones indicadas en el Ejercicio 24 resulta la ecuación de la elipse : $4x^2+y^2-16x-4y+4=0 \Leftrightarrow \mathscr{E}: 4(x-2)^2+(y-2)^2 = 16$

   Haciendo $x-2 = x'$, $y-2 = y'$, obtenemos finalmente la transformada
$$\mathscr{E}: 4(x')^2 + (y')^2 = 16$$
■

27 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia de la recta $\mathscr{L}: y = -8$ es siempre igual al doble de su distancia del punto A(0 , -2)

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica : $|d(P, \mathscr{L})| = 2|\overline{AP}|$

2. La expresión analítica de esta condición es : $|y+8| = 2\sqrt{x^2+(y+2)^2}$
3. Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando, resulta la ecuación :
$$4x^2+3y^2 = 48$$
   El lugar geométrico obtenido es una elipse. ■

28 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de los puntos de la circunferencia $\mathscr{C}: x^2+y^2=9$

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que en cualquier posición se debe verificar
$$|\overline{AP}| = |\overline{PB}|$$

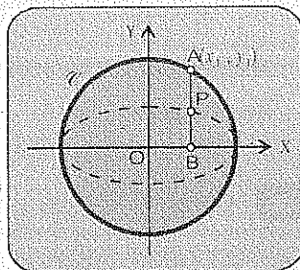


FIGURA 7.8

2. Refiriéndonos a la Figura 7.8, la expresión analítica de esta condición es : $x = x_1 \Leftrightarrow x_1 = x$
$$y = \frac{1}{2}(0+y_1) \Leftrightarrow y_1 = 2y$$
3. Como $A(x_1, y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow (x_1)^2+(y_1)^2 = 9$
$$\Rightarrow (x)^2+(2y)^2 = 9$$
   de donde obtenemos , $\mathscr{E}: x^2+4y^2 = 9$. El lugar geométrico es una elipse. ■

29 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que dividen a las ordenadas de los puntos de la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = 16$ en la razón 1 : 4. (Dos soluciones.)

Solución.

***Caso* 1.** 1. Sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición : $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{4}$

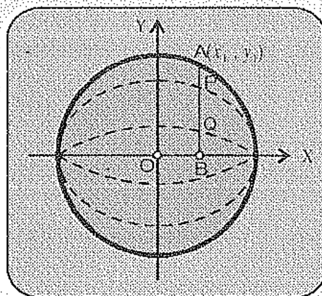


FIGURA 7.9

2. La expresión analítica de esta condición es

$$x_1 = x \ , \ \frac{y - y_1}{0 - y_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{4}{3}y$$

3. Como $A(x_1 , y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow (x_1)^2 + (y_1)^2 = 16$

$$\Rightarrow (x)^2 + \left(\frac{4}{3}y\right)^2 = 16$$

De donde obtenemos : $9x^2 + 16y^2 = 144$

***Caso* 2.** 1. Sea $Q(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BA}} = \dfrac{1}{4}$

2. Análogamente, la expresión analítica de esta condición es :

$$x_1 = x \ , \ y_1 = 4y$$

3. Como $A(x_1 , y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow (x_1)^2 + (y_1)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 16y^2 = 16$

En ambos casos el lugar geométrico es una elipse. ■

7.3 ECUACION DE UNA ELIPSE DE CENTRO (h , k) Y EJES PARALELOS A LOS COORDENADOS

TEOREMA 7.2 La ecuación de la elipse de centro el punto (h , k) y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1 \qquad (2)$$

Descripción de los elementos de una elipse

(1)

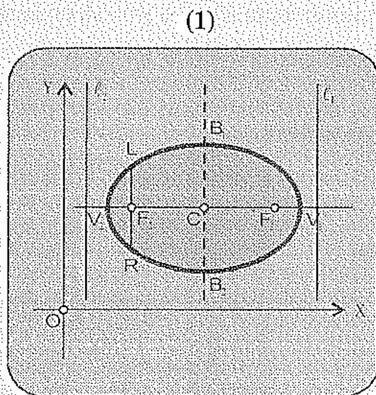


FIGURA7.10

(2)

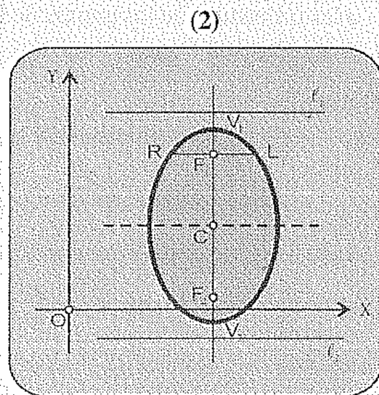


FIGURA 7.11

FORMA (1)

a) Vértices : $V_1(h + a , k)$, $V_2(h - a , k)$
b) Focos : $F_1(h + c , k)$, $F_2(h - c , k)$
c) Extremos del eje menor
$B_1(h , k + b)$, $B_2(h , k - b)$
d) Lado recto : $LR = 2b^2/a$
e) Excentricidad : $e = c/a$
f) Directrices : $x = h \pm a^2/c$

FORMA (2)

a) Vértices : $V_1(h , k + a)$, $V_2(h , k - a)$
b) Focos : $F_1(h , k + c)$, $F_2(h , k - c)$
c) Extremos del eje menor
$B_1(h + b , k)$, $B_2(h - b , k)$
d) Lado recto : $LR = 2b^2/a$
e) Excentricidad : $e = c/a$
f) Directrices : $y = k \pm a^2/c$

7.4 ECUACION GENERAL DE LA ELIPSE

TEOREMA 7.3 Si los coeficientes A y C son el mismo signo, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados, o bien un punto, o un conjunto vacío.

EJERCICIOS . *Grupo 28*

6 Los vértices de una elipse son los puntos $V_1(7 , 1)$ y $V_2(1 , 1)$ y su excentricidad

es 1/3. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

Solución. Como los vértices tienen la misma ordenada, se sigue (Figura 7.10) que el eje focal de la elipse es paralelo al eje X, y su ecuación, por el Teorema 7.2,

es de la forma $\mathscr{E}: \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (1)

Si $2a = |\overline{V_1V_2}| = |7-1| = 6 \Rightarrow a = 3$, y si $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow c = 1$

De la relación , $c^2 = a^2 - b^2$, obtenemos : $b^2 = 8$

El centro es punto medio de $\overline{V_1V_2}$, entonces sus coordenadas son C(4 , 1)

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es , $\mathscr{E}: \dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$

Coordenadas de los focos : $F(h \pm c , k) \Rightarrow F_1(5 , 1)$ y $F_2(3 , 1)$

Longitudes de los ejes mayor y menor : $2a = 6$ y $2b = 4\sqrt{2}$

Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a \Rightarrow LR = 16/3$ ■

7 Los focos de una elipse son los puntos $F_1(-4 , -2)$ y $F_2(-4 , -6)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.

Solución. Como los focos tienen la misma abscisa, el eje focal de la elipse es paralelo al eje Y (Figura 7.11), y su ecuación es de la forma

$$\mathscr{E}: \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad (1)$$

Si $2c = |\overline{F_1F_2}| = |-6-(-2)| = 4 \Rightarrow c = 2$, y si $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4$ (2)

La longitud de cada lado recto es : $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a} \Rightarrow 6 = \dfrac{2b^2}{a} \Leftrightarrow b^2 = 3a$ (3)

La solución común de (2) y (3) es : $a = 4$ y $b = 2\sqrt{3}$

El centro es punto medio del segmento $\overline{F_1F_2} \Rightarrow C(-4 , -4)$

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es , $\mathscr{E}: \dfrac{(x+4)^2}{12} + \dfrac{(y+4)^2}{16} = 1$

y su excentricidad es : $e = c/a = 1/2$ ■

8 Los vértices de una elipse son los puntos $V_1(9 , -6)$ y $V_2(1 , -6)$ y la longitud de cada lado recto es 9/2. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus

focos y su excentricidad.

Solución. Como los vértices tienen la misma ordenada, se sigue que el eje focal es paralelo al eje X. Por tanto, la ecuación de la elipse, es de la forma

$$\mathscr{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Si $2a = |\overline{V_1V_2}| = |9-1| = 8 \Rightarrow a = 4$ y si $LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{2b^2}{4} \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$. El centro biseca al segmento $\overline{V_1V_2} \Rightarrow C(5, -6)$

Luego, en (1), la ecuación de la elipse es , $\mathscr{E}: \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$

Coordenadas de los focos : $F(h \pm c, k) \Rightarrow F(5 \pm \sqrt{7}, -6)$. Excentricidad : $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ■

9 Los focos de una elipse son los puntos $F_1(3, 8)$, $F_2(3, 2)$ y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

Solución. Como los focos están sobre una línea vertical, la ecuación de la elipse es de la forma ,

$$\mathscr{E}: \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad (1)$$

Si $2c = |\overline{F_1F_2}| = |2-8| = 6 \Rightarrow c = 3$, $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = a^2 - 16 \Rightarrow a = 5$. Coordenadas del centro : $C(3, 5)$

Luego, en (1), la ecuación de la elipse es , $\mathscr{E}: \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

Coordenadas de los vértices : $V(h, k \pm a) \Rightarrow V_1(3, 10)$ y $V_2(3, 0)$

Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = 3/5$ ■

10 El centro de una elipse es el punto $C(-2, -1)$ y uno de sus vértices es el punto $V(3, -1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

Solución. Como el centro C y el vértice V están sobre el eje focal y sus ordenadas son iguales, la ecuación de la elipse es de forma $\mathscr{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (1)

Además, $a = |\overline{CV}| = |3-(-2)| = 5$ y si LR $= \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 4 = \frac{2b^2}{5} \Leftrightarrow b^2 = 10$

Luego, en (1), la ecuación de la elipse es: $\mathscr{E}: \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{10} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 10 = 15 \Rightarrow c = \sqrt{15}$. Excentricidad : $e = c/a = \sqrt{15}/5$

Coordenadas de los focos : $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(-2+\sqrt{15}, -1)$ y $F_2(-2-\sqrt{15}, -1)$ ■

11 El centro de una elipse es el punto C(2 , -4) y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos (-2 , -4) y (-1 , -4), respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

Solución. Forma de la ecuación de la elipse , $\mathscr{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (1)

Si $c = |\overline{FC}| \Rightarrow c = |2-(-1)| = 3$, y si $a = |\overline{CV}| \Rightarrow a = |2-(-2)| = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 16 - b^2 \Rightarrow b^2 = 7$

Luego, en (1), la ecuación de la elipse es , $\mathscr{E}: \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$

Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = 3/4$; $2b = 2\sqrt{7}$; LR $= 2b^2/a = 7/2$ ■

12 Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando A y C son ambos positivos y D = E = 0

Solución. Si D = E = 0 , la ecuación se reduce a la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{-F/A} + \frac{y^2}{-F/C} = 1 \quad (1)$$

1. Si F > 0 , la ecuación (1) representa un conjunto vacío.
2. Si F < 0 , la ecuación (1) representa una elipse en su forma canónica, y en la que se puede considerar los siguientes casos :

a) $-\frac{F}{A} > -\frac{F}{C}$, la elipse tiene su eje focal coincidente con el eje X.

b) $-\frac{F}{A} < -\frac{F}{C}$, la elipse tiene su eje focal coincidente con el eje Y. ■

En cada uno de los ejercicios del 13 al 16, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

13 $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

Solución. Efectuamos la reducción completando cuadrados

$$(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = -21 + 9 + 16 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

de donde obtenemos : h = 3 , k = -2 , $a = 2$ y $b = 1$; $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

a) Coordenadas del centro : C(h , k) $\Rightarrow$ C(3 , -2)

b) Coordenadas de los vértices : V(h $\pm a$, k) $\Rightarrow$ $V_1(5, -2)$, $V_2(1, -2)$

c) Coordenadas de los focos : F(h $\pm c$, k) $\Rightarrow$ $F_1(3+\sqrt{3}, -2)$, $F_2(3-\sqrt{3}, -2)$

d) Longitudes de los ejes mayor y menor : $2a = 4$, $2b = 2$

e) Longitud de cada lado recto : LR = $2b^2/a$ $\Rightarrow$ LR = 1

f) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{3}/2$ 

14 $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

Solución. Completando cuadrados se tiene :

$$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 2y + 1) = -37 + 64 + 9 = 36 \Leftrightarrow \frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

de donde obtenemos : h = - 4 , k = 1 , $a = 3$, $b = 2$, $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

a) Coordenadas del centro : C(h , k) $\Rightarrow$ C(-4 , 1)

b) Coordenadas de los vértices : V(h $\pm a$, k) $\Rightarrow$ $V_1(-1, 1)$, $V_2(-7, 1)$

c) Coordenadas de los focos : F(h + c , k) $\Rightarrow$ $F_1(-4+\sqrt{5}, 1)$, $F_2(-4-\sqrt{5}, 1)$

d) Longitudes de los ejes mayor y menor : $2a = 6$, $2b = 4$

e) Longitud de cada lado recto : LR = $2b^2/a$ = 8/3

f) Excentricidad : $e = c/a = \sqrt{5}/3$ 

15 $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0$

Solución. Reduciendo la ecuación a su forma ordinaria se tiene :

$$(x^2 - 10x + 25) + 4(y^2 - 10y + 25) = 109 + 25 + 100 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

de donde : h = 5 , k = 5 , $a = 4$, $b = 2$, $c^2 = a^2 - b^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

a) Coordenadas del centro : C(h , k) $\Rightarrow$ C(5 , 5)

b) Coordenadas de los vértices : $V(h \pm a, k) \Rightarrow V_1(9, 5)$, $V_2(1, 5)$

c) Coordenadas de los focos : $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(5 + 2\sqrt{3}, 5)$, $F_2(5 - 2\sqrt{5}, 5)$

d) Longitudes de los ejes mayor y menor : $2a = 8$, $2b = 4$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a \Rightarrow LR = 2$

f) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{3}/2$



16 $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

Solución. Reduciendo la ecuación a su forma ordinaria se tiene :

$$9(x-0)^2 + 4(y^2 - 2y + 1) = 32 + 4 = 36 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

de donde : h = 0 , k = 1 , $a = 3$, $b = 2$; $c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

a) Coordenadas del centro : C(h , k) $\Rightarrow$ C(0 , 1)

b) Coordenadas de los vértices : $V(h, k \pm a) \Rightarrow V_1(0, 4)$, $V_2(0, -2)$

c) Coordenadas de los focos : $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(0, 1 + \sqrt{5})$, $F_2(0, 1 - \sqrt{5})$

d) Longitudes de los ejes mayor y menor : $2a = 6$, $2b = 4$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a = 8/3$

f) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{5}/3$ 

18 Resolver el Ejercicio 16 por traslación de ejes coordenados.

El ejercicio se deja a cargo del lector.

19 Si el centro de una elipse no está en el origen, y sus ejes son paralelos a los coordenados, demuéstrese que la ecuación de la elipse puede estar completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

Demostración. En efecto, sea la ecuación general de la elipse

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

Como se puede observar, la ecuación (1) queda determinada si se conocen las cinco constantes A, B, C, D , E y F.

Sin embargo, se dividimos cada término de (1) entre el coeficiente de x^2 , se tiene :

$$x^2 + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

y si designamos por : $\frac{C}{A} = C'$, $\frac{D}{A} = D'$, $\frac{E}{A} = E'$ y $\frac{F}{A} = F'$

la ecuación general se transforma en :

$$x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Ecuación que queda perfectamente determinada si se conocen las coordenadas de cuatro de sus puntos. ■

20 Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $P_1(1 , 3)$, $P_2(-1 , 4)$, $P_3(0 , 3 - \sqrt{3}/2)$ y $P_4(-3 , 3)$.

Solución. Sea la elipse $\mathscr{E} : x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si $P_1(1 , 3) \in \mathscr{E} \Rightarrow 1 + 9C + D + 3E + F = 0 \qquad (1)$

$P_2(-1 , 4) \in \mathscr{E} \Rightarrow 1 + 16C - D + 4E + F = 0 \qquad (2)$

$P_3(0 , 3 - \sqrt{3}/2) \in \mathscr{E} \Rightarrow (39/4 - 3\sqrt{3})C + (3 - \sqrt{3}/2)E + F = 0 \qquad (3)$

$P_4(-3 , 3) \in \mathscr{E} \Rightarrow 9 + 9C - 3D + 3E + F = 0 \qquad (4)$

Restando (4) - (1) se tiene : $8 - 4D = 0 \Leftrightarrow D = 2$

Restando (2) - (1) obtenemos : $7C - 2D + E = 0 \Rightarrow 7C + E = 4 \qquad (5)$

Sustituyendo D = 2 en (1) nos queda : $9C + 3E + F = -3 \qquad (6)$

Restando (3) - (6) resulta : $3C - 12\sqrt{3}\,C - 2\sqrt{3}\,E = 12 \qquad (7)$

La solución común de (5) y (7) es : $C = 4$ y $E = -24$

Sustituyendo los valores obtenidos en (1) se tiene : $F = 33$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es ; $\mathscr{E} : x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$ ■

21 Hallar la ecuación de la familia de elipses que tiene un centro común (2 , 3), un eje focal paralelo al eje X, y la misma excentricidad igual a 1/2. Dibujar tres elementos de la familia asignando tres valores diferentes al parámetro.

Solución. La ecuación de la familia de elipses es

$$\mathscr{E}: \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

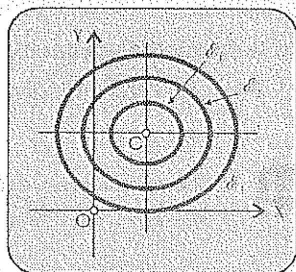


FIGURA 7.12

Si $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c \Rightarrow a^2 = 4c^2 = 4(a^2 - b^2)$

de donde obtenemos : $a^2 = \frac{4}{3} b^2$

Sustituyendo este valor en (1) se tiene

$$\mathscr{E}: 3(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 4b^2$$

Si $b = 1 \Rightarrow \mathscr{E}_1 : 3(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 4$

$b = 2 \Rightarrow \mathscr{E}_2 : 3(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 16$

$b = 3 \Rightarrow \mathscr{E}_3 : 3(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 36$

Las gráficas de estos tres elementos quedan representadas en la Figura 7.12 ■

22 La ecuación de una familia de elipses es $\mathscr{E}: 4x^2 + 9y^2 + ax + by = 11$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos A(2 , 3) y B(5 , 1)

Solución. Si A(2 , 3) ∈ $\mathscr{E} \Rightarrow 4(2)^2 + 9(3)^2 + a(2) + b(3) = 11 \Rightarrow 2a + 3b = -86$ (1)

B(5 , 1) ∈ $\mathscr{E} \Rightarrow 4(5)^2 + 9(1)^2 + a(5) + b(1) = 11 \Rightarrow 5a + b = -98$ (2)

La solución común de las ecuaciones (1) y (2) es : $a = -16$ y $b = -18$

$$\therefore \ \mathscr{E}: 4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$$ ■

23 La ecuación de una familia de elipses es $\mathscr{E}: \mathrm{k}x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$. Hallar la ecuación de aquellos elementos de la familia que tienen excentricidad 1/2.

Solución. Reduciendo la ecuación de la familia a su forma ordinaria se tiene :

$$\mathrm{k}\left(x + \frac{3}{\mathrm{k}}\right)^2 + 4(y-1)^2 = \frac{9}{\mathrm{k}}(\mathrm{k}+1) \Rightarrow \frac{(x+3/\mathrm{k})^2}{\frac{9}{\mathrm{k}^2}(\mathrm{k}+1)} + \frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4\mathrm{k}}(\mathrm{k}+1)} = 1$$

Si $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{3}{4}a^2$ (1)

Caso 1. Supongamos que : $a^2 = \frac{9}{\mathrm{k}^2}(\mathrm{k}+1)$ y $b^2 = \frac{9}{4\mathrm{k}}(\mathrm{k}+1)$

Entonces, en (1) : $\frac{9}{4\mathrm{k}}(\mathrm{k}+1) = \frac{27}{4\mathrm{k}^2}(\mathrm{k}+1)$, de donde : $\mathrm{k} = 3$

Caso 2. Sea $a^2 = \frac{9}{4\mathrm{k}}(\mathrm{k}+1)$ y $b^2 = \frac{9}{\mathrm{k}^2}(\mathrm{k}+1)$

Luego, en (1) : $\frac{9}{k^2}(k+1) = \frac{27}{4k}(k+1)$, de donde $k = 16/3$

Por tanto, en $\mathscr{E}$, las elipses de excentricidad 1/2 son

$$\mathscr{E}_1 : 3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0 \quad \vee \quad \mathscr{E}_2 : 16x^2 + 12y^2 + 18x - 24y - 15 = 0$$ ■

24 Hallar las longitudes de los radios vectores del punto P(2 , 1) de la elipse $\mathscr{E} : 9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$.

Solución. Si $\mathscr{E} : \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \Rightarrow h = k = 1 \ , \ a = 3 \ , \ b = 1$ y

$$c^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

Coordenadas de los focos : $F(h , k \pm c) \Rightarrow F_1(1 , 1 + 2\sqrt{2})$, $F_2(1 , 1 - 2\sqrt{2})$

Por tanto :

$$r_1 = |PF_1| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1-2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$r_2 = |PF_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1+2\sqrt{2})^2} = 3$$ ■

25 El punto medio de una cuerda de la elipse $\mathscr{E} : x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ es el punto M(5 , 2). Hallar la ecuación de la cuerda.

Solución. Sean $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ los extremos de la cuerda.

Como M(5 , 2) es punto medio de la cuerda $\overline{P_1P_2}$, entonces

$$x_1 + x_2 = 2(5) = 10 \quad , \quad y_1 + y_2 = 2(2) = 4$$

Si $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{E} \Rightarrow (x_1)^2 + 4(y_1)^2 - 6x_1 - 8y_1 - 3 = 0$

$P_2(x_2 , y_2) \in \mathscr{E} \Rightarrow (x_2)^2 + 4(y_1)^2 - 6x_2 - 8y_2 - 3 = 0$

Restando ambas ecuaciones se tiene :

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 4(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - 6(x_1 - x_2) - 8(y_1 - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow 10(x_1 - x_2) + 16(y_1 - y_2) - 6(x_1 - x_2) - 8(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow 2(y_1 - y_2) = -(x_1 - x_2)$$

de donde obtenemos la pendiente de la cuerda : $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m = -\frac{1}{2}$

Por tanto, su ecuación es : $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 5) \Leftrightarrow \mathscr{L} : x + 2y - 9 = 0$ ■

26 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre el doble de su distancia del punto A(3 , 2).

Solución. 1. Sea P(x, y) un punto cualquiera del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|d(\text{P}, \text{Eje Y})| = 2\,|\overline{\text{PA}}|$

2. Por la definición de abscisa y el teorema de la distancia, esta condición queda expresada analíticamente por la ecuación : $x = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$

3. De donde obtenemos : $3x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 52 = 0$
El lugar geométrico es una elipse de centro C(4 , 2) ■

27 Desde un punto de la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje X. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

Solución. Si $\mathscr{C}: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16 \Rightarrow$ C(-2 , -2)

1. Sean A(x_1, y_1) un punto de $\mathscr{C}$ y B$(x_1, -2)$ el pie de la perpendicular al diámetro de $\mathscr{C}$.
Sea P(x, y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición : $|\overline{\text{AP}}| = |\overline{\text{BP}}|$

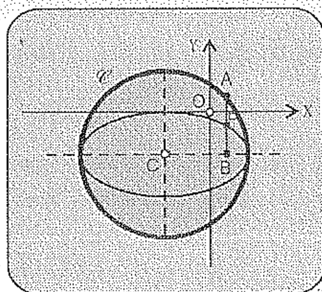


FIGURA 7.13

2. Forma analítica de esta condición :

$$x_1 = x \;,\; y = \frac{y_1 - 2}{2} \Rightarrow y_1 = 2y + 2$$

3. Si A$(x_1, y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow (x_1+2)^2 + (y_1+2)^2 = 16$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (2y+2+2)^2 = 16 \Leftrightarrow (x+2)^2 + 4(y+2)^2 = 16$

El lugar geométrico es una elipse de centro C(-2 , -2) cuya gráfica está representada en la Figura 7.13 ■

28 Desde cada punto de la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, se traza una perpendicular al diámetro paralelo al eje Y. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de estas perpendiculares. Trazar el lugar geométrico.

Solución. Si $\mathscr{C}: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9 \Rightarrow$ C(3 , 1)

1. Sean A(x_1, y_1) un punto de $\mathscr{C}$ y B$(3, y_1)$ el pie de la perpendicular de A sobre el diámetro de $\mathscr{C}$.
Sea P(x, y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición :

$$|\overline{\text{AP}}| = |\overline{\text{BP}}|$$

2. Forma analítica de esta condición

$y_1 = y$, $x = \dfrac{x_1 + 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2x - 3$

3. Si $A(x_1, y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow (x_1 - 3)^2 + (y_1 - 1)^2 = 9$

$\Rightarrow (2x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 4(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$

El lugar geométrico es una elipse de centro C(3 , 2) cuya gráfica se muestra en la Figura 7.14 ■

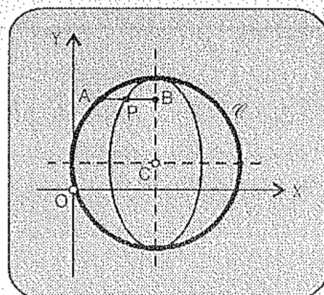


FIGURA7.14

29 La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos (0 , 0) y (6 , 0). Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto que se mueve de tal manera que el producto de las tangentes de los ángulos de las bases es siempre igual a 4.

Solución. 1. Sea $B(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición

$$(\text{Tg}\alpha)(\text{Tg}\beta) = 4$$

2. Por la definición de pendiente, esta condición se expresa analíticamente por la ecuación

$$\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x-1}\right) = 4$$

3. De donde obtenemos : $4x^2 + y^2 - 24x = 0$

El lugar geométrico es una elipse. ■

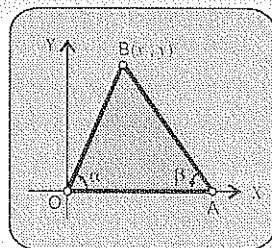


FIGURA 7.15

30 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que se mantiene tangente a las circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 = 1$. (Dos soluciones.)

Solución 1. La circunferencia variable no contiene a $\mathscr{C}_2$

Si $\mathscr{C}_1 : (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 16 \Rightarrow C_1(0, 2)$

1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición : $\overline{C_1T} = \overline{C_1P} + \overline{PT}$

Como $\overline{PT} = \overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} \Rightarrow \overline{C_1T} = \overline{C_1P} + (\overline{OP} - \overline{OA})$

2. La forma analítica de esta expresión es

$$4 = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)$$

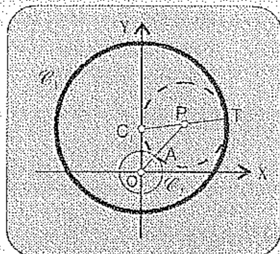


FIGURA 7.16

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 5 - \sqrt{x^2+y^2}$$

De donde obtenemos : $100x^2 + 84y^2 - 168y - 441 = 0$

Solución 2. La circunferencia variable contiene a $\mathscr{C}_2$.

1. Sea P$(x\,,y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición : $\overline{C_1T} = \overline{C_1P} + \overline{PT}$

   Pero $\overline{PT} = \overline{PA} = \overline{PO} + \overline{OA} \Rightarrow \overline{C_1T} = \overline{C_1P} + (\overline{PO} + \overline{OA})$

2. Forma analítica : $4 = \sqrt{x^2+(y-2)^2} + (\sqrt{x^2+y^2} + 1)$

   $$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$$

3. De donde se tiene : $36x^2 + 20y^2 - 40y - 25 = 0$

   En ambos casos la ecuación del L.G. es una elipse. ■

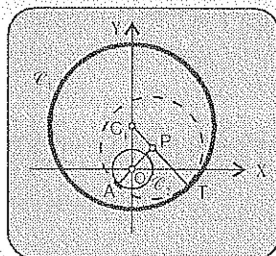


FIGURA 7.17

7.5 ECUACION DE LA TANGENTE A UNA ELIPSE

El procedimiento para hallar la ecuación de la tangente a una elipse es idéntico al usado para la circunferencia y la parábola. Esto es

a) Tangente en un punto dado de la elipse
b) Tangente con una dirección dada
c) Tangente trazada desde un punto exterior a la elipse.

TEOREMA 7.4 La tangente a la elipse $\mathscr{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en cualquier punto $P_1(x_1\,, y_1)$ de la curva, tiene por ecuación

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

Demostración. Sea $P_2(x_1 + h\,, y_1 + k)$ otro punto de la elipse. Entonces , la pendiente de la secante $\overline{P_1P_2}$ es : $m = \dfrac{y_1 + k - y_1}{x_1 + h - x_1} = \dfrac{k}{h}$

Si $P_1(x_1\,, y_1) \in \mathscr{E} \Rightarrow b^2(x_1)^2 + a^2(y_1)^2 = a^2b^2$ (1)

$P_2(x_1 + h\,; y_1 + k) \in \mathscr{E}$

$$\Rightarrow b^2(x_1 + h) + a^2(y_1 + k)^2 = a^2b^2 \quad (2)$$

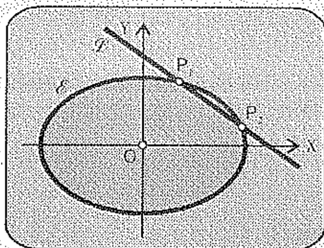


FIGURA 7.18

Restando (2) - (1) se tiene :

$$2b^2hx_1 + 2a^2ky_1 + b^2h^2 + a^2k^2 = 0 \Rightarrow h(2b^2x_1 + b^2h) = -k(2a^2y_1 + a^2k)$$

de donde : $\frac{k}{h} = -\frac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k}$, es decir , $m = -\frac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k}$

Cuando P_2 tiende a P_1, esto es, cuando h = k = 0 , entonces la pendiente de la secante $\overline{P_1P_2}$ es igual a la pendiente de la tangente en P_1 , por lo que

$$m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Luego, la ecuación de la tangente en P_1 es

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

TEOREMA 7.5 Las ecuaciones de las tangentes, de pendiente m , a la elipse $\mathscr{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Demostración. La ecuación de la familia de rectas de pendiente m es

$$y = mx + k \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$b^2x^2 + a^2(mx + k)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2\,kmx + a^2(k^2 - b^2) = 0$$

Por condición de tangencia : $(2a^2km)^2 - 4(a^2m^2 + b^2)a^2(k^2 - b^2) = 0$

de donde obtenemos : $k^2 = a^2m^2 + b^2 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

EJERCICIOS . *Grupo 29*

En cada uno de los ejercicios 6 y 7 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente, subnormal, para la elipse y punto de contacto dados.

6 $\mathscr{E}: 2x^2 + 3y^2 = 5$, P(1 , -1)

Solución. La ecuación de la tangente en P es, $\mathscr{L}: y + 1 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 1$
Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$2x^2+3(mx-m-1)^2=5 \Rightarrow (2+3m^2)x^2-6m(m+1)x+3m^2+6m-2=0$$

Por condición de tangencia: $36m^2(m+1)^2-4(2+3m^2)(3m^2+6m-2)=0$

Efectuando y simplificando la ecuación se reduce a $(3m-2)^2=0 \Rightarrow m=2/3$

Luego, la ecuación de la tangente es: $y+1=\frac{2}{3}(x-1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 2x-3y-5=0$

Ecuación de la normal: $y+1=-\frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1: 3x+2y-1=0$

Longitud de la tangente: $t=\left|\frac{y_1}{m}\right|\sqrt{1+m^2}=\left|\frac{-1}{2/3}\right|\sqrt{1+(2/3)^2}=\sqrt{13}/2$

Longitud de la normal: $m=|y_1|\sqrt{1+m^2}=|-1|\sqrt{1+4/9}=\sqrt{13}/3$

Longitud de la subtangente: $ST=\left|\frac{y_1}{m}\right|=\left|\frac{-1}{2/3}\right|=3/2$

Longitud de la subnormal: $SN=|my_1|=2/3$ ■

7 $\mathscr{E}: 4x^2+2y^2-7x+y-5=0$, $P(2,1)$

Solución. Ecuación de la tangente, $\mathscr{L}: y-1=m(x-2) \Rightarrow y=mx-2m+1$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$4x^2+2(mx-2m+1)^2-7x+(mx-2m+1)-5=0$$

$$\Rightarrow 2(2+m^2)x^2+(5m-8m^2-7)x+2(4m^2-5m-1)=0$$

Condición de tangencia: $(5m-8m^2-7)^2-16(2+m^2)(4m^2-5m-1)=0$

de donde obtenemos la ecuación: $(5m+9)^2=0 \Rightarrow m=-9/5$

Luego, en $\mathscr{L}$ se tiene: $y-1=-9/5(x-2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 9x+5y-23=0$

Ecuación de la normal: $y-1=5/9(x-2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1: 5x-9y-1=0$

Longitud de la tangente: $t=\left|\frac{y_1}{m}\right|\sqrt{1+m^2}=\left|\frac{1}{-9/5}\right|\sqrt{1+81/25}=\frac{\sqrt{106}}{9}$

Longitud de la normal: $m=|y_1|\sqrt{1+m^2}=\sqrt{1+81/25}=\sqrt{106/5}$

Longitud de la subtangente: $ST=|y_1/m|=5/9$

Longitud de la subnormal: $SN=|y_1m|=9/5$ ■

8 Hallar las ecuaciones de las tangentes de pendiente 2 a la elipse $\mathscr{E}: 4x^2+5y^2=8$

Solución. Las ecuaciones de las tangentes tienen la forma: $y=2x+b$ (1)

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$4x^2 + 5(2x + b)^2 = 8 \Rightarrow 24x^2 + 20bx + 5b^2 - 8 = 0$$

Por condición de tangencia : $(20b)^2 - 4(24)(5b^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow b = \pm \frac{4}{5}\sqrt{15}$

Luego, en (1), las ecuaciones de las tangentes son : $10x - 5y \pm 4\sqrt{15} = 0$ ■

9 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $\mathscr{E}: 3x^2 + y^2 + 4x - 2y = 3$ que son perpendiculares a la recta $\mathscr{L}: x + y - 5 = 0$

Solución. La ecuación de la familia de rectas perpendiculares a $\mathscr{L}$ es

$$y = x + b \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene

$$3x^2 + (x + b)^2 + 4x - 2(x + b) - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2(b + 1)x + b^2 - 2b - 3 = 0$$

Condición de tangencia : $4(b + 1)^2 - 4(4)(b^2 - 2b - 3) = 0$

de donde obtenemos la ecuación : $3b^2 - 10b + 13 = 0 \Leftrightarrow b_1 = -1 \vee b_2 = 13/3$

Por tanto , en (1) , las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathscr{L}_1 : x - y - 1 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 3x - 3y + 13 = 0$$ ■

10 Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(3 , -1) a la elipse $\mathscr{E}: 2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por P(3 , -1) es

$$y + 1 = \mathrm{m}(x - 3) \Rightarrow y = \mathrm{m}x - 3\mathrm{m} - 1 \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene :

$$2x^2 + 3(\mathrm{m}x - 3\mathrm{m} - 1)^2 + x - (\mathrm{m}x - 3\mathrm{m} - 1) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (2 + 3\mathrm{m}^2)x^2 + (1 - 7\mathrm{m} - 18\mathrm{m}^2)x + 27\mathrm{m}^2 + 21\mathrm{m} - 1 = 0$$

Condición de tangencia : $(1 - 7\mathrm{m} - 18\mathrm{m}^2)^2 - 4(2 + 3\mathrm{m}^2)(27\mathrm{m}^2 + 21\mathrm{m} - 1) = 0$

de donde obtenemos : $191\mathrm{m}^2 + 182\mathrm{m} - 9 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{m} = -1 \vee \mathrm{m} = 9/191$

Por tanto, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$x + y - 2 = 0 \vee 9x - 191y - 218 = 0$$ ■

11 Con referencia a la elipse $\mathscr{E}: x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + \mathrm{k} = 0$

a) cortan a la elipse en dos puntos diferentes

b) son tangentes a la elipse

c) no cortan a la elipse

Solución. Si $5x + 2y + k = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(k + 5x)$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene :

$$x^2 + \frac{3}{4}(k+5x)^2 + 3x + 2(k+5x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 79x^2 + 2(26+15k)x + 3k^2 + 8k - 12 = 0$$

Discriminante de la ecuación : $\Delta = 4(26+15k)^2 - 4(79)(3k^2 + 8k - 12) = 0$

$$= 16(-3k^2 + 37k + 406)$$

a) Las rectas cortan a la elipse si $\Delta > 0$, esto es , si

$$-3k^2 + 37k + 406 > 0 \Rightarrow 3k^2 - 37k - 406 < 0$$

$$\Rightarrow (3k - 58)(k + 7) < 0 \Leftrightarrow -7 < k < 58/3$$

b) Las rectas son tangentes a la elipse si $\Delta = 0$, esto es , si

$$(3k - 58)(k + 7) = 0 \Leftrightarrow k = 58/3 \vee k = -7$$

c) Las rectas no cortan a la elipse si $\Delta < 0$, esto es , si

$$(3k - 58)(k + 7) > 0 \Leftrightarrow k < -7 \vee k > 58/3$$ ■

12 Hallar el ángulo agudo de intersección de las elipses $\mathscr{E}_1 : 3x^2 + 4y^2 = 43$ y $\mathscr{E}_2 : 4x^2 + y^2 - 32x + 56 = 0$ en uno de sus dos puntos de intersección.

Solución. Interceptando $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ obtenemos los puntos $P_1(3 , 2)$ y $P_2(3 , -2)$

Como $\mathscr{E}_1$ es una elipse de la forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, por el Teorema 7.4 , la pendiente de la tangente en $P_1(3 , 2)$ es

$$m_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = -\frac{(43/4)(3)}{(43/3)(2)} = -\frac{9}{8}$$

Si $\mathscr{E}_2 : \frac{(x-4)^2}{2} + \frac{(y-0)^2}{8} = 1 \Rightarrow h = 4 \ , \ k = 0 \ , \ a^2 = 8 \ , \ b^2 = 2$

Para una elipse de ecuación $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, la pendiente de la tangente

en el punto $P_1(x_1 , y_1)$ es : $m = -\frac{a^2(x_1 - h)}{b^2(y_1 - k)}$

Entonces , para $\mathscr{E}_2$ se tiene : $m_2 = -\frac{8(3-4)}{2(2-0)} = 2$

Luego, si $Tg\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \Rightarrow Tg\theta = \left|\frac{2 + 9/8}{1 - 18/8}\right| = 2.5 \Rightarrow \theta = 68° 12'$ ■

13 Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$ son $y - k = m(x-h) \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$

La demostración se deja a cargo del lector. (Sugerencia : Use las ecuaciones de traslación en el Teorema 7.5)

14 Demostrar que la ecuación de la normal a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es : $a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$

Demostración. En efecto, la ecuación de la normal que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{1}$$

Por el Teorema 7.4 , la pendiente de la tangente en dicho punto es , $m = -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

Entonces, la pendiente de la normal será, $m_n = \dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}$. Luego, en (1) se tiene :

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$$ ■

16 Demostrar que si cualquier normal a la elipse, excepto sus ejes, pasa por el origen, la elipse es una circunferencia.

Demostración. En efecto, por el Ejercicio 14, la ecuación de la normal es

$$\mathscr{L}: a^2y_1x - b^2x_1y = (a^2-b^2)x_1y_1$$

Si $(0, 0) \in \mathscr{L} \Rightarrow a^2y_1(0) - bx_1(0) = (a^2-b^2)x_1y_1 \Rightarrow (a^2-b^2)x_1y_1 = 0$

Dado que $x_1y_1 \neq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a = b$

Es la condición para que una elipse sea una circunferencia. ■

17 Demostrar que las tangentes a una elipse trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas entre sí.

Demostración. Sea la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Como la curva es simétrica respecto del origen, entonces, si $P_1(x_1, y_1)$ es un extremo de un diámetro, el otro extremo será $P_2(-x_1, -y_1)$. Por el Teorema 7.4, las ecuaciones de las tangentes en P_1 y P_2 son, respectivamente :

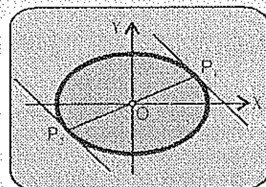


FIGURA 7.19

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2 \Rightarrow m_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$$-b^2x_1x - x^2y_1y = a^2b^2 \Rightarrow m_2 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Como $m_1 = m_2$, las tangentes son paralelas. ■

18 Demostrar que la pendiente de la tangente de una elipse en cualquiera de los puntos extremos de uno de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

Demostración. Sea la elipse $\mathscr{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ cuya tangente en $L(x_1, y_1)$ tiene por ecuación, $\mathscr{L}: b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ (1)

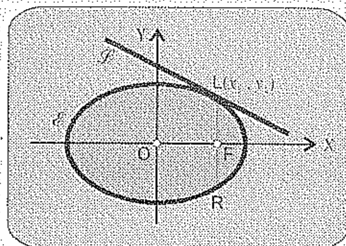


FIGURA 7.20

Si el foco es $F(c, 0) \Rightarrow c = x_1$, y si

$$LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow y_1 = \frac{b^2}{a}$$

Luego, en (1): $b^2cx + a^2\left(\frac{b^2}{a}\right)y = a^2b^2$

de donde se tiene, $\mathscr{L}: cx + ay = a \Rightarrow m = -\frac{c}{a} = -e$

Por lo tanto, la pendiente de la tangente es numéricamente igual a la excentricidad de la elipse. ■

19 Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una elipse a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

Demostración. Sea la elipse $\mathscr{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ cuyos focos son:

$F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$

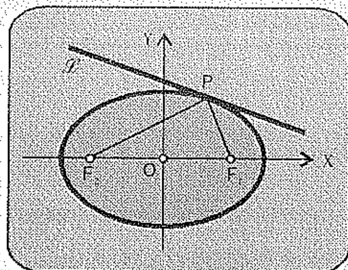


FIGURA 7.21

Por el Teorema 7.5, la ecuación de la tangente, de pendiente m, es:

$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \Rightarrow \mathscr{L}: mx - y + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$$\Rightarrow d(F_1, \mathscr{L}) = \frac{mc + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$d(F_2, \mathscr{L}) = \frac{-mc + \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Luego : $d(F_1, \mathscr{L}) \cdot d(F_2, \mathscr{L}) = \dfrac{(a^2m^2 + b^2) - m^2c^2}{m^2 + 1} = \dfrac{m^2(a^2 - c^2) + b^2}{m^2 + 1}$

$$= \frac{m^2b^2 + b^2}{m^2 + 1} = b^2$$ ■

20 Por el punto P(2 , 7) se trazan tangentes a la elipse $\mathscr{E}: 2x^2 + y^2 + 2x - 3y = 2$. Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.

Solución. La ecuación de la familia de rectas que pasan por P(2 , 7) es

$$y - 7 = m(x - 2) \Rightarrow y = mx + 7 - 2m \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene :

$$2x^2 + (mx + 7 - 2m)^2 + 2x - 3(mx + 7 - 2m) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + m^2)x^2 + (11m - 4m^2 + 2)x + 4m^2 - 22m + 26 = 0$$

Por condición de tangencia : $(11m - 4m^2 + 2)^2 - 4(2 + m^2)(4m^2 - 22m + 26) = 0$

de donde obtenemos : $31m^2 - 220m + 204 = 0 \Leftrightarrow m = 6 \vee m = 34/31$

Luego, en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathscr{L}_1 : 6x - y - 5 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 34x - 31y + 149 = 0$$

Por tanto : $(\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{E}) = P_1(1 , 1)$ y $(\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{E}) = P_2(-13/9 , 29/9)$ ■

21 Si desde un punto exterior P_1 se trazan tangentes a una elipse, el segmento de recta que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P_1 para esa elipse. Si $P_1(x_1 , y_1)$ es el punto exterior a la elipse $\mathscr{E} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que la ecuación de la cuerda de contacto de P_1 es

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

Demostración. Sean los puntos de tangencia

$$P_2(x_2 , x_2) \text{ y } P_3(x_3 , y_3)$$

Por el Teorema 7.4, la ecuación de la tangente en P_2 es

$$\mathscr{L}_1 : b^2x^2x + a^2y^2y = a^2b^2$$

$P_1 \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow b^2x_2x_1 + a^2y_2y_1 = a^2b^2$

de donde : $$x_2 = \frac{a^2b^2 - a^2y_1y_2}{b^2x_1} \qquad (1)$$

Como $P_2 \in \mathscr{E} \Rightarrow b^2(x_2)^2 + a^2(y_2)^2 = a^2b^2 \qquad (2)$

Sustituyendo (1) en (2) se tiene :

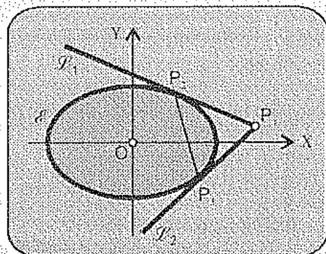


FIGURA 7.22

$$b_2 = \left(\frac{a^2b^2 - a^2y_1y_2}{b^2x_1}\right)^2 + a^2(y_2)^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow [\, a^2(y_1)^2 + b^2(x_1)^2 \,]\,(y_2)^2 - 2a^2b^2y_1y_2 + [\, a^2 - (x_1)^2 \,]\, b^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_2 = \frac{a^2b^2y_1 \pm \sqrt{a^4b^4(y_1)^2 - [\, a^2(y_1)^2 + b^2(x_1)^2 \,]\,[\, a^2 - (x_1)^2 \,]\, b^4}}{a^2(y_1)^2 + b^2(x_1)^2}$$

$$= \frac{a^2b^2y_1 \pm b^2x_1\sqrt{a^2(y_1)^2 + b^2(x_1)^2 - a^2b^2}}{a^2(y_1)^2 + b^2(x_1)^2}$$

Para hacer menos tediosa las operaciones, hagamos :

$$\mathrm{k} = \sqrt{a^2(y_1)^2 + b^2(x_1)^2 - a^2b^2} \quad \text{y} \quad \mathrm{r} = a^2(y_1)^2 + b^2(x_1)^2$$

Entonces : $y_2 = \frac{1}{\mathrm{r}}(a^2b^2y_1 + b^2x_1\mathrm{k}) \ \vee \ y_3 = \frac{1}{\mathrm{r}}(a^2b^2y_1 - b^2x_1\mathrm{k})$

Restando se tiene : $y_2 - y_3 = 2b^2x_1\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{r}}\right)$

Sustituyendo los valores de y_2 e y_3 en (1) obtenemos

$$x^2 = \frac{1}{\mathrm{r}}(a^2b^2x_1 - a^2y_1\mathrm{k}) \ \vee \ x_3 = \frac{1}{\mathrm{r}}(a^2b^2x_1 + a^2y_1\mathrm{k})$$

Restando resulta : $x_2 - x_3 = -2a^2y_1\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{r}}\right)$

Ecuación de la cuerda de contacto : $y - y_2 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}(x - x_2)$

$$y - y_2 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_2) \Rightarrow y = -\left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)x + y_2 + \left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)x_2$$

$$\Rightarrow y = -\left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)x + \frac{1}{\mathrm{r}}(a^2b^2y_1 + b^2x_1\mathrm{k}) + \left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)(a^2b^2x_1 - a^2y_1\mathrm{k})$$

$$= -\left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)x + \frac{a^2b^2(a^2y_1 + b^2x_1)}{a^2y_1\mathrm{r}} = -\left(\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)x + \frac{b^2}{y_1}$$

$$\therefore\ b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$ ■

22 Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto P(3 , 1) para la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$

Solución. De la ecuación de la elipse se tiene : $a^2 = 2$ y $b^2 = 1$

Por la fórmula del Ejercicio 21, la ecuación de la cuerda de contacto es :

$$(1)(3)x + (2)(1)y = (2)(1) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x + 2y - 2 = 0$$ ■

23 Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente m de la elipse

$\mathscr{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ es $y = -\left(\dfrac{b^2}{a^2\text{m}}\right)x$, $\text{m} \neq 0$

Demostración. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de una cuerda.

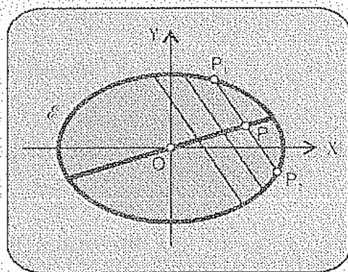


FIGURA 7.23

1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición :

$$\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$$

2. Forma analítica de esta condición

$$x_1 + x_2 = 2x \quad , \quad y_1 + y_2 = 2y$$

3. Si $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{E} \Rightarrow b^2(x_1)^2 + a^2(y_1)^2 = a^2b^2$

$P_2(x_2, y_2) \in \mathscr{E} \Rightarrow b^2(x_2)^2 + a^2(y_2)^2 = a^2b^2$

Restando ambas ecuaciones se tiene

$$b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$$

$$b^2(2x)(x_1 - x_2) + a^2(2y)(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow \frac{b^2(2x)}{a^2(2y)} = -\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = -\text{m}$$

de donde obtenemos : $y = -\left(\dfrac{b^2}{a^2\text{m}}\right)x$, $\text{m} \neq 0$

Obsérvese que el lugar geométrico es una recta que pasa por el origen (centro de la elipse) y, por tanto, es un *diámetro* de la elipse. ■

24 Establecer y demostrar un teorema para la circunferencia que sea análogo al teorema dado en el Ejercicio 23 para la elipse.

Solución. *Teorema* : El lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente m de la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 = r^2$ es:

$$y = -\frac{x}{\text{m}} \quad , \quad \text{m} \neq 0$$

La demostración queda a cargo del lector.

25 Demostrar que si un diámetro de una elipse biseca todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman *diámetros conjugados* de la elipse.

Demostración. Sea la elipse $\mathscr{E}: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Por el Ejercicio 23, la ecuación de un diámetro es , $\mathscr{D}: y = -\left(\frac{b^2}{a^2\text{m}}\right)x$

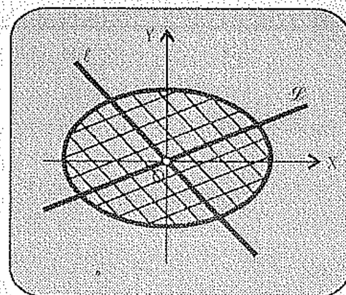


FIGURA 7.24

y de otro diámetro será, $\ell: y = -\left(\frac{b^2}{a^2\text{m}_1}\right)x$

Como ℓ es paralela alas cuerdas, de pendiente m , que biseca $\mathscr{D}$, entonces : $\text{m} = -\frac{b^2}{a^2\text{m}_1}$

o sea que el diámetro conjugado de ℓ se puede escribir de la forma $\ell: y = \text{m}x$, esto es, ℓ biseca a las cuerdas paralelas a $\mathscr{D}$. Por tanto, si m y m_1 designan las pendientes de dos diámetros, éstos son conjugados si se cumple

$$\text{m} \cdot \text{m}_1 = -b^2/a^2$$ ■

Nota. Si la elipse es de la forma , $\mathscr{E}: a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, debe cumplirse que

$$\text{m} \cdot \text{m}_1 = -a^2/b^2$$

EJERCICIOS DE REPASO

(Texto : F. J. De La Borbolla)

1 Hallar la ecuación de la elipse, con centro en (0, 0), en la que el lado recto es visto bajo un ángulo de 90° desde el centro de la curva. Se sabe además que el eje menor está sobre el eje Y y mide 8 unidades.

Solución. Forma de la ecuación de la elipse , $\mathscr{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

Si $\text{m}(\measuredangle \text{LOR}) = 90° \Rightarrow \text{m}(\measuredangle \text{LOF}) = 45°$

Esto es, $\overline{\text{LF}} = \overline{\text{OF}} \Rightarrow \frac{b^2}{a} = c \Leftrightarrow b^2 = ac$ (2)

Si $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 + ac - a^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$

En (2) : $b^2 = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5} - 1)$

Como $b = 4 \Rightarrow 16 = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow 2 = 8(\sqrt{5} + 1)$

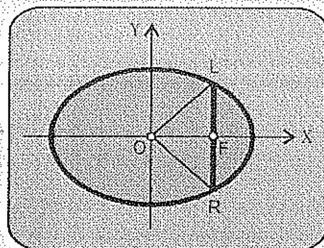


FIGURA 7.25

Por tanto, en (1), la ecuación de la elipse es

$$\mathscr{E}: \frac{x^2}{8(\sqrt{5} + 1)} + \frac{y^2}{16} = 1$$ ■

2 Hallar la ecuación de la elipse con centro en (0 , 0), eje focal en el eje Y, que pasa por P(1 , 4) y la relación del LR a la semidistancia focal es $\sqrt{2}$.

Solución. La ecuación de la elipse es de la forma $\mathscr{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (1)

$$\text{Si } P(1\,,4) \in \mathscr{E} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{a^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 16} \quad (2)$$

Como $\frac{LR}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2b^2}{ac} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\,b^2 = a\sqrt{a^2 - b^2}$ (3)

Sustituyendo (2) en (3) se tiene : $\frac{\sqrt{2}\,a^2}{a^2 - 16} = a\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{a^2 - 16}}$

de donde obtenemos la ecuación : $a^4 - 33a^2 + 270 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 18 \vee a^2 = 15$

Sustituyendo estos valores en (2) resulta : $b^2 = 9 \vee b^2 = -15$

La segunda solución para b^2 es inadmisible. Por lo que, en (1), la ecuación de la elipse buscada es : $\mathscr{E}: 2x^2 + y^2 = 18$ ■

3 Una circunferencia variable es tangente a las circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 4x = 0$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 - 16x - 36 = 0$. Qué lugar geométrico describe el centro de la circunferencia móvil?

Solución. Si $\mathscr{C}_1 : (x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow C_1(2\,,0)$ y $r_1 = 2$

$\mathscr{C}_2 : (x-8)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow C_2(8\,,0)$ y $r_2 = 10$

1. Sea C(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición : $\overline{CP} = \overline{TC}$

$$\Rightarrow \overline{C_2P} - \overline{C_2C} = \overline{C_1C} - \overline{C_1T}$$

$$\Rightarrow r_2 - \overline{C_2C} = \overline{C_1C} - r_1$$

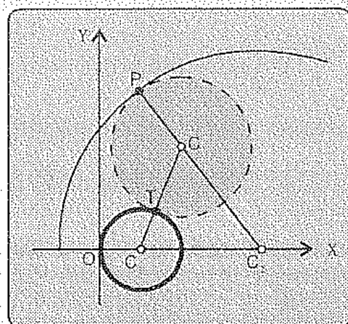


FIGURA 7.26

2. Forma analítica de esta expresión

$$10 - \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 2$$

$$\Rightarrow 12 - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}$$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando términos, la ecuación se reduce a :

$$x + 7 = 2\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4}$$

De donde obtenemos la ecuación del L. G. : $3x^2 + 4y^2 - 30x - 33 = 0$ ■

4 Una circunferencia de radio variable que pasa por P(0 , 2) es tangente interior-

mente a la circunferencia $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 12y - 28 = 0$. Hallar el lugar geométrico que describe el centro de la circunferencia variable.

Solución. Si $\mathscr{C}_1 : x^2 + (y - 6)^2 = 64 \Rightarrow C_1(0, 6)$ y $r_1 = 8$

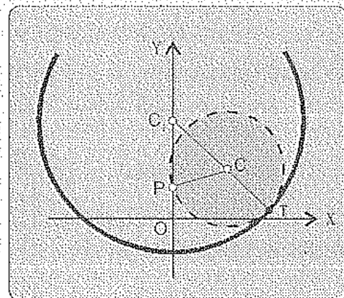


FIGURA 7.27

1. Sea $C(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición : $\overline{C_1T} = \overline{C_1C} + \overline{CT}$
   Como $\overline{CT} = \overline{CP} \Rightarrow \overline{C_1T} = \overline{C_1C} + \overline{CP}$
2. La expresión analítica de esta condición es
   $$8 - \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$$
3. Elevando ambos miembros al cuadrado resulta
   $$12 - y = 2\sqrt{x^2 + y^2 - 12y + 36}$$
   de donde obtenemos la ecuación del L. G. :
   $$4x^2 + 3y^2 - 24y = 0$$

■

5 Calcular la longitud del eje mayor de una elipse que pasa por (0 , 0) y cuyos focos son $F_1(12, 5)$ y $F_2(-8, 15)$. Cuál es su ecuación?

Solución. Si $P(x, y)$ es un punto genérico de la elipse, entonces por definición

$$\therefore |\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 12)^2 + (y - 5)^2} + \sqrt{(x + 8)^2 + (y - 15)^2} = 2a \qquad (1)$$

Como la elipse pasa por (0 , 0), entonces

$$\sqrt{(0 - 12)^2 + (0 - 5)^2} + \sqrt{(0 + 8)^2 + (0 - 15)^2} = 2a \Rightarrow 2a = 30$$

Sustituyendo este valor en (1) se tiene :

$$\sqrt{(x - 12)^2 + (y - 5)^2} = 30 - \sqrt{(x + 8)^2 + (y - 15)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando, la ecuación se reduce a

$$2x - y + 51 = 3\sqrt{x^2 + y^2 + 16x - 30y + 289}$$

de donde obtenemos la ecuación de la elipse :

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 60x - 168y = 0$$

■

6 Dados los focos $F_1(2, 3)$, $F_2(-2, 1)$ y la longitud del eje mayor = 8, obtener la ecuación y los elementos de la elipse.

Solución. Sea $P(x, y)$ el punto genérico de la elipse. Por definición :

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} = 8$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 8 - \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$

Elevando al cuadrado resulta :

$$2x+y+14 = 4\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5}$$

de donde obtenemos la ecuación de la elipse

$$\mathscr{E}: 12x^2-4xy+15y^2+8x-60y-116 = 0$$

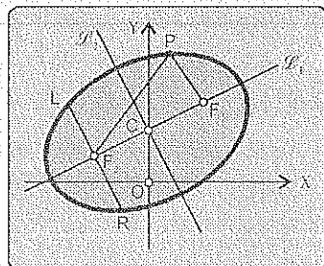


FIGURA 7.28

a) Centro de la elipse : $C\left(\frac{2-2}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \Rightarrow C(0,2)$

b) Ecuación del eje focal : $y-1 = \left(\frac{3-1}{2+2}\right)(x+2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1: x-2y+4 = 0$

c) Ecuación del eje menor : $y-2 = -2(x-0) \Leftrightarrow \mathscr{L}_2: 2x+y-2 = 0$

d) Distancia focal : $2c = |\overline{F_1F_2}| = \sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2} = 2\sqrt{5}$

e) Eje menor : $b^2 = a^2-c^2 = 16-5 = 11 \Rightarrow 2b = 2\sqrt{11}$

f) Longitud de cada lado recto : $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{11}{2}$

g) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{5}/4$ ■

7 Qué ángulo debe formar la cuerda focal de una elipse, con el eje de ésta, para que su longitud sea igual a n veces la del lado recto?

Solución. Sea la elipse $\mathscr{E}: b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$, uno de cuyos focos es $F(c, 0)$.

Ecuación de la cuerda focal : $y = m(x-c) \Rightarrow y = mx - cm$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse se tiene :

$$b^2x^2+a^2(mx-cm)^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow (a^2m^2+b^2)x^2 - 2a^2m^2cx + a^2m^2c^2 - a^2b^2 = 0$$

La suma de las raíces de esta ecuación es

$$x_1+x_2 = \frac{2a^2m^2c}{a^2m^2+b^2}$$

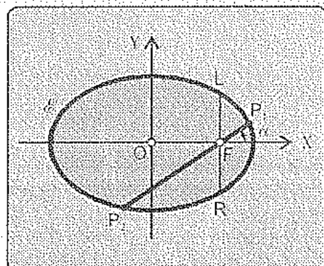


FIGURA 7.29

Dado que : $r_1 = \overline{P_1F} = a - ex_1$ y $r_2 = \overline{P_2F} = a + ex_2$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 = \overline{P_1P_2} = 2a - e(x_1+x_2)$$

Luego, si $\overline{P_1P_2} = n\overline{LR} \Rightarrow 2a - \frac{c}{a}\left(\frac{2a^2m^2c}{a^2m^2+b^2}\right) = n\left(\frac{2b^2}{a}\right)$

de donde obtenemos : $m = \text{Tg}\alpha = \sqrt{\frac{a^2-nb^2}{a^2(n-1)}}$ ■

8 Hallar el ángulo que debe formar la cuerda de la elipse $x^2 + 3y^2 = 36$, con el eje de ésta, de modo que la longitud de la cuerda focal sea igual al doble de su lado recto.

Solución. Si $x^2 + 3y^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 36$ y $b^2 = 12$. $\overline{P_1P_2} = 2\,\overline{LR} \Rightarrow n = 2$

Haciendo uso de la fórmula del Ejercicio 7 se tiene :

$$\text{Tg}\alpha = \sqrt{\frac{36 - 2(12)}{36(2 - 1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$ ■

9 Dados los focos de una elipse , $F_1(-3 , -2)$, $F_2(9 , 1)$ y la ecuación de una tangente , $\mathscr{L} : 2x + 3y - 27 = 0$, hallar la ecuación de la curva.

Solución. Por el Ejercicio 19 (Grupo 29) sabemos que : $b^2 = d(F_1 , \mathscr{L}) \cdot d(F_2 , \mathscr{L})$

$$\text{Entonces : } b^2 = \left(\frac{|-6-6-27|}{\sqrt{4+9}}\right)\left(\frac{|18+3-27|}{\sqrt{4+9}}\right) = \frac{(39)\,(6)}{13} = 18$$

$2c = |\overline{F_1F_2}| \Rightarrow 2c = \sqrt{(9+3)^2+(1+2)^2} = \sqrt{153} \Rightarrow c = \sqrt{153}/2$

Si $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 153/4 = a^2 - 18 \Rightarrow a = 15/2$

Sea $P(x , y)$ el punto genérico de la elipse. Entonces, por definición

$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2} + \sqrt{(x-9)^2+(y-1)^2} = 15$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2} = 15 - \sqrt{(x-9)^2+(y-1)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado, la ecuación se reduce a

$$5\sqrt{x^2+y^2-18x-2y+82} = 49 - 4x - y$$

de donde obtenemos la ecuación de la elipse: $9x^2 - 8xy + 24y^2 - 58x + 48y - 351 = 0$ ■

10 Dados los focos de una elipse $F_1(8 , 2)$, $F_2(2 , 2)$ y la ecuación de una tangente $\mathscr{L}: x + 2y - 21 = 0$, hallar la ecuación de la curva.

La solución del ejercicio queda a cargo del lector : ***Sol.*** $\dfrac{(x-5)^2}{36} + \dfrac{(y-2)^2}{27} = 1$

11 Dos móviles M_1 y M_2 describen sendas circunferencias concéntricas de radios R y r respectivamente. La velocidad angular ω en ambos es constante e igual, pero de sentido contrario. Qué lugar geométrico describe el punto medio del segmento $\overline{M_1M_2}$. (Aplicación, para $R = 8$ y $r = 2$.)

Solución. Sean $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ los extremos del segmento $\overline{M_1M_2}$.

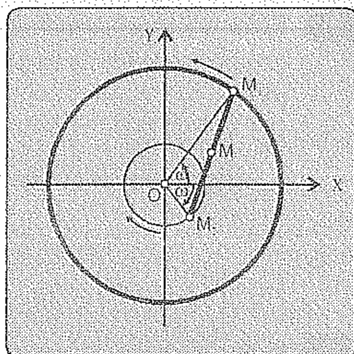


FIGURA 7.30

1. Sea $M(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición : $\overline{M_1M} = \overline{MM_2}$
2. La expresión analítica de esta condición es
$$2x = x_1 + x_2 \quad , \quad 2y = y_1 + y_2 \qquad (1)$$
Para el móvil M_1 : $\begin{cases} x_1 = R \operatorname{Cos} \omega t \\ y_1 = R \operatorname{Sen} \omega t \end{cases}$

y para el móvil M_2 : $\begin{cases} x_2 = r \operatorname{Cos} \omega t \\ y_2 = -r \operatorname{Sen} \omega t \end{cases}$

3. Luego, en (1) : $2x = (R + r) \operatorname{Cos} \omega t \Rightarrow \operatorname{Cos}\omega t = \dfrac{x}{\left(\dfrac{R+r}{2}\right)}$
$$2y = (R - r) \operatorname{Sen} \omega t \Rightarrow \operatorname{Sen}\omega t = \dfrac{y}{\left(\dfrac{R-r}{2}\right)}$$
Sumando los cuadrados de ambas ecuaciones resulta :
$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{R+r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{R-r}{2}\right)^2} = 1$$
Para $R = 8$ y $r = 2$, obtenemos la elipse : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ■

12 Dada la parábola $\mathscr{P} : x_2 = 16y$, hallar la ecuación de una elipse cuyo centro es el vértice de la parábola, el extremo del eje menor de la elipse sea el foco de la parábola y sabiendo que ambas curvas se cortan en ángulo recto, es decir, sus respectivas tangentes, en sus puntos de intersección, forman ángulos de 90°.

Solución. La ecuación de la elipse es de la forma
$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

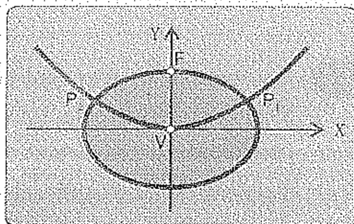


FIGURA 7.31

Si $x^2 = 16y \Rightarrow p = 4$, luego, las coordenadas del foco son $F(0, 4)$

Dado que $p = \overline{VF} = b \Rightarrow b = 4$

La pendiente de la tangente a la parábola en P_1 es

$$m = \frac{x_1}{2p} \Rightarrow m = \frac{x_1}{8}$$

y la pendiente de la tangente a la elipse en P_1 es $m_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

Como ambas curvas se cortan en ángulo recto

$$m \cdot m_1 = -1 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{8}\right)\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right) = -1 \Rightarrow \frac{b^2(x_1)^2}{8a^2y_1} = 1 \qquad (2)$$

Pero $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{P} \Rightarrow (x_1)^2 = 16y_1$; luego en (2) : $\frac{b^2(16y_1)}{8a^2y_1} = 1$

de donde : $a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 = 2(4)^2 = 32$

Finalmente , en (1), obtenemos la ecuación de la elipse , $\mathscr{E}: x^2 + 2y^2 = 32$ ■

13 Se da la elipse $\mathscr{E}: 4x^2 + 9y^2 = 72$ y un segmento cuyos extremos son A(3 , 6) y B(0 , 8). Cuál es el punto de la elipse que unido a $\overline{AB}$ determina un triángulo cuya área es un valor extremo .(Mínimo o máximo)

Solución. Si $\mathscr{E}: \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow a^2 = 18$ y $b^2 = 8$

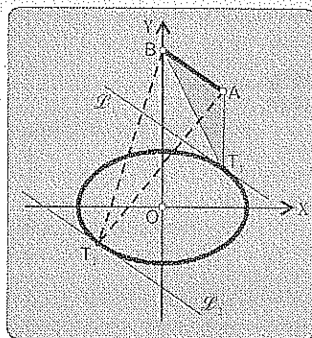


FIGURA 7.32

Las tangentes paralelas al segmento $\overline{AB}$ determinan los puntos T_1 y T_2 que resuelven el problema.

Pendientes de las tangentes :

$$m = m_{AB} = \frac{8-6}{0-3} = -\frac{2}{3}$$

Por el Teorema 7.5 , las tangentes tienen por ecuación

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x \pm \sqrt{18(4/9) + 8}$

de donde : $\mathscr{L}_1: 2x + 3y - 12 = 0$ y $\mathscr{L}_2: 2x + 3y + 12 = 0$

Por lo tanto : $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{E} = T_1(3, 2)$ y $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{E} = T_2(-3, 2)$

Las áreas mínima y máxima son respectivamente

$$a(\Delta ABT_1) = 6u^2 \;\text{ y }\; a(\Delta ABT_2) = 18u^2$$ ■

14 Dada la elipse $\mathscr{E}: 3x^2 + 4y^2 = 12$, obtener la ecuación del diámetro que biseca a las cuerdas paralelas a la recta $\ell: 4x + 3y + 2 = 0$. Hallar también la ecuación del diámetro conjugado del anterior.

Solución. Si $\mathscr{E}: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a^2=4$ y $b^2=3$

$\ell : 4x+3y+2=0 \Rightarrow m=-4/3$

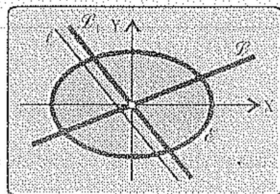


FIGURA 7.33

Ecuación del diámetro $\mathscr{D}$: $y = -\left(\frac{b^2}{a^2 m}\right)x$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4(-4/3)}x \Leftrightarrow \mathscr{D}: 9x-16y=0$$

Ecuación del diámetro conjugado , $\mathscr{D}_1 : y = mx \Rightarrow y=(-4/3)x$

$$\Rightarrow \mathscr{D}_1 : 4x+3y=0$$ ■

15 Verificar que las rectas $\mathscr{D}: 2x-y=0$ y $\mathscr{D}_1 : x+3y=0$, son diámetros conjugados de la elipse $\mathscr{E}: 2x^2+3y^2=4$

Solución. De $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}_1$ obtenemos : $m=2$ y $m_1=-1/3 \Rightarrow m \cdot m_1 = -2/3$

De la elipse : $a^2=2$ y $b^2=4/3 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}$

Dado que $m \cdot m_1 = -\frac{b^2}{a^2}$, entonces $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}_1$ son diámetros conjugados de la elipse $\mathscr{E}$.

16 Si P(4 , 2) es extremo de un diámetro de la elipse $\mathscr{E}: 3x^2+5y^2=68$, obtener su ecuación y la del diámetro conjugado.

Solución. De la elipse se tiene : $a^2 = 68/3$ y $b^2 = 68/5$

Pendiente de $\overline{OP}$: $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

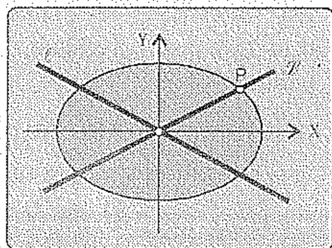


FIGURA 7.34

Ecuación del diámetro $\mathscr{D}$: $y=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow \mathscr{D}: x-2y=0$

Si m_1 es la pendiente del diámetro conjugado ℓ , se debe cumplir que : $m \cdot m_1 = -b^2/a^2$

$$\Rightarrow (1/2)m_1 = (68/5)/(68/3) \Leftrightarrow m_1 = -6/5$$

Por tanto, la ecuación del diámetro conjugado es

$$y = (-6/5)x \Leftrightarrow \ell : 6x+5y=0$$ ■

Capítulo 8

LA HIPERBOLA

8.1 DEFINICION

Una hipérbola es el conjunto de puntos localizados en un plano de tal manera que la diferencia de las distancias de cada una desde dos puntos fijos, llamados focos, es una constante.

Descripción de los elementos de una hipérbola

Los puntos V_1 y V_2 designan a los vértices y los puntos F_1 y F_2 los focos de hipérbola.

La recta ℓ que pasa por los focos se llama *eje focal*.

La recta ℓ' perpendicular ℓ que pasa por el centro C se llama *eje normal o eje conjugado*.

$\overline{V_1V_2}$ = eje transverso = $2a$

$\overline{B_1B_2}$ = eje conjugado = $2b$

$\overline{F_1F_2}$ = distancia focal = $2c$

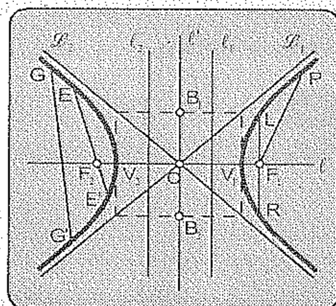


FIGURA 8.1

Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son las directrices ; $\overline{GG}'$ = cuerda ; $\overline{EE}'$ = cuerda focal ; LR = lado recto o cuerda normal ; $\overline{PF_1}$ = radio vector ; $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son las asintotas de la hipérbola.

8.2 PRIMERA ECUACION ORDINARIA DE LA HIPERBOLA

TEOREAMA 8.1 La ecuación de la hipérbola de centro el origen, eje focal coinciden-

te con el eje X, y focos los puntos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ es :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$, entonces la ecuación es :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

donde a, b y c están ligadas por la relación : $c^2 = a^2 + b^2$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$ y la excentricidad e está dada por la fórmula $e = c/a$, $e > 1$

Nota. Las ecuaciones (1) y (2) del Teorema 8.1 son llamadas *primera ecuación ordinaria de la hipérbola*. Por ser las más simples se les conoce también como *formas canónicas* de la ecuación de una hipérbola.

EJERCICIOS . *Grupo 30*

En cada uno de los ejercicios del 6 al 9, para la ecuación dada de la hipérbola, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto. Trácese y discutase el lugar geométrico.

6 $9x^2 - 4y^2 = 36$

Solución. Dividiendo cada término entre 36 obtenemos

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Hipérbola de la forma **(1)**

Entonces : $a = 2$ y $b = 3$. Si $c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

a) Vértices : $V(\pm a, 0) \Rightarrow V_1(2, 0)$ y $V_2(-2, 0)$

b) Focos : $F(\pm c, 0) \Rightarrow F_1(\sqrt{13}, b)$ y $F_2(-\sqrt{13}, 0)$

c) Longitudes de los ejes transverso y conjugado :

$$2a = 4 \ , \ 2b = 6$$

d) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{13}/2 \quad (e > 1)$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a \Rightarrow LR = 9$

La discusión sobre interceptos, simetría y extensión del lugar geométrico se deja a cargo del lector. ■

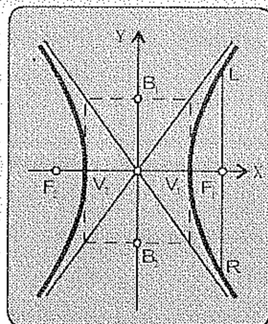


FIGURA 8.2

7 $4x^2 - 9y^2 = 36$

Solución. Si $\mathscr{H}: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 3$ y $b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

a) Vértices : $V(\pm a, 0) \Rightarrow V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$

b) Focos : $F(\pm c, 0) \Rightarrow F_1(\sqrt{13}, 0)$, $F_2(-\sqrt{13}, 0)$

c) Longitud del eje transverso : $2a = 6$

Longitud del eje conjugado : $2b = 4$

d) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{13}/3$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a = 8/3$ ■

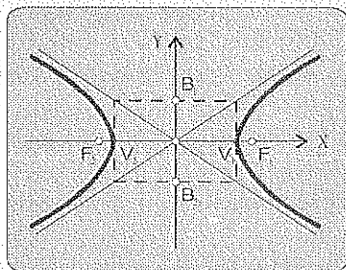


FIGURA 8.3

8 $9y^2 - 4x^2 = 36$

Solución. Si $\mathscr{H}: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 2$ y $b = 3$

Es una hipérbola de la forma **(2)** del Teorema 8.1. Luego, $c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

a) Vértices : $V(0, \pm a) \Rightarrow V_1(0, 2)$ y $V_2(0, -2)$

b) Focos : $F(0, \pm c) \Rightarrow F_1(0, \sqrt{13})$ y $F_2(0, -\sqrt{13})$

c) Longitud del eje transverso : $2a = 4$

Longitud del eje conjugado : $2b = 6$

d) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{13}/2$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a = 9$ ■

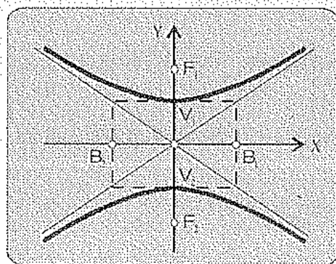


FIGURA 8.4

10 Los vértices de una hipérbola son los puntos $V(\pm 2, 0)$, y sus focos son los puntos $F(\pm 3, 0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad.

Solución. Como los vértices y focos están sobre el eje X, la ecuación de la hipérbola

es de la forma , $\mathscr{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

Si $V(\pm 2, 0) \Rightarrow a = 2$ y $F(\pm 3, 0) \Rightarrow c = 3$. Luego : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5$

Por tanto, en (1) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{H}: 5x^2 - 4y^2 = 20$; $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ ■

11 El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso está sobre el eje Y. Si un foco es el punto F(0 , 5) y la excentricidad es igual a 3, hállese la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada LR.

Solución. Por el Teorema 8.1, la forma de la ecuación es , $\mathscr{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (1)

Si F(0 , 5) $\Rightarrow c = 5$, y si $e = 3 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{5}{a} = 3 \Leftrightarrow a = 5/3$

De la relación , $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene : $25 = (25/9) + b^2 \Rightarrow b^2 = 200/9$

Por tanto , en (1) : $\frac{y^2}{25/9} - \frac{x^2}{200/9} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{H}: 72y^2 - 9x^2 = 200$

La longitud de cada lado recto es : LR $= 2b^2/a \Rightarrow$ LR $= 80/3$ ■

12 Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos (0 , ± 3) , y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

Solución. Por el Teorema 8.1, la forma de la ecuación es : $\mathscr{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

Si B(0 , ± 3) $\Rightarrow b = 3$, y si LR = 6 $\Rightarrow \frac{2(3)^2}{a} = 6 \Leftrightarrow a = 3$

Luego , en (1) , $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{H}: x^2 - y^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 9 \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$. Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{2}$ ■

13 Los vértices de una hipérbola son (0 , ± 4), y su excentricidad es igual a 3/2. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

Solución. Como los vértices de la hipérbola están sobre el eje Y, la forma de su ecuación es , $\mathscr{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (1)

Si V(0 , ± 4) $\Rightarrow a = 4$, y si $\frac{c}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow c = 6$

De la relación $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene : $36 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 20$

Luego , en (1) : $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{H}: 5y^2 - 4x^2 = 80$. Focos : F(0 , ± 6) ■

14 Una hipérbola tiene se centro en el origen y su eje transverso sobre el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\sqrt{6}/2$ y que pasa por el punto P(2 , 1)

Solución. Por el Teorema 8.1 , la forma de la ecuación es $\mathscr{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

$$\text{Si } P(2,1) \in \mathscr{H} \Rightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^2 - a^2 = a^2b^2 \quad (2)$$

y si $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{3}{a}$, de donde : $a^2 = 2b^2$ (3)

La solución común de (2) y (3) es : $a^2 = 2$ y $b^2 = 1$

Sustituyendo estos valores en (1) obtenemos , $\mathscr{H}: x^2 - 2y^2 = 2$ ■

15 Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje conjugado está sobre el eje X. La longitud de cada lado recto es 2/3, y la hipérbola pasa por el punto P(-1 , 2). Hallar su ecuación.

Solución. La forma de la ecuación es , $\mathscr{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (1)

$$\text{Si } P(-1,2) \in \mathscr{H} \Rightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^2 - a^2 = a^2b^2 \quad (2)$$

y si $LR = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2b^2}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 3b^2$ (3)

Resolviendo las ecuaciones (2) y (3) obtenemos : $a^2 = 1$ y $b^2 = 1/3$

Por tanto, en (1), se tiene ; $\mathscr{H}: y^2 - 3x^2 = 1$ ■

16 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos A(3 , -2) y B(7 , 6), tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

Solución. Por el Teorema 8.1, la forma de la ecuación es : $\mathscr{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } A(3,-2) \in \mathscr{H} \Rightarrow \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \\ B(7,6) \in \mathscr{H} \Rightarrow \frac{49}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow a^2 = 4 \text{ y } b^2 = 16/5$$

Por tanto, en (1), se tiene ; $\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{H}: 4x^2 - 5y^2 = 16$ ■

En cada uno de los ejercicios del 17 al 19, usando la definición de hipérbola, hallar la ecuación de dicha curva a partir de los datos dados. Mediante un cambio de coordenadas, poner la ecuación en la primera forma ordinaria.

17 Focos : $F_1(-1, 3)$, $F_2(-7, 3)$; longitud del eje transverso = 4

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola que debe satisfacer la condición : $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$

2. Por el teorema de la distancia esta condición queda expresada analíticamente por la ecuación : $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} - \sqrt{(x+7)^2+(y-3)^2} = 4$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = 4 + \sqrt{(x+7)^2+(y-3)^2}$$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos

$$2\sqrt{x^2+y^2+14x-6y+58} = -3x-16$$

Elevando nuevamente al cuadrado, la ecuación se reduce a

$$5x^2-4y^2+40x+24y+24 = 0$$

cuya forma ordinaria es : $5(x+4)^2 - 4(y-3)^2 = 20$

Haciendo las sustituciones : $x+4 = x'$, $y-3 = y'$, se tiene la transformada

$$5(x')^2 - 4(y')^2 = 20$$ ■

18 Vértices : $V_1(5, 4)$, $V_2(1, 4)$, longitud del lado recto = 5

Solución. Si $2a = |\overline{V_1V_2}| \Rightarrow 2a = |5-1| = 4$; $LR = 5 \Rightarrow \frac{2b^2}{a} = 5 \Leftrightarrow b^2 = 5$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3$$

Coordenadas del centro : $C\left(\frac{5+1}{2}, \frac{4+4}{2}\right) \Leftrightarrow C(3, 4) \Rightarrow h = 3$, $k = 4$

Coordenadas de los focos : $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(6, 4)$ y $F_2(0, 4)$

1. Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$
2. Forma analítica de esta condición : $\sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} - \sqrt{x^2+(y-4)^2} = 4$
3. Siguiendo los pasos del Ejercicio 17 obtenemos la ecuación buscada

$$\mathscr{H}: 5x^2-4y^2-30x+32y-39 = 0$$

cuya forma ordinaria es : $5(x-3)^2 - 4(y-4)^2 = 20$

Haciendo las sustituciones : $x-3 = x'$, $y-4 = y'$ se tiene la transformada

$$\mathscr{H}: 5(x')^2 - 4(y')^2 = 20$$ ■

19 Vértices : $V_1(3,4)$ y $V_2(3,-2)$; excentricidad : $e = 2$

Solución. Si $2a = |\overline{V_1V_2}| = |4-(-2)| = 6 \Rightarrow a = 3$; $\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow c = 6$

$$\text{Coordenadas del centro : } C\left(\frac{3+3}{2}, \frac{4-2}{2}\right) \Leftrightarrow C(3,1) \Rightarrow h = 3, k = 1$$

Coordenadas de los focos : $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(3, 7)$ y $F_2(3, -5)$

1. Sea $P(x, y)$ el punto genérico de la hipérbola que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_1}| = 2a$
2. Forma analítica de esta condición : $\sqrt{(x-3)^2+(y-7)^2} - \sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2} = 6$
3. De donde obtenemos la ecuación buscada

$$\mathscr{H}: 3y^2 - x^2 + 6x - 6y - 33 = 0$$

cuya forma ordinaria es : $3(y-1)^2 - (x-3)^2 = 27$

Haciendo las sustituciones : $y - 1 = y'$, $x - 3 = x'$, se tiene la transformada

$$3(y')^2 - (x')^2 = 27$$ ■

20 Demostrar que la longitud del eje conjugado de una hipérbola es media proporcional entre las longitudes de su eje transverso y su lado recto.

Demostración. En efecto, la longitud de cada lado recto de una hipérbola es

$$LR = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow 2b^2 = a(LR) \Rightarrow 4b^2 = (2a)(LR)$$
$$\Rightarrow (2b)^2 = (2a)(LR)$$
$$\therefore (\overline{B_1B_2})^2 = (\overline{V_1V_2})(\overline{LR})$$ ■

21 Si k es un número cualquiera diferente de cero, demostrar que la ecuación $3x^2 - 3y^2 = k$ representa una familia de hipérbolas de excentricidad igual a $\sqrt{2}$.

Demostración. En efecto , si $\frac{x^2}{k/3} - \frac{y^2}{k/3} = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 = k/3$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 2k/3$

Luego , si $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{2k/3}{k/3} = 2 \Rightarrow e = \sqrt{2}$ ■

22 Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que las longitudes de sus radios vectores son $|ex_1 + a|$ y $|ex_1 - a|$

Demostración. En efecto , si las coordenadas de los focos son $F_1(c , 0)$ y $F_2(-c , 0)$

$$\Rightarrow r_1 = |\overline{P_1F_1}| = \sqrt{(x_1 - c)^2 + (y_1)^2} \text{ y } r_2 = |\overline{P_1F_2}| = \sqrt{(x_1 + c)^2 + (y_1)^2}$$

Para r_1 se tiene : $(r_1)^2 = (x_1)^2 - 2cx_1 + c^2 + (y_1)^2$ (1)

Como $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{H} \Rightarrow b^2(x_1)^2 - a^2(y_1)^2 = a^2b^2 \Rightarrow (y_1)^2 = \dfrac{b^2(x_1)^2 - a^2b^2}{a^2}$

Luego, en (1) : $(r_1)^2 = (x_1)^2 - 2cx_1 + c^2 + \dfrac{b^2(x_1)^2 - a^2b^2}{a^2}$

$$= \frac{(a^2 + b^2)(x_1)^2 - 2a^2cx_1 + a^2(c^2 - b^2)}{a^2}$$

$$= \frac{c^2(x_1)^2 - 2a^2cx_1 + a^2(a^2)}{a^2}$$

Dado que $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow (r_1)^2 = e^2(x_1)^2 - 2aex_1 + a^2 = (ex_1 - a)^2$

$$\therefore \; r_1 = |ex_1 - a|$$

Análogamente se demuestra que : $r_2 = |ex_1 + a|$ ■

23 Hallar las longitudes de los radios vectores del punto P(6 , 5) de la hipérbola $\mathscr{H} : 5x^2 - 4y^2 = 80.$

Solución. Si $\mathscr{H}: \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1 \Rightarrow a^2 = 16$, $b^2 = 20$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 36 \Rightarrow c = 6$

Excentricidad de la hipérbola : $e = c/a \Rightarrow e = 3/2$

Haciendo uso de las fórmulas del Ejercicio 22 se tiene :

$$r_1 = |(3/2)(6) - 4| = 5 \text{ y } r_2 = |(3/2)(6) + 4| = 13$$ ■

24 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto A(6 , 0) es siempre igual al doble de su distancia a la recta $\mathscr{L}: 2x - 3 = 0$

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}| = 2|d(P , \mathscr{L})|$

2. Forma analítica de esta condición : $\sqrt{(x - 6)^2 + (y - 0)^2} = 2\left(\dfrac{|2x - 3|}{2}\right)$

3. Ejecutando operaciones resulta la ecuación : $3x^2 - y^2 = 27$

El lugar geométrico obtenido es una hipérbola. ■

25 La base de un triángulo es de longitud fija siendo sus extremos A(3 , 0) y B(-3 , 0). Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si el producto de las pendientes de los lados variables es siempre igual a 4. Trazar el lugar geométrico.

Solución. 1. Sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición

$$m_{AP} \cdot m_{BP} = 4$$

2. Forma analítica de la condición geométrica

$$\left(\frac{y}{x-3}\right)\left(\frac{y}{x+3}\right) = 4$$

3. Efectuando obtenemos : $4x^2 - y^2 = 36$

El lugar geométrico es una hipérbola cuya gráfica está representada en la Figura 8.5 ■

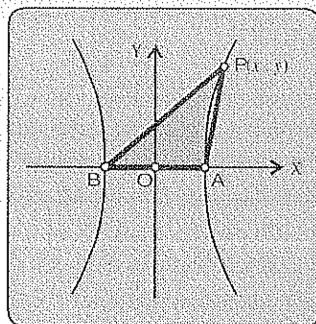


FIGURA 8.5

8.3 ASINTOTAS DE UNA HIPERBOLA

TEOREMA 8.2 La hipérbola de ecuación $\mathscr{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tiene por asíntotas las rectas $\mathscr{L}_1 : bx - ay = 0$ y $\mathscr{L}_2 : bx + ay = 0$

Demostración. En efecto, de la ecuación de la hipérbola despejamos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y = \pm\left(\frac{b}{a}x\right)\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Si x crece sin límite, la expresión a^2/x^2 se aproxima a cero , y la ecuación tiende a la forma ; $y = \pm \frac{b}{a}$, que representan a las rectas

$$\mathscr{L}_1 : bx - ay = 0 \text{ y } \mathscr{L}_2 : bx + ay = 0$$

Nota 1. Una forma fácil de obtener las asíntotas de una hipérbola consiste en factorizar el primer miembro de la ecuación e igualar a cero el segundo miembro. Esto es , si

$$\mathscr{H} : (bx - ay)(bx + ay) = a^2b^2 \text{ , haciendo } a^2b^2 = 0 \Rightarrow (bx - ay)(bx - ay) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : bx - ay = 0 \vee \mathscr{L}_2 : bx + ay = 0$$

Nota 2. La gráfica de una hipérbola puede esbozarse fácilmente trazando sus vértices y sus asíntotas. Las asíntotas actúan en la gráfica como *líneas guías*.

8.4 HIPERBOLA EQUILATERA O RECTANGULAR

Existe un caso de la hipérbola que merece mensión especial. Es el caso en que los semiejes transverso y conjugado son de igual longitud. Entonces, si $a = b$, la ecuación $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, toma la forma

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Debido a la igualdad de sus ejes, la hipérbola (1) se llama *hipérbola equilátera.* Debido a la perpendicularidad de sus asíntotas, la hipérbola (1) se le conoce también con el nombre de *hipérbola rectangular.*

Otra forma de la ecuación de una hipérbola equilátera es

$$\boldsymbol{x\,y = \mathrm{k}}$$

donde $\mathrm{k} \neq 0$ es una constante $(\mathrm{k} = \pm\, a^2/2)$

Se caracteriza por tener como asíntotas a los ejes coordenados

8.5 HIPERBOLAS CONJUGADAS

Si dos hipérbolas son tales que el eje transverso de cada una es idéntico al eje conjugado de la otra, se llaman *hipérbolas conjugadas.* Cada hipérbola es entonces la hipérbola conjugada de la otra.

Así, si la ecuación de una hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

entonces, la hipérbola conjugada de (1) tiene por ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (2)$$

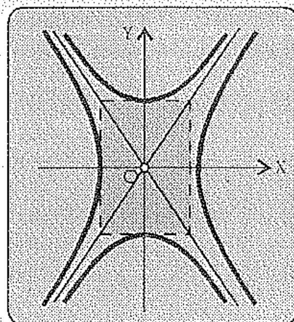


FIGURA 8.6

Como se puede observar , la ecuación (2) puede obtenerse de la ecuación (1) cambiando simplemente el signo de uno de los miembros de (1)

Por ejemplo, si la ecuación de una hipérbola es $\mathscr{H}_1$: $3x^2 - 4y^2 = 12$, entonces, la ecuación de la hipérbola conjugada es $\mathscr{H}_2$: $4y^2 - 3x^2 = 12$

EJERCICIOS . Grupo 31

5 Hallar los puntos de intersección de la recta $\mathscr{L}$: $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas

de la hipérbola $\mathscr{H}: 4x^2 - 9y^2 = 11$

Solución. Si $\mathscr{H}: (2x+3y)(2x-3y) = 11$, entonces igualando a cero el primer extremo de la ecuación se tiene

$$(2x+3y)(2x-3y)=0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1: 2x+3y=0 \vee \mathscr{L}_2: 2x-3y=0$$

Luego : $(\mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1) = A(-3/2, 1)$; $(\mathscr{L} \cap \mathscr{L}_2) = B(3, 2)$ ■

6 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto P(3 , -1), su centro está en el origen, su eje transverso sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta $\mathscr{L}: 2x + 3\sqrt{2}\,y = 0$

Solución. Por el Teorema 8.2, si una asíntota es $\mathscr{L}_1: 2x + 3\sqrt{2}\,y = 0$, la otra asíntota será ; $\mathscr{L}_2: 2x - 3\sqrt{2}\,y = 0$. Estas ecuaciones pueden obtenerse haciendo k = 0 en la ecuación ; $\mathscr{H}: (2x+3\sqrt{2}\,y)(2x-3\sqrt{2}\,y) = k$

$$\Rightarrow \mathscr{H}: 4x^2 - 18y^2 = k \qquad (1)$$

Si $P(3, -1) \in \mathscr{H} \Rightarrow 4(3)^2 - 18(-1)^2 = k$, de donde : $k = 18$

Por tanto, en (1), la ecuación de la hipérbola que se busca es

$$4x^2 - 18y^2 = 18 \Leftrightarrow \mathscr{H}: 2x^2 - 9y^2 = 0$$ ■

7 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto P(2 , 3), tiene su centro en el origen, su eje transverso sobre el eje Y, y una de sus asíntotas es la recta $\mathscr{L}: 2y - \sqrt{7}\,x = 0$

Solución. Las asíntotas de la hipérbola pueden obtenerse haciendo k = 0 en la ecuación. $\mathscr{H}: (2y - \sqrt{7}\,x)(2y + \sqrt{7}\,x) = k \Leftrightarrow \text{h}: 4y^2 - 7x^2 = k$ (1)

Si $P(2, 3) \in \mathscr{H} \Rightarrow 4(3)^2 - 7(2)^2 = k$, de donde : $k = 8$

Por tanto , en (1) , la ecuación buscada es , $\mathscr{H}: 4y^2 - 7x^2 = 0$ ■

8 Hallar la distancia del foco de la derecha de la hipérbola $\mathscr{H}: 16x^2 - 9y^2 = 144$ a una de sus dos asíntotas.

Solución. Si $\mathscr{H}: \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$, $b^2 = 16$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

Coordenadas del foco derecho : $F_1(5, 0)$

Si $\mathscr{H}: (4x-3y)(4x+3y) = 144$, las ecuaciones de las asíntotas pueden obtenerse haciendo $(4x-3y)(4x+3y) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1: 4x - 3y = 0 \vee \mathscr{L}_2: 4x + 3y = 0$

$$\therefore\ d(F_1, \mathscr{L}_1) = \frac{|4(5) - 3(0)|}{\sqrt{16+9}} = 4$$ ■

9 Demostrar que si las asíntotas de una hipérbola son perpendiculares entre sí, la hipérbola es equilátera.

Demostración. Sea $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \mathscr{H}: (bx - ay)(bx + ay) = a^2b^2$

Si hacemos $(bx + ay)(bx - ay) = 0 \Rightarrow \mathscr{L}_1: bx + ay = 0 \vee \mathscr{L}_2: bx - ay = 0$

Donde las pendientes de ambas asíntotas son : $m_1 = -b/a$ y $m_2 = b/a$

Si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow (-b/a)(b/a) = -1 \Leftrightarrow a = b$

Por tanto, queda demostrado que si $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$, entonces la hipérbola es equilátera. ■

10 Discutir y trazar la gráfica de la ecuación $xy = -8$

Solución. La ecuación dada es la de una hipérbola equilátera de la forma

$$xy = k$$

Como $k < 0$, las ramas de la hipérbola están en el II y IV cuadrantes. Siendo las asíntotas los ejes coordenados, los ejes de la hipérbola son las bisectrices de los ángulos formados por las asíntotas. Por tanto, la ecuación del eje focal es la recta $y = -x$.

$$\Rightarrow (y = -x) \cap (xy = -8) =$$

$$V_1(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \text{ y } V_2(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

Como $k = -a^2/2 \Rightarrow -8 = -a^2/2$, de donde : $a = 4$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 = 32 \Rightarrow c = 4\sqrt{2}$$

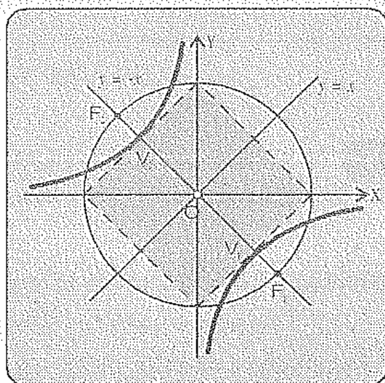


FIGURA 8.7

Los focos se hallan en la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = c^2$ con el eje focal $y = -x$; esto es

$$(x^2 + y^2 = 32) \cap (y = -x) = F_1(-4, 4) \text{ y } F_2(4, -4)$$ ■

11 Demostrar que la excentricidad de toda hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$

Demostración. En efecto, como en toda hipérbola equilátera $a = b$, entonces, si

$$e = \frac{c}{a}, \text{ implica que : } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{2a^2}{a^2} = 2$$

$$\therefore\ e = \sqrt{2}$$ ■

12 Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola equilátera a sus asíntotas es una constante.

Demostración. En efecto, sea la hipérbola equilátera $\mathscr{H}: x^2 - y^2 = a^2$

$$\Rightarrow \mathscr{H}: (x+y)(x-y) = a^2$$

Si $(x+y)(x-y) = 0$, las ecuaciones de las asíntotas son

$$\mathscr{L}_1 : x + y = 0 \quad , \quad \mathscr{L}_2 : x - y = 0$$

Sea $P_1(x_1 , y_1)$ un punto cualquiera de la hipérbola equilátera

$$\Rightarrow d(P_1 , \mathscr{L}_1) = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad d(P_1 , \mathscr{L}_2) = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}$$

Luego : $d(P_1 , \mathscr{L}_1) \cdot d(P_1 , \mathscr{L}_2) = \dfrac{(x_1)^2 - (y_1)^2}{2}$

Como $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{H} \Rightarrow (x_1)^2 - (y_1)^2 = a^2$

$$\therefore \; d(P_1 , \mathscr{L}_1) \cdot d(P_1 , \mathscr{L}_2) = \frac{a^2}{2} = \text{k (constante)}$$ ■

13 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a dos rectas perpendiculares es siempre igual a una constante.

Solución. 1. Sean $\mathscr{L}_1 : x + \text{m}y = 0$ y $\mathscr{L}_2 : \text{m}x - y = 0$ dos rectas perpendiculares que pasan por el origen. Sea $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición : $d(P , \mathscr{L}_1) \cdot d(P , \mathscr{L}_2) = \text{k}$

2. La forma analítica de esta condición es : $\left(\dfrac{x + \text{m}y}{\sqrt{1 + \text{m}^2}}\right)\left(\dfrac{\text{m}x - y}{\sqrt{\text{m}^2 + 1}}\right) = \text{k}$

3. De donde obtenemos la ecuación : $x^2 - y^2 = \text{k}\left(\dfrac{1 + \text{m}^2}{\text{m}}\right)$

El lugar geométrico es una hipérbola equilátera. ■

14 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto P(-1 , -5) y tiene por asíntotas a los ejes coordenados.

Solución. La ecuación de la hipérbola equilátera es de la forma , $\mathscr{H}: xy = \text{k}$ (1)

Si $P(-1 , -5) \in \mathscr{H} \Rightarrow (-1)(-5) = \text{k} \Leftrightarrow \text{k} = 5$

Por tanto, en (1), la ecuación que se busca es , $\mathscr{H}: xy = 5$ ■

15 Demostrar que la distancia de cualquier punto de una hipérbola equilátera a su centro es media proporcional entre las longitudes de los radios vectores del punto.

Demostración. Sea la hipérbola equilátera $\mathscr{H}: x^2 - y^2 = a^2$

Probaremos que : $|\overline{OP_1}|^2 = (r_1)(r_2)$

En efecto, si

$$|\overline{OP_1}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \Rightarrow |\overline{OP_1}|^2 = x_1^2 + y_1^2 \qquad (1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{H} \Rightarrow x_1^2 - y_1^2 = a^2 \Rightarrow y_1^2 = x_1^2 - a^2$

Luego, en (1) : $|\overline{OP_1}|^2 = 2x_1^2 - a^2 \qquad (2)$

Los radios vectores de P_1 están representados por

$$r_1 = |ex_1 - a| \text{ y } r_2 = |ex_1 + a| \Rightarrow r_1 r_2 = e^2 x_1^2 - a^2$$

Pero en una hipérbola equilátera , $e = \sqrt{2}$ (constante)

Por lo que : $(r_1)(r_2) = 2x_1^2 - a^2 \qquad (3)$

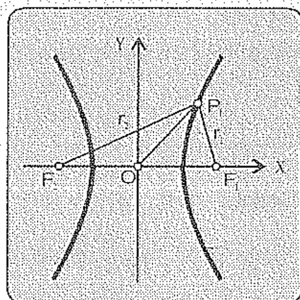


FIGURA 8.8

De (2) y (3) se sigue que : $|\overline{OP_1}|^2 = (r_1)(r_2)$ ■

16 Hallar las coordenadas de los vértices y focos, y la excentricidad de la hipérbola que es conjugada a la que tiene por ecuación $9x^2 - 4y^2 = 36$

Solución. La hipérbola conjugada de la dada es : $4y^2 - 9x^2 = 36$

$$\text{Si } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 3 \,,\; b = 2 \text{ y } c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

a) Coordenadas de los vértices : $V(0, \pm a) \Rightarrow V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$

b) Coordenadas de los focos : $F(0, \pm c) \Rightarrow F_1(0, \sqrt{13})$ y $F_2(0, -\sqrt{13})$

c) Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{13}/3$ ■

17 Demostrar que dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas.

Demostración. Sea la hipérbola $\mathscr{H}_1 : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ y su conjugada

$\mathscr{H}_2 : a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$

Las asíntotas de $\mathscr{H}_1$ son : $(bx - ay)(bx + ay) = 0$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : bx - ay = 0 \;\vee\; \mathscr{L}_2 : bx + ay = 0 \qquad (1)$$

Las asíntotas de $\mathscr{H}_2$ son : $(ay - bx)(ay + bx) = 0$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : ay - bx = 0 \;\vee\; \mathscr{L}_2 : ay + bx = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : bx - ay = 0 \;\vee\; \mathscr{L}_2 : bx + ay = 0 \qquad (2)$$

Por tanto, de (1) y (2) , queda probado que $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ tienen las mismas asíntotas. ■

18 Demostrar que los focos de un par de hipérbolas conjugadas están sobre una circunferencia.

Demostración. En efecto, sean $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ dos hipérbolas conjugadas, cuyos semiejes transverso y conjugado son respectivamente :

a_1 , b_1 y a_2 , b_2. En ambas hipérbolas : $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$ y $c_2^2 = a_2^2 + b_2^2$

Pero como $a_1 = b_2$ y $b_1 = a_2 \Rightarrow c_1 = c_2$.

Luego, los focos de $\mathscr{H}_1$, $F(\pm c_1 , 0)$ y los focos de $\mathscr{H}_2$, $F(0 , \pm c_2)$ están sobre una circunferencia de radio $r = c_1 = c_2$. ■

19 Demostrar que si una hipérbola es equilátera, su hipérbola conjugada es también equilátera.

La demostración queda a cargo del lector.

20 La excentricidad de la hipérbola $\mathscr{H}_1 : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ es e_1. Si la excentricidad de su hipérbola conjugada $\mathscr{H}_2$, es e_2 , demostrar que $e_1/e_2 = b/a$

Demostración. En efecto , la excentricidad de $\mathscr{H}_1$ es $e_1 = c/a$ y la excentricidad de $\mathscr{H}_2$ es : $e_2 = c/b$, donde b es el semieje transverso de $\mathscr{H}_2$.

$$\therefore \quad \frac{e_1}{e_2} = \frac{c/a}{c/b} = \frac{b}{a}$$ ■

21 Si las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas son e_1 y e_2 , demostrar que : $(e_1)^2 + (e_2)^2 = (e_1)^2 (e_2)^2$

Demostración. En efecto, las excentricidades de $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ son : $e_1 = c/a$ y $e_2 = c/b$. Entonces :

$$(e_1)^2 + (e_2)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2}$$

$$= \frac{c^2 \cdot c^2}{a^2\, b^2} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 = (e_1)^2 (e_2)^2$$ ■

22 Demostrar que la distancia de un foco a una cualquiera de las asíntotas de una hipérbola es igual a la longitud de su semieje conjugado.

Demostración. En efecto, sea la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, cuyas asíntotas las obtenemos haciendo : $(bx + ay)(bx - ay) = 0$

$$\Rightarrow \mathscr{L}_1 : bx + ay = 0 \vee \mathscr{L}_2 : bx - ay = 0$$

Si F(c , 0) es uno de los focos de la hipérbola, entonces

$$d(\text{F}, \mathscr{L}_1) = \frac{b(c) + a(0)}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{bc}{c} = b$$ ■

23 Si α es el ángulo agudo de inclinación de una asíntota de la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que su excentricidad es igual a Secα.

Demostración. En efecto, si $\mathscr{L}_2 : bx - ay = 0$ es una de las asíntotas de la hipérbola (Ejercicio 22), entonces , $m_2 = \text{Tg}\alpha = b/a$

Dado que $\text{Sec}^2\alpha = 1 + \text{Tg}^2\alpha \Rightarrow \text{Sec}^2\alpha = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2$

$$\therefore\ e = \text{Sec}\alpha$$ ■

24 Demostrar que si una recta es paralela a una asíntota de una hipérbola, corta a la curva solamente en un punto.

Demostración. Sea la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, una de cuyas asintotas es la recta $\mathscr{L}_2 : bx - ay = 0 \Rightarrow m_2 = b/a$

Una recta $\mathscr{L} \parallel \mathscr{L}_2$ tiene por ecuación , $\mathscr{L}: y = (b/a)x + \text{k}$

Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola se tiene :

$$b^2x^2 - a^2\left(\frac{b}{a}x + \text{k}\right)^2 \Rightarrow x = -\frac{a(b^2 + \text{k}^2)}{2b\text{k}}$$

Por tanto, queda probado que la recta $\mathscr{L}$ corta a $\mathscr{H}$ en un solo punto. ■

25 Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola a sus asíntotas es constante.

Demostración. En efecto , sea la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, cuyas asíntotas son , $\mathscr{L}_1 : bx + ay = 0$ y $\mathscr{L}_2 : bx - ay = 0$

Sea $\text{P}_1(x_1 , y_1)$ un punto cualquiera de la hipérbola.

$$\Rightarrow d(\text{P}_1, \mathscr{L}_1) \cdot d(\text{P}_1, \mathscr{L}_2) = \left(\frac{bx_1 + ay_1}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)\left(\frac{bx_1 - ay_1}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)$$

$$= \frac{b^2x_1^2 - a^2y_1^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{c^2}$$

$$\therefore\ d(\text{P}_1, \mathscr{L}_1) \cdot d(\text{P}_1, \mathscr{L}_2) = \text{k} \quad \text{(constante).}$$ ■

8.6 SEGUNDA ECUACION ORDINARIA DE LA HIPERBOLA

TEOREMA 8.3 La ecuación de una hipérbola de centro el punto (h , k) y eje focal paralelo al eje X , es de la forma

$$\frac{(x - \mathrm{h})^2}{a^2} - \frac{(y - \mathrm{k})^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es

$$\frac{(y - \mathrm{k})^2}{a^2} - \frac{(x - \mathrm{h})^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

Descripción de los elementos de una hipérbola

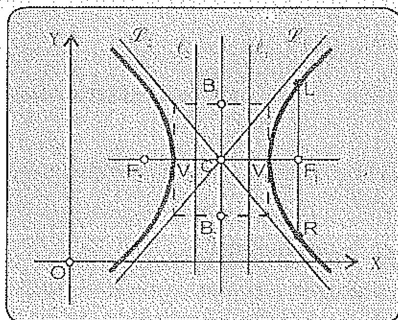


FIGURA 8.9

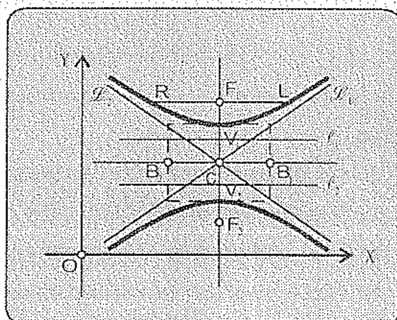


FIGURA 8.10

FORMA (3)	**FORMA (4)**
a) Centro : C(h , k)	a) Centro : C(h , k)
b) Vértices : $V_1(\mathrm{h}+a , \mathrm{k})$, $V_2(\mathrm{h}-c , \mathrm{k})$	b) Vértices : $V_1(\mathrm{h} , \mathrm{k}+a)$, $V_2(\mathrm{h} , \mathrm{k}-a)$
c) Focos : $F_1(\mathrm{h}+c , \mathrm{k})$, $F_2(\mathrm{h}-c , \mathrm{k})$	c) Focos : $F_1(\mathrm{h} , \mathrm{k}+c)$, $F_2(\mathrm{h} , \mathrm{k}-c)$
d) Extremos del eje conjugado : $B(\mathrm{h} , \mathrm{k} \pm b)$	d) Extremos del eje conjugado : $B(\mathrm{h} \pm b , \mathrm{k})$
e) Lado recto : $LR = 2b^2/a$	e) Lado recto : $LR = 2b^2/a$
f) Excentricidad : $e = c/a$ $(e > 1)$	f) Excentricidad : $e = c/a$ $(e > 1)$
g) Asíntotas : $y - \mathrm{k} = \pm \frac{b}{a}(x - \mathrm{h})$	g) Asíntotas : $y - \mathrm{k} = \pm \frac{a}{b}(x - \mathrm{h})$
h) Directrices , $\ell : x = \mathrm{h} \pm a/e$	h) Directrices , $\ell : y = \mathrm{k} \pm a/e$

8.7 FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA HIPERBOLA

> **TEOREMA 8.4** Si los coeficientes A y C difieren en signo, tal que $A > 0$ y $C > 0$, la ecuación :
> $$Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (5)$$
> representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

Demostración. Completando cuadrados para las variables x e y, se tiene :

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) - C\left(y^2 - \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) = \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C} - F$$

Si hacemos : $t = \dfrac{D^2}{4A} - \dfrac{E^2}{4C} - F$

$$\Rightarrow A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - C\left(y - \frac{E}{2C}\right)^2 = t$$

Ecuación que puede ser equivalente a las formas (3) o (4), dependiendo del valor que asuma t.

a) Si $t > 0$, la ecuación (5) representa una hipérbola de eje transverso paralelo o coincidente con el eje X.

b) Si $t = 0$, la ecuación (5) representa un par de rectas concurrentes.

c) Si $t < 0$, la ecuación (5) representa una hipérbola de eje transverso paralelo o coincidente con el eje Y.

EJERCICIOS . *Grupo 32*

6 Los vértices de una hipérbola son los puntos $V_1(3, 3)$ y $V_2(-1, 3)$ y su excentricidad es 3/2. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, y la de cada lado recto.

Solución. Como los vértices están sobre una línea horizontal (tienen la misma ordenada), la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\mathscr{H}: \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

El centro biseca al segmento $\overline{V_1V_2} \Rightarrow C\left(\dfrac{3 - 1}{2}, \dfrac{3 + 3}{2}\right) \Rightarrow C(1, 3) \Leftrightarrow h = 1$ y $k = 3$

Longitud del eje mayor : $2a = |\overline{V_1V_2}| = |3 - (-1)| = 4$

Si $e = c/a \Rightarrow 3/2 = c/2 \Leftrightarrow e = 3$, y si $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5$

Luego, la ecuación de la hipérbola buscada es , $\mathscr{H}: \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{5} = 1$

Coordenadas de los focos : $F(h \pm c , k) \Rightarrow F_1(4 , 3)$ y $F_2(-2 , 3)$

Longitud del eje conjugado : $2b = 2\sqrt{5}$ y $LR = 2b^2/a = 5$ ■

7 Los vértices de una hipérbola son los puntos $V_1(-2 , 2)$ y $V_2(-2 , -4)$, y la longitud de su lado recto es 2. Hallar la ecuación de la curva, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

Solución. Como los vértices están sobre una línea vertical (tienen la misma abscisa), la ecuación de la hipérbola es de la forma

$$\mathscr{H}: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Si $2a = |\overline{V_1V_2}| = |2 - (-4)| = 6 \Rightarrow a = 3$; $LR = 2b^2/a \Rightarrow 2 = 2b^2/3 \Rightarrow b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 3 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

Coordenadas del centro : $C\left(\dfrac{-2-2}{2} , \dfrac{2-4}{2}\right) = C(-2 , -1) \Rightarrow h = -2$, $k = -1$

Luego en (1), la ecuación de la hipérbola es : $\mathscr{H}: \dfrac{(y+1)^2}{9} - \dfrac{(x+2)^2}{3} = 1$

Coordenadas de los focos : $F(h , k \pm c) \Rightarrow F_1(-2 , -1 + 2\sqrt{3})$ y $F_2(-2 , -1 - 2\sqrt{3})$

Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = 2\sqrt{3}/3$ ■

8 El centro de una hipérbola es el punto C(2 , -2) y uno de sus vértices el punto V(0 , -2). Si la longitud de cada lado recto es 8, hallar la ecuación de la curva, la longitud de sus eje conjugado y su excentricidad.

Solución. Como el centro y el vértice tienen la misma ordenada, la ecuación de la hipérbola es de la forma , $\mathscr{H}: \dfrac{(x-2)^2}{a^2} - \dfrac{(y+2)^2}{b^2} = 1$ (1)

Si $a = |\overline{VC}| = |2 - 0| = 2$ y $LR = 2b^2/a \Rightarrow b^2 = 8$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 8 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

Luego , en (1) , la ecuación de la hipérbola es , $\mathscr{H}: \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$

Longitud del eje conjugado : $2b = 4\sqrt{2}$. Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{3}$ ■

9 Los focos de una hipérbola son los puntos $F_1(4, -2)$ y $F_2(4, 8)$, y la longitud de su eje transverso es 4. Hallar la ecuación de la hipérbola, la longitud de su lado recto y su excentricidad.

Solución. Como los focos tienen la misma abscisa, la ecuación de la hipérbola es de

la forma , $\mathscr{H}: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ (1)

Si $2c = |\overline{F_1F_2}| = |-2-(-8)| = 6 \Rightarrow c = 3$; $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9 = 4 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 5$

Coordenadas del centro : $C\left(\frac{4+4}{2}, \frac{-2-8}{2}\right) \Rightarrow C(4, -5)$

Luego, en (1), la ecuación de la hipérbola es , $\mathscr{H}: \frac{(y+5)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{5} = 1$

Longitud del lado recto : $LR = 2b^2/a = 2(5)/2 = 5$

Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = 3/2$ ■

10 El centro de una hipérbola es el punto $C(4, 5)$ y uno de sus focos es $F(8, 5)$. Si la excentricidad de la hipérbola es 2, hallar su ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.

Solución. Como el centro y el foco dados están sobre una línea horizontal, la ecuación de la hipérbola es de la forma , $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Si $c = |\overline{CF}| \Rightarrow c = |8-4| = 4$; $e = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 12$

Luego, la ecuación de la hipérbola es , $\mathscr{H}: \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$

Las longitudes de los ejes transverso y conjugado son : $2a = 4$ y $2b = 4\sqrt{3}$ ■

11 Los vértices de una hipérbola son los puntos $V_1(-3, 2)$ y $V_2(-3, -2)$ y la longitud de su eje conjugado es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola, los focos y su excentricidad.

Solución. Como los vértices están sobre una línea vertical, la ecuación de la hipérbola es de la forma , $\mathscr{H}: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$2a = |\overline{V_1V_2}| = |2-(-2)| = 4 \Rightarrow a = 2$; $2b = 6 \Rightarrow b = 3$; $c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

Coordenadas del centro : $C\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = C(-3, 0)$

Luego, la ecuación de la hipérbola es , $\mathscr{H}: \frac{(y-0)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

Coordenadas de los focos : $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(-3, \sqrt{13})$ y $F_2(-3, -\sqrt{13})$

Excentricidad : $e = c/a \Rightarrow e = \sqrt{13}/2$ ■

12 Demostrar el Teorema 8.4 de la Sección 8.7

El teorema ya fué demostrado en la página 324.

13 Demostrar que las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$b^2(x-b)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$

son : $\mathscr{L}_1: bx + ay - ak - bh = 0$ y $\mathscr{L}_2: bx - ay + ak - bh = 0$

La demostración se deja a cargo del lector.

En cada uno de los ejercicios 14 - 18, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola y determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado y del lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

14 $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$

Solución. Por el método de completar cuadrados se tiene :

$$(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 4y + 4) = 41 + 4 - 36 = 9 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

de donde : $h = 2$, $k = 2$; $a = 3$, $b = 1$; $c^2 = a^2 + b^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$

a) Coordenadas del centro : $C(h, k) \Rightarrow C(2, 2)$

b) Coordenadas de los vértices : $V(h \pm a, k) \Rightarrow V_1(5, 2)$ y $V_2(-1, 2)$

c) Coordenadas de los focos : $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(2 + \sqrt{10}, 2)$ y $F_2(2 - \sqrt{10}, 2)$

d) Longitudes de los ejes transverso y conjugado : $2a = 6$ y $2b = 2$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a = 2/3$

f) Excentricidad : $e = c/a = \sqrt{10}/3$

g) Asíntotas : $y - 2 = \pm \frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x - 3y + 4 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : x + 3y - 8 = 0$ ■

15 $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

Solución. Reduciendo la ecuación a la forma ordinaria se tiene

$$4(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 4y + 4) = -64 + 64 - 36 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$$

de donde : $h = -4$, $k = 2$; $a = 2$, $b = 3$; $c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

a) Coordenadas del centro : $C(h, k) \Rightarrow C(-4, 2)$

b) Coordenadas de los vértices : $V(h, k \pm a) \Rightarrow V_1(-4, 4)$ y $V_2(-4, 0)$

c) Coordenadas de los focos : $F(h, k \pm c) \Rightarrow F_1(-4, 2 + \sqrt{13})$ y $F_2(-4, 2 - \sqrt{13})$

d) Longitudes de los ejes transverso y conjugado : $2a = 4$ y $2b = 6$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a = 9$

f) Excentricidad : $e = c/a = \sqrt{13}/2$

g) Asíntotas : $y - 2 = \pm \frac{2}{3}(x + 4) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 2x - 3y + 14 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 2x + 3y + 2 = 0$ ■

16 $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

Solución. Si $(x^2 - 2x + 1) - 4y^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 4(y - 0)^2 = 0$

Por el Teorema 8.4, el lugar geométrico es un par de rectas concurrentes

$$(x - 1 + 2y)(x - 1 - 2y) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + 2y - 1 = 0 \vee \mathscr{L}_2 = x - 2y - 1 = 0$$ ■

17 $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$

Solución. Reduciendo la ecuación a la forma ordinaria se tiene :

$$9(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 4y + 4) = 36 \Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

de donde : $h = -3$, $k = 2$; $a = 2$, $b = 3$; $c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

a) Coordenadas del centro : $C(h, k) \Rightarrow C(-3, 2)$

b) Coordenadas de los vértices : $V(h \pm a, k) \Rightarrow V_1(-1, 2)$ y $V_2(-5, 2)$

c) Coordenadas de los focos : $F(h \pm c, k) \Rightarrow F_1(-3+\sqrt{13}, 2)$ y $F_2(-3-\sqrt{13}, 2)$

d) Longitudes de los ejes transverso y conjugado : $2a = 4$ y $2b = 6$

e) Longitud de cada lado recto : $LR = 2b^2/a = 9$

f) Excentricidad : $e = c/a = \sqrt{13}/2$

g) Asíntotas : $y - 2 = \pm \frac{3}{2}(x+3) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 3x - 2y + 13 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 3x + 2y + 5 = 0$ ■

18 $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$

Solución. Reduciendo la ecuación a la forma ordinaria se tiene :

$$3(x^2 + 10x + 25) - y^2 = -78 + 75 = -3 \Rightarrow \frac{(y-0)^2}{3} - \frac{(x+5)^2}{1} = 1$$

de donde : $h = 5$, $k = 0$; $a = \sqrt{3}$, $b = 1$; $c^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

Se deja al lector la tarea de hallar los elementos de la hipérbola. ■

20 Hallar el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$

Solución. Por el método de completar cuadrados se tiene :

$$9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) = -9 \Leftrightarrow (y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 9$$

Las ecuaciones de las asíntotas se obtienen de la relación

$(y+1)^2 - 9(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (y+1) = \pm 3(x-2) \Rightarrow \mathscr{L}_1 : 3x - y - 7 = 0 \vee \mathscr{L}_2 : 3x + y - 5 = 0$

de manera que sus pendientes son : $m_1 = 3$ y $m_2 = -3$

Luego , si $\text{Tg}\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \Rightarrow \text{Tg}\theta = \left|\frac{3+3}{1-9}\right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 36° 52'$ ■

21 Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto A(4 , 6) , tiene eje focal paralelo al eje X , y sus asíntotas son las rectas $\mathscr{L}_1 : 2x + y - 3 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 2x - y - 1 = 0$

Solución. Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola, entonces por la propiedad : $d(P, \mathscr{L}_1) \cdot d(P, \mathscr{L}_2) = k_1$ (Ver Ej. 25 , grupo 31)

se sigue que $\left(\frac{2x+y-3}{\sqrt{4+1}}\right)\left(\frac{2x-y-1}{\sqrt{4+1}}\right) = k_1 \Leftrightarrow (2x+y-3)(2x-y-1) = 5k_1$

o bien : $\mathscr{H} : (2x+y-3)(2x-y-1) = k$ (1)

Como $A(4,6) \in \mathscr{H} \Rightarrow (8+6-3)(8-6-1) = k \Leftrightarrow k = 11$

Sustituyendo este valor de k en (1) se tiene : $(2x+y-3)(2x-y-1) = 11$

$$\Rightarrow \mathscr{H}: 4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$$ ■

22 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto A(3 , 2) es siempre igual al triple de su distancia a la recta $\mathscr{L}$: $y + 1 = 0$.

Solución. 1. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{AP}| = 3\,|d(P, \mathscr{L})|$

2. Forma analítica de esta condición : $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\,|y+1|$

3. De donde obtenemos la ecuación : $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$

El lugar geométrico es una hipérbola. ■

23 Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto A(2 , -1) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $\mathscr{L}$: $x + 2 = 0$.

La solución queda a cargo del lector. *Sol.* $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$

24 La base de un triángulo es de longitud fija, siendo sus extremos los puntos A(0 , 0) y B(4 , 0). Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del vértice opuesto si uno de los ángulos de la base es siempre igual al doble del otro.

Solución. 1. Sea $C(x, y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica :

Caso 1. $\beta = 2\alpha \Rightarrow Tg\beta = Tg2\alpha \Leftrightarrow Tg\beta = \dfrac{2Tg\alpha}{1 - Tg^2\alpha}$ (1)

2. Expresión analítica :

$m_1 = Tg\alpha = \dfrac{y}{x}$; $m_2 = Tg(180 - \beta) = -Tg\beta = -\dfrac{y}{x-4}$

3. Luego, en (1) : $-\dfrac{y}{x-4} = \dfrac{2(y/x)}{1-(y/x)^2}$

de donde obtenemos : $3x^2 - y^2 - 8x = 0$

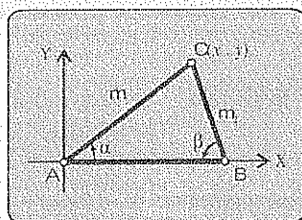


FIGURA 8.11

Caso 2. $\alpha = 2\beta \Rightarrow Tg\alpha = \dfrac{2Tg\beta}{1 - Tg^2\beta}$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-2\left(\frac{y}{x-4}\right)}{1-\left(\frac{y}{x-4}\right)^2} = \frac{-2y(x-4)}{(x-4)^2-y^2} \Leftrightarrow 3x^2-y^2-16x+16=0$$

En ambos casos el lugar geométricos es una hipérbola. ■

25 Un observador estacionado en el punto P oye el estampido de un rifle y el golpe de la bola sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que el lugar geométrico de P es una hipérbola.

Demostración. 1. Sea P un punto del lugar geométrico (Punto de ubicación del observador)

Sean : A = Punto de ubicación del tirador

B = Punto de ubicación del objetivo.

t, t_1, t_2 los tiempos transcurridos

t y t_2, las del sonido, y t_1 la del proyectil.

En cualquier posición de P, se debe verificar que

$$t = t_1 + t_2$$

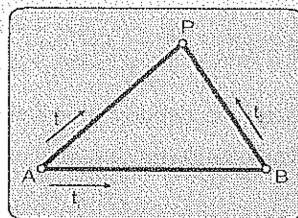


FIGURA 8.12

2. Entonces : $\dfrac{\overline{AP}}{V_S} = \dfrac{\overline{AB}}{V_P} + \dfrac{\overline{BP}}{V_S}$ $\begin{cases} V_S = \text{ velocidad del sonido} \\ V_P = \text{ velocidad del proyectil} \end{cases}$

3. Luego : $\dfrac{\overline{AP} - \overline{BP}}{V_S} = \dfrac{\overline{AB}}{V_P} \Rightarrow |\overline{AP}| - |\overline{BP}| = \dfrac{V_S}{V_P}|\overline{AB}|$

Como los puntos A y B permanecen fijos, la magnitud $|\overline{AB}|$ es constante, esto es,

si hacemos $\dfrac{V_S}{V_P}|\overline{AB}| = 2a$, entonces :

$$|\overline{AP}| - |\overline{BP}| = 2a$$

que es la definición de hipérbola.

Por tanto, el lugar geométrico descrito por P es una hipérbola. ■

8.8 ECUACION DE LA TANGENTE A UNA HIPERBOLA

TEOREMA 8.5 La ecuación de la tangente a la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva es

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$$

Demostración. Sea $P_2(x_1 + h, y_1 + k)$ otro punto de la hipérbola. Entonces la pendiente del segmento $\overline{P_1P_2}$ es : $m_1 = \dfrac{y_1 + k - y_1}{x_1 + h - x_1} = \dfrac{k}{h}$

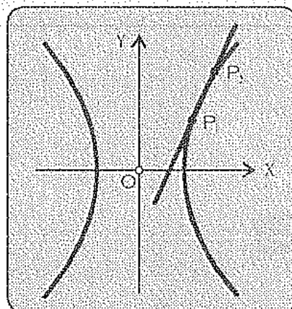


FIGURA 8.13

Si $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{H} \Rightarrow b^2(x_1)^2 + a^2(y_1)^2 = a^2b^2$ (1)

$P_2(x_1 + h, y_2 + k) \in \mathscr{H}$

$\Rightarrow b^2(x_1 + h)^2 + a^2(y_1 + k)^2 = a^2b^2$ (2)

Restando (2) - (1) se tiene : $h(2b^2x_1 + b^2h) = k(2a^2y_1 + a^2k)$

de donde : $\dfrac{k}{h} = \dfrac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k} = m_1$

Cuando P_2 tiende a P_1, esto es , cuando $h = k = 0$, entonces :

Pendiente de $\overline{P_1P_2}$ = Pendiente de la tangente en P_1

$$\therefore\ m = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Ecuación de la tangente en P_1 : $y - y_1 = \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$

$$\Rightarrow b^2x_1x - a^2y_1y = b^2(x_1)^2 - a^2(y_1)^2 \Leftrightarrow b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$$

TEOREMA 8.6 Las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, de pendiente m son :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}\ ,\ |m| > \frac{b}{a}$$

Demostración. En efecto, las ecuaciones de las tangentes tienen la forma

$$y = mx + k \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola se tiene :

$$b^2x^2 - a^2(mx + k)^2 = a^2b^2 \Rightarrow (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mkx - a^2(b^2 + k^2) = 0$$

Por condición de tangencia : $4a^2m^2k^2 + 4(b^2 - a^2m^2)\,a^2(b^2 + k^2) = 0$

de donde obtenemos : $k^2 = a^2m^2 - b^2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$

Por tanto , en (1) : $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

EJERCICIOS . *Grupo 33*

En cada uno de los ejercicios 5 - 7 , hallar las ecuaciones de la tangente y normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la hipérbola dada, con el punto de contacto dado.

5 $3x^2 - y^2 = 2$; P(1 , 1)

Solución. De la ecuación dada obtenemos : $a^2 = 2/3$ y $b^2 = 2$

Por el Teorema 8.5 , la ecuación de la tangente en P es

$$2(1)x - \frac{2}{3}(1)y = \frac{2}{3}(2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 3x - y - 2 = 0$$

Ecuación de la normal : $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + 3y - 4 = 0$

Longitud de la tangente : $t = \left|\frac{y_1}{m}\right| \sqrt{1 + m^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1 + 9} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

Longitud de la normal : $n = |y_1| \sqrt{1 + m^2} = 1\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

Longitud de la subtangente : $\overline{ST} = \left|\frac{y_1}{m}\right| = \frac{1}{3}$

Longitud de la subnormal : $\overline{SN} = |my_1| = 3$ ■

6 $2x^2 - 3y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$, P(4 , 2)

Solución. Reduciendo la ecuación a su forma ordinaria se tiene :

$$2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = -\frac{53}{6} \Rightarrow 3(y + 2/3)^2 - 2(x - 3/2)^2 = 53/6$$

de donde : $h = 3/2$, $k = -2/3$, $a^2 = 53/18$, $b^2 = 53/12$

Por la generalización del Teorema 8.5 , la pendiente de la tangente es

$$m = \frac{a^2(x_1 - h)}{b^2(y_1 - k)} = \frac{53/18(4 - 3/2)}{53/12(2 + 2/3)} = \frac{12(5/2)}{18(8/3)} = \frac{5}{8}$$

Ecuación de la tangente : $y - 2 = \frac{5}{8}(x - 4) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 5x - 8y - 4 = 0$

Ecuación de la normal : $y - 2 = -\frac{8}{5}(x - 4) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 8x + 5y - 42 = 0$

Longitud de la tangente : $t = \left|\frac{y_1}{m}\right| \sqrt{1+m^2} = \frac{2}{5}\sqrt{89}$

Longitud de la normal : $n = |y_1| \sqrt{1+m^2} = \sqrt{89}/4$

Longitud de la subtangente : $\overline{ST} = |y_1/m| = 16/5$

Longitud de la subnormal : $\overline{SN} = |m\, y_1| = 5/4$ ■

7 $3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y - 12 = 0$, $P(2, 1)$

Solución. Completando cuadrados, la ecuación se reduce a

$3(x + 1/2)^2 - 2(y + 1)^2 = 43/4 \Rightarrow h = -1/2, k = -1$; $a^2 = 43/12$ y $b^2 = 43/8$

Por la generalización del Teorema 8.5 la pendiente de la tangente es

$$m = \frac{b^2(x_1 - h)}{a^2(y_1 - k)} = \frac{(43/8)(2 + 1/2)}{(43/12)(1 + 1)} = \frac{12(5/2)}{8(2)} = \frac{15}{8}$$

Ecuación de la tangente : $y - 1 = \frac{15}{8}(x - 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 15x - 8y - 22 = 0$

Ecuación de la normal : $y - 1 = -\frac{8}{15}(x - 2) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 8x + 15y - 31 = 0$

Longitud de la tangente : $t = |y_1/m| \sqrt{1+m^2} = 17/15$

Longitud de la normal : $n = |y_1| \sqrt{1+m^2} = 17/8$

Longitud de la subtangente : $\overline{ST} = |y_1/m| = 8/15$

Longitud de la subnormal : $\overline{SN} = |m\, y_1| = 15/8$ ■

8 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\mathscr{H}: x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$ que son paralelas a la recta $\mathscr{L}: 4x - 4y + 11 = 0$

Solución. Las ecuaciones de las tangentes paralelas a $\mathscr{L}$, tienen la forma

$$y = x + k \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola se tiene :

$$x^2 - 2(x + k)^2 + 4x - 8(x + k) - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4(1 + k)x + 2(k^2 + 4k + 3) = 0$$

Por condición de tangencia : $16(1 + k)^2 - 4(2)(k^2 + 4k + 3) = 0$

Efectuando operaciones, la ecuación se reduce a : $k^2 = 1 \Rightarrow k = 1 \vee k = -1$

Por tanto en (1), las ecuaciones de las tangentes son

$$\mathscr{L}_1: x - y + 1 = 0 \vee \mathscr{L}_2: x - y - 1 = 0$$ ■

9 Hallar el ángulo formado por las tangentes trazadas del punto P(3 , 6) a la hipérbola $\mathcal{H}: x^2 - y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$

Solución. Las rectas tangentes trazadas desde P(3 , 6), tienen la forma

$$y - 6 = m(x - 3) \Rightarrow y = mx + 6 - 3m \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola se tiene :

$$x^2 - (mx + 6 - 3m)^2 + 4x - 2(mx + 6 - 3m) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (1 - m^2)x^2 + 2(3m^2 - 7m + 2)x + (42m - 9m^2 - 53) = 0$$

Condición de tangencia : $4(3m^2 - 7m + 2)^2 - 4(1 - m^2)(42m - 9m^2 - 53) = 0$

de donde : $17m^2 - 70m + 57 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 3 \vee m_2 = 19/17$

Luego , si $\text{Tg}\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow \text{Tg}\theta = \dfrac{3 - 19/17}{1 + 57/17} = \dfrac{32}{74} = 0.4351 \Rightarrow \theta = 23°23'$ ■

10 Hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $\mathcal{H}: 4x^2 - 9y^2 = 36$.

Solución. Sustituyendo $y = mx - 1$ en la ecuación de la hipérbola se tiene :

$$4x^2 - 9(mx - 1)^2 = 36 \Rightarrow (4 - 9m^2)x^2 + 18mx - 45 = 0$$

Por condición de tangencia : $(18m)^2 - 4(4 - 9m^2)(-45) = 0$

de donde obtenemos : $9m^2 = 5 \Rightarrow m = \pm\sqrt{5}/3$ ■

11 Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la hipérbola $\mathcal{H}: b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2$, son :

$$y - k = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \;, \quad |m| > b/a$$

Demostración. En efecto, haciendo las sustituciones : $x - h = x'$, $y - k = y'$, la ecuación de la hipérbola toma la forma $b^2(x')^2 - a^2(y')^2 = a^2b^2$

Por el Teorema 8. 6 , las ecuaciones de las tangentes de pendiente m son

$$y' = mx' \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \Rightarrow (y - k) = m(x - h) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \;, \; |m| > b/a$$ ■

13 Demostrar que la ecuación de la normal a la hipérbola $\mathcal{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1 , y_1)$ es

$$a^2y_1x + b^2x_1y - (a^2 + b^2)x_1y_1 = 0$$

Demostración. Por el Teorema 8.5 , la pendiente de la tangente es $m_t = \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$,

entonces la pendiente de la normal es : $m_n = -\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}$

Por tanto, su ecuación es : $y - y_1 = -\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$

$$\Rightarrow a^2y_1x + b^2x_1y - (a^2 + b^2)x_1y_1 = 0$$ ■

14 Demostrar que la elipse $\mathscr{E}: 2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $\mathscr{H}: 4y^2 - x^2 = 4$ son ortogonales entre sí en sus puntos de intersección.

Demostración. Interceptando la elipse y la hipérbola obtenemos los puntos

$$P_1(2, \sqrt{2}), P_2(2, -\sqrt{2}), P_3(-2, \sqrt{2}), P_4(-2, -\sqrt{2}).$$

Si $\mathscr{E}: 2x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow a^2 = 10$ y $b^2 = 5$; para esta elipse la ecuación de la tangente en el punto $P_1(x_1, y_1)$ está dada por la fórmula

$$a^2x_1x + b^2y_1y = a^2b^2$$

Luego, para $P_1(2, \sqrt{2})$ se tiene : $10(2)x + 5(\sqrt{2})y = (10)(5)$

de donde , $\mathscr{L}_1: 4x + \sqrt{2}y = 0 \Rightarrow m_1 = -2\sqrt{2}$

Si $\mathscr{H}: 4y^2 - x^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 1$ y $b^2 = 4$. Del mismo modo, la ecuación de la tangente a $\mathscr{H}$ en $P_1(x_1, y_1)$ es : $a^2x_1x - b^2y_1y = a^2b^2$

Para $P_1(2, \sqrt{2})$ se tiene , $\mathscr{L}_2: x - 2\sqrt{2}y - 2 = 0 \Rightarrow m_2 = \sqrt{2}/4$

Por lo tanto , $m_1 \cdot m_2 = (-2\sqrt{2})(\sqrt{2}/4) = -1 \Rightarrow \mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$

Queda demostrado que la elipse y la hipérbola son ortogonales en el punto P_1. Se deja al lector probar que $\mathscr{E}$ y $\mathscr{H}$ son ortogonales en los demás puntos. ■

15 Demostrar que la elipse $\mathscr{E}: x^2 + 3y^2 = 6$ y la hipérbola $\mathscr{H}: x^2 - 3y^2 = 3$ tienen los mismos focos. Tales curvas se llaman *cónicas homofocales*.

Demostración. Para la elipse $\mathscr{E}: x^2 + 3y^2 = 6$, $a^2 = 6$ y $b^2 = 2$

Luego , $c^2 = a^2 - b^2 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow c = 2$. Si $F(\pm c, 0) \Rightarrow F(\pm 2, 0)$

Para la hipérbola $\mathscr{H}: x^2 - 3y^2 = 3$, $a^2 = 3$ y $b^2 = 1$, $c^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

Si $F(\pm c, 0) \Rightarrow F(\pm 2, 0)$. Por tanto , $\mathscr{E}$ y $\mathscr{H}$ son homofocales. ■

16 Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una hipérbola a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje conjugado.

Demostración. Sea la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, cuyos focos son $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$

Por el Teorema 8.6 , una de las tangentes, de pendiente m , tienen por ecuación

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2} \Rightarrow \mathscr{L}_1 : mx - y + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

Entonces : $d(F_1, \mathscr{L}_1) = \dfrac{|mc + \sqrt{a^2m^2 - b^2}|}{\sqrt{m^2 + 1}}$; $d(F_2, \mathscr{L}_1) = \dfrac{|-mc + \sqrt{a^2m^2 - b^2}|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

Luego : $d(F_1, \mathscr{L}_1) \cdot d(F_2, \mathscr{L}_2) = \dfrac{m^2c^2 - (a^2m^2 - b^2)}{m^2 + 1} = \dfrac{m^2(c^2 - a^2) + b^2}{m^2 + 1}$

$$= \frac{m^2(b^2) + b^2}{m^2 + 1} = b^2$$ ■

17 Demostrar que la pendiente de una hipérbola en cualquier extremo de cualquiera de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

Demostración. En efecto, sea la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Por el Teorema 8.5, la pendiente de la tangente en un punto $P_1(x_1, y_1)$ de $\mathscr{H}$ es ,

$$m = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \qquad (1)$$

Si $P_1(x_1, y_1)$ es un extremo del lado recto , entonces $x_1 = c$ (abscisa del foco) ,

$$y_1 = \frac{1}{2}\,(LR) = \frac{1}{2}\left(\frac{2b^2}{a}\right) = \frac{b^2}{a}$$

Por tanto, en (1), se tiene : $m = \dfrac{b^2 c}{a^2(b^2/a)} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow m = e$ ■

18 Demostrar que el punto de contacto de cualquier tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

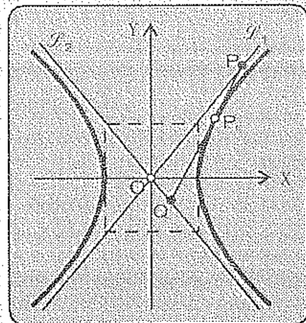


FIGURA 8.14

Demostración. Sea la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ cuyas asíntotas tienen por ecuación $\mathscr{L}_1 : bx - ay = 0$ y $\mathscr{L}_2 : bx + ay = 0$, y cuya tangente en $P_1(x_1, y_1)$ está dada por

$$\mathscr{T}: b^2x_1x - a^2y_1\,y = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{T} = P\left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1}, \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right)$$

$$\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{T} = Q\left(\frac{a^2b}{bx_1 + ay_1} \;,\; \frac{-ab^2}{bx_1 + ay_1}\right)$$

Si $M(x, y)$ son las coordenadas del punto medio de $\overline{PQ}$, entonces

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1} + \frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}\right) = \frac{a^2b}{2}\left(\frac{2bx_1}{b^2x_1^2 - a^2y_1^2}\right) = \frac{a^2b}{2}\left(\frac{2bx_1}{a^2b^2}\right) = x_1$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} + \frac{-ab^2}{bx_1 + ay_1}\right) = \frac{ab^2}{2}\left(\frac{2ay_1}{b^2x_1^2 - a^2y_1^2}\right) = \frac{ab^2}{2}\left(\frac{2ay_1}{a^2b^2}\right) = y_1$$

Luego, $M(x, y) = P_1(x_1, y_1)$

Por tanto, queda demostrado que P_1 es punto medio del segmento $\overline{PQ}$. ■

19 En un punto cualquiera P, excepto el vértice, de una hipérbola equilátera, se traza una normal que corta al eje focal en el punto Q. Si O es el centro de la hipérbola, demuéstrese que $|\overline{OP}| = |\overline{PQ}|$.

Demostración. En efecto, sea la hipérbola

$$\mathscr{H}: x^2 - y^2 = a^2$$

y sea $P(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de $\mathscr{H}$.

Si en el Ejercicio 13 hacemos $a = b$ obtenemos la ecuación de la normal $\mathscr{N}: y_1x + x_1y - 2x_1y_1 = 0$

Si $y = 0 \Rightarrow x = 2x_1$. Por lo que: $Q(2x_1, 0)$

Luego: $|\overline{OP}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$|\overline{PQ}| = \sqrt{(2x_1 - x_1)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$\therefore\ |\overline{OP}| = |\overline{PQ}|$ ■

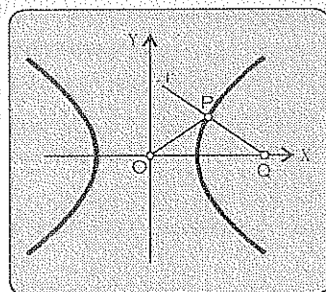


FIGURA 8.15

20 Demostrar que el triángulo formado por una tangente cualquiera a una hipérbola y sus asíntotas tiene un área constante.

Demostración. Sea la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ cuyas asíntotas son $\mathscr{L}_1: bx - ay = 0$ y $\mathscr{L}_2: bx + ay = 0$, y la $\mathscr{L}_2: bx + ay = 0$, y la tangente en P_1 es

$$\mathscr{T}: b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$$

$$\Rightarrow\ \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{T} = P\left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1} \;,\; \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right)$$

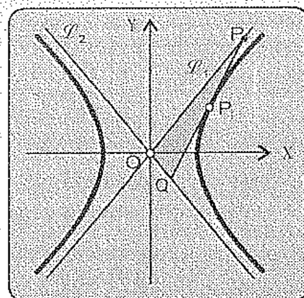


FIGURA 8.16

$$\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{T} = \text{Q}\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1}\ ,\ \frac{-ab^2}{bx_1+ay_1}\right)$$

Por la fórmula del determinante

$$\alpha(\Delta\text{POQ}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{a^2b}{bx_1+ay_1} & \dfrac{-ab^2}{bx_1+ay_1} & 1 \\ \dfrac{a^2b}{bx_1-ay_1} & \dfrac{ab^2}{bx_1-ay_1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1}\right)\left(\frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right) + \left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1}\right)\left(\frac{ab^2}{bx_1+ay_1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{a^3b^3+a^3b^3}{b^2x_1^2-a^2y_1^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2a^3b^3}{a^2b^2}\right| = ab \quad \text{(constante)}$$ ■

21 Las tangentes en los vértices de una hipérbola cortan a otra tangente cualquiera en los puntos P y Q. Demostrar que los puntos P y Q y los focos de la hipérbola están sobre una circunferencia.

Demostración. Sea la hipérbola $\mathscr{H}: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, de focos, $F_1(c\ ,0)$ y $F_2(-c\ ,0)$, y cuyas tangentes en los vértices tienen por ecuación

$$\ell_1 : x = a\ ,\ \ell_2 : x = -a$$

Por el Teorema 8.5 , la ecuación de la tangente en $P_1(x_1\ ,y_1)$ es , $\mathscr{L} : b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$

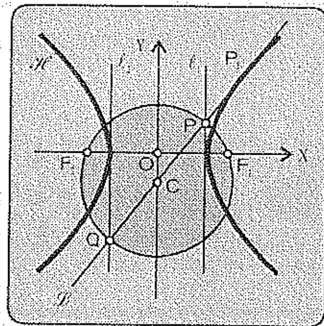


FIGURA 8.17

Luego : $\ell_1 \cap \mathscr{L} = \text{P}\left(a\ ,\ \dfrac{b^2x_1 - ab^2}{ay_1}\right)$

$$\ell_2 \cap \mathscr{L} = \text{Q}\left(-a\ ,\ -\frac{b^2x_1 + ab^2}{ay_1}\right)$$

Como toda cuerda $(\overline{F_1F_2})$ es perpendicular al diámetro de una circunferencia en su punto medio, implica que : $\mathscr{L} \cap$ (Eje y) = $C(0\ ,-b^2/y_1)$

Ahora : $|\overline{CF_1}| = |\overline{CF_2}| = \sqrt{c^2 + b^4/y_1^2}$ (Teorema de la distancia)

$$|\overline{CP}| = \sqrt{(a-0)^2 + \left(\frac{b^2x_1 - ab^2}{ay_1} + \frac{b^2}{y_1}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^4x_1^2}{a^2y_1^2}} \qquad (1)$$

Pero $P_1(x_1\ ,y_1) \in \mathscr{H} \Rightarrow b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2 \Rightarrow b^2x_1^2 = a^2(y_1^2 + b^2)$

Sustituyendo en (1) se tiene: $|\overline{CP}| = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 a^2 (y_1^2 + b^2)}{a^2 y_1^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2) y_1^2 + b^4}{y_1^2}}$

$$= \sqrt{c^2 + b^4 / y_1^2}$$

Análogamente se demuestra que : $|\overline{CQ}| = \sqrt{c^2 + b^4 / y_1^2}$

Dado que $|\overline{CF_1}| = |\overline{CF_2}| = |\overline{CP}| = |\overline{CQ}|$, los puntos F_1, F_2, P y Q están sobre una circunferencia. ■

22 Si desde un punto exterior P_1, se trazan tangentes a una hipérbola, el segmento que une los puntos de contacto se llama *cuerda de contacto* de P_1 para esa hipérbola. Si $P_1(x_1 ; y_1)$ es un punto de la hipérbola $\mathscr{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que la cuerda de contacto de P_1 es

$$b^2 x_1 x - a^2 y_1\, y = a^2 b^2$$

La demostración se deja a cargo del lector. (Sugerencia : Ver el Ejercicio 21 del grupo 29.)

23 Hallar la ecuación de la cuerda de contacto del punto $P_1(-2 , 4)$ de la hipérbola $\mathscr{H} : 3x^2 - 2y^2 = 3$.

Solución. De la ecuación de la hipérbola obtenemos : $a^2 = 1$ y $b^2 = 3/2$

Luego, haciendo uso de la fórmula del Ejercicio 22 , se tiene

$$\frac{3}{2}(-2)x - 1(4)\, y = (1)(3/2) \Leftrightarrow \mathscr{L} : 6x + 8y + 3 = 0$$ ■

24 Demostrar que la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de cualquier sistema de cuerdas paralelas de pendiente m de la hipérbola

$$\mathscr{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ es } y = \left(\frac{b^2}{a^2 \text{m}}\right) x \ , \ \text{m} \neq 0 \ , \ \text{m} \neq b/a$$

Obsérvese que el lugar geométrico es una línea recta que pasa por el centro; su ecuación es, por lo tanto, la ecuación de un *diámetro* de la hipérbola.

Demostración. 1. Sean $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ los extremos de una cuerda y $P(x , y)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad

$$\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$$

2. Expresión analítica de esta condición

$$x_1 + x_2 = 2x$$
$$y_1 + y_2 = 2y$$

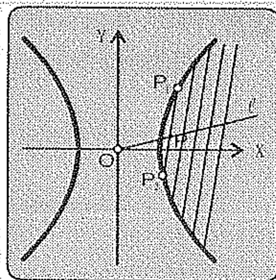


FIGURA 8.18

3. Si $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{H} \Rightarrow b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$

$P_2(x_2, y_2) \in \mathscr{H} \Rightarrow b^2x_2^2 - a^2y_2^2 = a^2b^2$

Restando ambas ecuaciones se tiene :

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) - a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0$$

o bien : $b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$

$$\Rightarrow b^2(2x)(x_1 - x_2) - a^2(2y)(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2(2x)}{a^2(2y)}$$

Luego : $m = \dfrac{b^2x}{a^2y} \Rightarrow \ell : y = \left(\dfrac{b^2}{a\,m}\right)x$, $m \neq 0$, $m \neq b/a$ ■

25 Demostrar que si un diámetro de una hipérbola biseca a todas las cuerdas paralelas a otro diámetro, el segundo diámetro biseca a todas las cuerdas paralelas al primero. Tales diámetros se llaman diámetros *conjugados* de la hipérbola.

La demostración se deja para el lector. (Sugerencia : Ver Ejercicio 25 del grupo 29.)

EJERCICIOS DE REPASO

(Del texto de F. J. De La Borbolla)

1 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje focal sobre el eje X , distancia focal = 6 y distancia entre las directrices = 4.

Solución. La forma de la ecuación de la hipérbola es , $\mathscr{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

$$\text{Si } 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \text{ , } d(D, D') = 4 \Rightarrow \frac{2a^2}{c} = 4 \text{ de donde : } a^2 = 6$$

De la relación $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene : $9 = 6 + b^2 \Rightarrow b^2 = 3$

Por tanto, en (1), la ecuación de la hipérbola es, $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{H} : x^2 - 2y^2 = 6$ ■

2 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro en (0 , 0) , lado recto = 4/3 , pendiente de las asíntotas = 1/3 y eje focal sobre el eje X.

Solución. La forma de la ecuación buscada es : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

y las ecuaciones de las asíntotas son : $y = \pm \frac{b}{a} x$

Luego , si $m = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3b$ (2)

Longitud de cada lado recto : $\frac{2b^2}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2} b^2$ (3)

La solución del sistema formado por (2) y (3) da : $a = 6$ y $b = 2$

Por tanto , en (1) , obtenemos : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{H}: x^2 - 9y^2 = 36$ ■

3 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro (0 , 0), foco sobre XX' , distancia entre las directrices = 2 , y que pasa por P(4 , 6).

Solución. La forma de la ecuación es , $\mathscr{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

Si $P(4 , 6) \in \mathscr{H} \Rightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{36\,a^2}{16 - a^2}$ (2)

Distancia entre directrices : $d(D , D') = 2 \Rightarrow \frac{2a^2}{c} = 2 \Rightarrow a^2 = c$

En la relación : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^4 = a^2 + \frac{36\,a^2}{16 - a^2}$

de donde obtenemos la ecuación : $a^4 - 17a^2 + 52 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \vee a^2 = 13$

Sustituyendo cada valor en (2) se tiene : $b^2 = 12 \vee b^2 = 156$

Por tanto, en (1) , las ecuaciones de las hipérbolas son , respectivamente

$$\mathscr{H}_1 : 3x^2 - y^2 = 12 \vee \mathscr{H}_2 : 12x^2 - y^2 = 156$$ ■

4 Hallar la ecuación de la hipérbola con centro (0 , 0), focos en F(±4 , 0), pendiente de las asíntotas = 3 y eje focal, sobre el eje X.

Sol. $45x^2 - 5x^2 = 72$

5 Hallar el lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia móvil, tangente exteriormente a las circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 = 4$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$

Solución. Si $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow C_1(0\,,0)$ y $r_1 = 2$

$\mathscr{C}_2 : (x-8)^2 = 16 \Rightarrow C_2(8\,,0)$ y $r_2 = 4$

1. Sea $C(x\,,y)$ un punto del lugar geométrico que en cualquier posición de C se debe verificar la condición : $\overline{CT} = \overline{CP}$

   Este es : $\overline{C_1C} - \overline{C_1T} = \overline{C_2C} - \overline{C_2P}$

   $\Rightarrow \overline{C_1C} - r_1 = \overline{C_2C} - r_2$

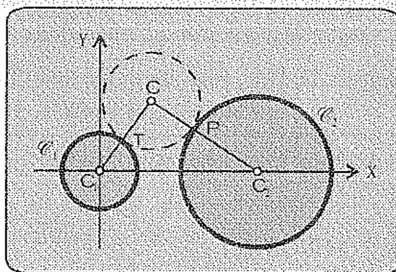


FIGURA 8.19

2. Forma analítica de esta condición

   $\sqrt{x^2+y^2} - 2 = \sqrt{(x-8)^2+y^2} - 4$

   $\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-8)^2+y^2} = 2$

3. Elevando ambos miembros al cuadrado resulta : $\sqrt{x^2+y^2-16x+64} = 4x-17$ de donde obtenemos la ecuación del L. G. : $15x^2 - y^2 - 120x + 225 = 0$ ■

6 Hallar el lugar geométrico descrito por el centro de una circunferencia móvil, tangente exteriormente a las circunferencias $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ y $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 + 14x + 24 = 0$ ***Sol.*** $35x^2 - y^2 + 70x = 0$

7 Dada la ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}_1 : 4x^2 - 5y^2 + 24x + 20y - 4 = 0$, obtener la ecuación de su conjugada y verificar la propiedad de sus excentricidades.

Solución. Si $\mathscr{H}_1 : \dfrac{(x+3)^2}{5} - \dfrac{(y-2)}{4} = 1 \Rightarrow a_1 = \sqrt{5}\,,\ b_1 = 2$ y $c_1 = 3$

Hipérbola conjugada , $\mathscr{H}_2 : \dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x+3)}{5} = 1 \Rightarrow a_2 = 2\,,\ b_2 = \sqrt{5}\,,\ c_2 = 3$

Luego , $e_1 = \dfrac{c_1}{a_1} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$; $e_2 = \dfrac{c_2}{a_2} = \dfrac{3}{2}$

Entonces : $(e_1)^2 + (e_2)^2 = \dfrac{9}{5} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{81}{20}$ y $(e_1)^2(e_2)^2 = \left(\dfrac{9}{5}\right)\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{81}{20}$

$$\therefore\ (e_1)^2 + (e_2)^2 = (e_1)^2 \cdot (e_2)^2$$ ■

8 Dada la hipérbola $\mathscr{H}_1 : 9x^2 - 16y^2 - 54x + 160y - 463 = 0$, hallar la ecuación de su conjugada y verificar la propiedad de sus excentricidades.

Sol. $\mathscr{H}_2 : 16y^2 - 9x^2 - 160y + 54x + 175 = 0$

9 Dadas las asíntotas de una hipérbola $\mathscr{L}_1 : x + 3y + 15 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x - 3y - 9 = 0$, hallar la ecuación sabiendo que pasa por el punto A(3 , -4).

Solución. Si P(x , y) es un punto cualquiera de la hipérbola, entonces

$$d(\mathrm{P}, \mathscr{L}_1) \cdot d(\mathrm{P}, \mathscr{L}_2) = \mathrm{k}_1 \qquad \text{(Ver Ejercicio 25. Grupo 31)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x + 3y + 15}{\sqrt{1+9}}\right)\left(\frac{x - 3y - 9}{\sqrt{1+9}}\right) = \mathrm{k}_1 \Leftrightarrow \mathscr{H}: (x+3y+15)(x-3-9) = \mathrm{k} \qquad (1)$$

Si $\mathrm{A}(3 , -4) \in \mathscr{H} \Rightarrow (3 - 12 + 15)(3 + 12 - 9) = \mathrm{k}$, de donde : $\mathrm{k} = 36$

Luego, en (1) : $(x + 3y + 15)(x - 3y - 9) = 36 \Leftrightarrow \mathscr{H}: x^2 - 9y^2 + 6x - 72y - 171 = 0$ ■

10 Hallar la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas en las rectas $\mathscr{L}_1 : 2x - 3y + 12 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : 2x + 3y = 0$, y uno de sus vértices es el punto V(0 , 2)

Sol. $4x^2 - 9y^2 + 24x + 36y - 36 = 0$

11 El producto de las pendientes de los segmentos que van desde un punto móvil P a dos puntos fijos A(-3 , 1) y B(5 , 3) es igual a 2/3. Qué lugar geométrico describe P.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $\mathrm{m}_{AP} \cdot \mathrm{m}_{BP} = 2/3$

2. La expresión analítica de esta condición es : $\left(\frac{y+1}{x+3}\right)\left(\frac{y-3}{x-5}\right) = \frac{2}{3}$

3. Efectuando obtenemos la ecuación : $2x^2 - 3y^2 - 4x + 12y - 39 = 0$

El lugar geométrico es una hipérbola. ■

12 Los semiejes de una hipérbola son $a = b = 2\sqrt{2}$ y están respectivamente sobre las rectas $\mathscr{L}_1 : x - y + 4 = 0$ y $\mathscr{L}_2 : x + y - 4 = 0$. Hallar la ecuación de la hipérbola.

Solución. Sea P(x , y) un punto de la hipérbola. Por la propiedad intrínseca de la misma

$$\frac{\overline{PM}^2}{a^2} - \frac{\overline{PQ}^2}{b^2} = 1$$

Como $a = b = 2\sqrt{2} \Rightarrow \overline{PM}^2 - \overline{PQ}^2 = 8$ (1)

$$\overline{PM} = d(P, \mathscr{L}_2) = \frac{x+y-4}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{PQ} = d(P, \mathscr{L}_1) = \frac{x-y+4}{\sqrt{2}}$$

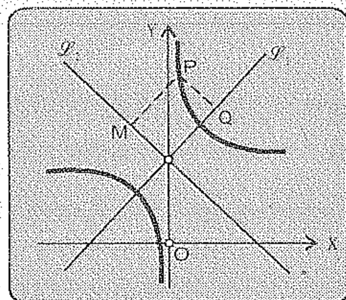


FIGURA 8.20

Entonces, en (1) : $(x+y-4)^2 - (x-y+4)^2 = 16$

Efectuando obtenemos la ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}: xy - 4x - 4 = 0$ ■

13 Los semiejes de una hipérbola son $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, y están respectivamente sobre las rectas $\mathscr{L}_1: x - 3y + 3 = 0$ y $\mathscr{L}_2: 3x + y - 11 = 0$. Hallar la ecuación de la hipérbola.

Sol. $7x^2 + 18xy - 17y^2 - 78x + 14y + 63 = 0$

14 Si $F_1(12\sqrt{5}/5, 0)$ y $F_2(-12\sqrt{5}/5, 0)$ son focos de una hipérbola y la recta $\mathscr{L}: 6x - 5y - 16 = 0$ es tangente a la curva, hallar la ecuación de la hipérbola.

Solución. La forma de la ecuación es , $\mathscr{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

Por una propiedad de las tangente a una hipérbola

$$b^2 = d(F_1, \mathscr{L}) \cdot d(F_2, \mathscr{L}) = \left(\frac{|72\sqrt{5}/5 - 16|}{\sqrt{36+25}}\right)\left(\frac{|-72\sqrt{5}/5 - 16|}{\sqrt{36+25}}\right) = \frac{64}{5}$$

Si $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{144}{5} = a^2 + \frac{64}{5} \Rightarrow a^2 = 16$

Por tanto, en (1) , se tiene : $\frac{x^2}{16} - \frac{5y^2}{64} = 1 \Leftrightarrow \mathscr{H}: 4x^2 - 5y^2 = 64$ ■

15 Sean $F_1(7, -3)$ y $F_2(-3, -3)$ los focos de una hipérbola y $\mathscr{L}: 5x - 3y - 28 = 0$ la ecuación de una tangente a dicha curva. Hallar la ecuación de la hipérbola.

Solución. La ecuación de la hipérbola es de la forma : $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (1)

Por una propiedad de las tangentes a una hipérbola

$$b^2 = d(F_1, \mathscr{L}) \cdot d(F_2, \mathscr{L}) = \left(\frac{|5(7)-3(-3)-28|}{\sqrt{25+9}}\right)\left(\frac{|5(-3)-3(-3)-28|}{\sqrt{25+9}}\right) = 16$$

$2c = |F_1F_2| = |7-(-3)| = 10 \Rightarrow c = 5$

Si $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 9$

Como el centro biseca al segmento $F_1F_2 \Rightarrow C\left(\frac{7-3}{2}, \frac{-3-3}{2}\right) \Rightarrow C(2, -3)$

Por tanto, en (I), la ecuación de la hipérbola es, $\mathscr{H}: \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ ■

16 Sea la hipérbola $\mathscr{H}: 4x^2 - 3y^2 = 36$; se pide la ecuación de la cuerda cuyo punto medio es $P(4, 2)$.

Solución. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x, y_2)$ los extremos de la cuerda $\overline{P_1P_2}$.

Si $P(4, 2)$ es punto medio de $\overline{P_1P_2}$, entonces

$$x_1 + x_2 = 2(4) = 8 \ , \ y_1 + y_2 = 2(2) = 4$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{H} \Rightarrow 4x_1^2 - 3y_1^2 = 36$

$P_2(x_2, y_2) \in \mathscr{H} \Rightarrow 4x_2^2 - 3y_2^2 = 36$

Restando ambas ecuaciones se tiene : $4(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 3(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$

$$\Rightarrow 4(8)(x_1 - x_2) - 3(4)(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{3} = m$$

Por tanto, la ecuación de la cuerda es : $y - 2 = \frac{8}{3}(x - 4) \Leftrightarrow \mathscr{L}: 8x - 3y - 26 = 0$ ■

Capítulo 9

ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

En este capítulo desarrollaremos una fórmula para la determinación del ángulo θ, al que deben rotarse los ejes coordenados para eliminar el término xy de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

Demostraremos que por medio de esta ecuación siempre es posible transformar la ecuación (1) en otra de la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

en la que uno de los coeficientes A' y C', por lo menos, es diferente de cero, y no aparezca el término $x'y'$.

9.1 TRANSFORMACION DE LA ECUACION GENERAL POR ROTACION DE EJES COORDENADOS

TEOREMA 9.1 La ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

en donde $B \neq 0$, puede transformarse siempre en otra de la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad (2)$$

sin término en $x'y'$, haciendo girar los ejes coordenados un ángulo θ tal que

$$\operatorname{Tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}, \text{ si } A \neq C$$

y $\theta = 45°$, si $A = C$

Demostración. En efecto, si sustituimos las ecuaciones de transformación por rotación : $x = x'\,\text{Cos}\theta - y'\,\text{Sen}\theta$, $y = x'\,\text{Sen}\theta + y'\,\text{Cos}\theta$,
en la ecuación (1) obtenemos :

$$A(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta)^2 + B(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta)(x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta) +$$
$$C(x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta)^2 + D(x'\text{Cos}\theta - y'\text{Sen}\theta) + E(x'\text{Sen}\theta + y'\text{Cos}\theta) + F = 0$$

de donde agrupando términos se tiene :

$$(A\,\text{Cos}^2\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Sen}^2\theta)\,x'^2 + (-A\,\text{Sen}2\theta + B\,\text{Cos}2\theta + C\,\text{Sen}2\theta)\,x'y' +$$
$$(A\,\text{Sen}^2\theta - B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Cos}^2\theta)y'^2 + (D\,\text{Cos}\theta + E\,\text{Sen}\theta)x' + (-D\,\text{Sen}\theta + E\,\text{Cos}\theta)y' + F = 0$$

Haciendo :

$$\left.\begin{aligned} A' &= A\,\text{Cos}^2\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Sen}^2\theta \\ B' &= (C - A)\,\text{Sen}2\theta + B\,\text{Cos}2\theta \\ C' &= A\,\text{Sen}^2\theta - B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Cos}^2\theta \\ D' &= D\,\text{Cos}\theta + E\,\text{Sen}\theta \\ E' &= -D\,\text{Sen}\theta + E\,\text{Cos}\theta \\ F' &= F \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow\ A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad (4)$$

Luego, para eliminar el término $x'y'$, debemos tener $B' = 0$, esto es

$$-(A - C)\,\text{Sen}2\theta + B\,\text{Cos}2\theta = 0 \Leftrightarrow \text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C}\ ,\ A \neq C$$

Si $A = C \Rightarrow \text{Tg}2\theta = \alpha \Rightarrow 2\theta = 90°$, o sea : $\theta = 45°$

Por tanto, si se selecciona el ángulo de rotación θ como lo especifica el Teorema 9.1, la ecuación (4) toma la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

9.2 TIPOS DE CONICAS

La ecuación

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad (5)$$

representa :

a) Una elipse si $-A'C' < 0$, ya que A' y C' son de igual signo para una elipse.
b) Una parábola si $-A'C' = 0$, puesto que A' o C' son cero para una parábola.
c) Una hipérbola si $-A'C' > 0$, puesto que A' y C' son de signos opuestos para una hipérbola.

Usando las relaciones (3) del Teorema 9.1 podemos demostrar que

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC \qquad (6)$$

Como para la transformación es necesario que $B' = 0$, entonces la relación (6) se transforma en :

$$-4A'C' = B^2 - 4AC$$

y dado que el producto $-A'C'$ indica la naturaleza del lugar geométrico de la ecuación (5), llamamos *indicador* a este invariante, y denotaremos por la letra mayúscula I, es decir

$$I = B^2 - 4AC$$

Por tanto, enunciaremos el siguiente teorema

TEOREMA 9.2 La ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(en la que A y C no son ambos cero) representa una cónica de género elipse, parábola o hipérbola, según que el indicador, $I = B^2 - 4AC$, sea negativo, cero o positivo.

9.3 INVARIANTES

Una relación de los coeficientes de una ecuación general que no es alterada por una transformación de los ejes coordenados, se llama *invariante* de la ecuación relativa a ese cambio de los ejes. Así, las invariante por rotación son

a) $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$
b) $A' + C' = A + C$
c) $D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$
d) $F' = F$

EJERCICIOS . *Grupo 34*

1 Demostrar que la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante por rotación, demostrando que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$.

Demostración. En efecto, de las relaciones (3) del Teorema 9.1, se tiene

$$A' = A\,\text{Cos}^2\theta + C\,\text{Sen}^2\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta = \frac{A}{2}(1 + \text{Cos}2\theta) + \frac{C}{2}(1 - \text{Cos}2\theta) + \frac{B}{2}\text{Sen}2\theta$$

$$\Rightarrow 2A' = (A + C) + [(A - C)\,\text{Cos}2\theta + B\,\text{Sen}2\theta] \qquad (1)$$

$$C' = A\,\text{Sen}^2\theta + C\,\text{Cos}^2\theta - B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta = \frac{A}{2}(1 - \text{Cos}2\theta) + \frac{C}{2}(1 + \text{Cos}2\theta) - \frac{B}{2}\text{Sen}2\theta$$

$$\Rightarrow 2C' = (A + C) - [(A - C)\,Cos2\theta + B\,Sen2\theta]$$

Multiplicando (1) y (2) obtenemos

$$4A'C' = (A + C)^2 - [(A - C)\,Cos2\theta + B\,Sen2\theta]^2$$

$$= (A + C)^2 - [(A - C)^2Cos^2 2\theta + 2\,B(A - C)\,Sen2\theta\,Cos2\theta + B^2Sen^2 2\theta] \qquad (3)$$

$$B' = -2(A - C)\,Sen\theta\,Cos\theta + B(Cos^2\theta - Sen^2\theta) = -(A - C)\,Sen2\theta + BCos2\theta$$

$$\Rightarrow B'^2 = (A - C)^2\,Sen^2 2\theta - 2B(A - C)\,Sen2\theta\,Cos2\theta + B^2Cos^2 2\theta \qquad (4)$$

Por tanto, restando (4) - (3) se sigue que :

$$B'^2 - 4A'C' = (A - C)^2\,Sen^2 2\theta - 2B(A - C)\,Sen2\theta\,Cos2\theta + B^2\,Cos^2 2\theta$$
$$- (A + C)^2 + (A - C)^2\,Cos^2 2\theta + 2B(A - C)\,Sen2\theta\,Cos2\theta + B^2\,Sen^2 2\theta$$
$$= (A - C)^2 - (A + C)^2 + B^2$$
$$= B^2 - 4AC$$ ■

2 Demostrar que la cantidad A + C es invariante por rotación haciendo ver que $A' + C' = A + C$

Demostración. En efecto, por las relaciones (3) del Teorema 9.1 se tiene

$$A' = A\,Cos^2\theta + B\,Sen\theta\,Cos\theta + C\,Sen^2\theta$$
$$C' = A\,Sen^2\theta - B\,Sen\theta\,Cos\theta + C\,Cos^2\theta$$
$$\Rightarrow A' + C' = A\,(Cos^2\theta + Sen^2\theta) + C(Sen^2\theta + Cos^2\theta) = A + C$$ ■

En los ejercicios 6 - 16, determinar la naturaleza de la cónica que representa la ecuación dada, y reducir la ecuación a su forma canónica por transformación de coordenadas. Trazar el lugar geométrico, cuando exista, y todos los sistemas de ejes coordenados.

6 $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica. Por el indicador $I = B^2 - 4AC$

$I = (-24)^2 - 4(4)(11) = 400 > 0$, la cónica es de naturaleza hiperbólica.

2. Angulo de rotación : $Tg2\theta = \dfrac{B}{A - C} = \dfrac{-24}{4 - 11} = \dfrac{24}{7}$

De $Tg2\theta$ podemos obtener $Cos2\theta$ por medio del triángulo rectángulo, este es , $Cos2\theta = 7/25$. Por ser el ángulo θ agudo, 2θ está en el primer o en el segundo cuadrantes en donde el coseno y la tangente tienen el mismo signo. Luego , los valores de $Sen\theta$ y $Cos\theta$ podemos obtenerlos por las fórmulas

$$\text{Sen } \theta = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 7/25}{2}} = 3/5$$

$$\text{Cos } \theta = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos}2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 7/25}{2}} = 4/5$$

3. Transformación de la ecuación a la forma semireducida

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad (1)$$

$A' = A\,\text{Cos}^2\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Sen}^2\theta$

$= 4(4/5)^2 + (-24)(3/5)(4/5) + 11(3/5)^2 = -5$

$A' + C' = A + C \Rightarrow -5 + C' = 4 + 11 \Leftrightarrow C' = 20$

$D' = D\,\text{Cos}\theta + E\,\text{Sen}\theta = 56(4/5) - 58(3/5) = 10$

$E' = E\,\text{Cos}\theta - D\,\text{Sen}\theta = -58(4/5) - 56(3/5) = -80$

Por tanto, en (1), la ecuación transformada es

$-5x'^2 + 20y'^2 + 10x' - 80y' + 95 = 0$

$\Rightarrow x'^2 - 4y'^2 - 2x' + 16y' - 19 = 0$

4. Reducción a la forma canónica

Completando cuadrados se tiene

$(x'^2 - 2x' + 1) - 4(y'^2 - 4y' + 4) = 19 + 1 - 16$

$\Rightarrow (x' - 1)^2 - 4(y' - 2)^2 = 4$

Haciendo las sustituciones :

$x' - 1 = x\ ,\ \ y' - 2 = y$

obtenemos la ecuación reducida

$\mathscr{H}: x''^2 - 4y''^2 = 4$ ■

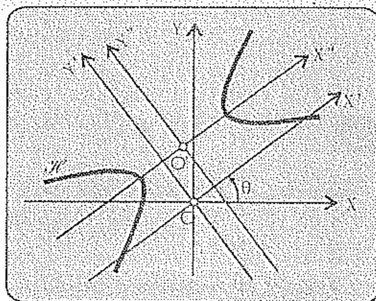


FIGURA 9.1

7 $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 4\sqrt{13}y + 117 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC$

$I = (-12)^2 - 4(4)(9) = 0$; la cónica es de naturaleza parabólica.

2. Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-12}{4 - 9} = \frac{12}{5} \Rightarrow \text{Cos } 2\theta = \frac{5}{13}$

Luego ; $\text{Sen } \theta = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 5/13}{2}} = 2/\sqrt{13}$

$$\text{Cos } \theta = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos}2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 5/13}{2}} = 3/\sqrt{13}$$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad (1)$

$A' = A\,\text{Cos}^2\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Sen}^2\theta$

$= 4(9/13) + (-12)(6/13) + 9(4/13) = 0$

$A' + C' = A + C \Rightarrow C = 4 + 9 = 13$

$D' = D \operatorname{Cos}\theta + E \operatorname{Sen}\theta = -8\sqrt{13}\,(3/\sqrt{13}) - 14\sqrt{13}\,(2/\sqrt{13}) = -52$

$E' = E \operatorname{Cos}\theta - D \operatorname{Sen}\theta = -14\sqrt{13}\,(3/\sqrt{13}) + 8\sqrt{13}\,(2/\sqrt{13}) = -26$

Luego, en (1) : $13y'^2 - 52x' - 26y + 117 = 0$

$\Rightarrow y'^2 - 4x' - 2y' + 9 = 0$

4. Reducción a la forma canónica.

Completando el cuadrado para la variable y :

$y'^2 - 2y' + 1 = 4x' - 9 + 1$

$\Rightarrow (y' - 1)^2 = 4(x' - 2)$

Haciendo : $y' - 1 = y''$, $x' - 2 = x''$

obtenemos la ecuación reducida

$\mathscr{P}: y''^2 = 4x''$ ■

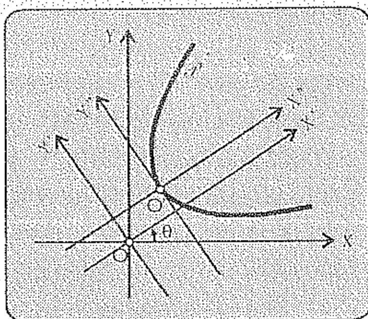


FIGURA 9.2

8 $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC$

$\Rightarrow I = (-4)^2 - 4(3)(-4) = 64 > 0$. La cónica es de naturaleza hiperbólica.

2. Angulo de rotación : $\operatorname{Tg}2\theta = \dfrac{B}{A - C} = \dfrac{-4}{3+4} = -\dfrac{4}{7} \Rightarrow \operatorname{Cos}2\theta = -7/\sqrt{65}$

Usando las fórmulas del ángulo mitad obtenemos

$$\operatorname{Sen}\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{65}+7}{2\sqrt{65}}} \quad \text{y} \quad \operatorname{Cos}\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{65}-7}{2\sqrt{65}}}$$

Como Senθ y Cosθ no son números racionales, se trata de un caso degenerado. En efecto, factorizando la ecuación dada se tiene :

$$3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0$$

$$\begin{matrix} 3x & & 2y & & -2 \\ x & & -2y & & 6 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (3x + 2y - 2)(x - 2y + 6) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : 3x + 2y - 2 = 0 \ \vee \ \mathscr{L}_2 : x - 2y + 6 = 0$

Por tanto, el lugar geométrico es un par de rectas concurrentes. ■

9 $5x_2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC$

$\Rightarrow$ I = $(2)^2 - 4(5)(10) = -196 < 0$. La cónica es de naturaleza elíptica.

2. Angulo de rotación : $Tg2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{2}{5-10} = -\frac{2}{5} \Rightarrow Cos2\theta = -5/\sqrt{29}$

Por lo que : $Sen\,\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{29}+5}{2\sqrt{29}}}$ y $Cos\,\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{29}-5}{2\sqrt{29}}}$

Como el Senθ y Cosθ no son números racionales, el lugar geométrico dado debe ser un punto o un conjunto vacío.
Para determinar cual de estos casos degenerados representa el lugar geométrico, debemos eliminar los términos de primer grado sustituyendo las ecuaciones de traslación : $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación dada :

$5(x'+h)^2 + 2(x'+h)(y'+k) + 10(y'+k)^2 - 12(x'+h) - 22(y'+k) + 17 = 0$

de donde se tiene :

$5x'^2 + 2x'y' + 10y'^2 + (10h + 2k - 12)x' + (2h + 20k - 22)y' + 5h^2 + 2hk + 10k^2 - 12h - 22k + 17 = 0$ (1)

Si $x' = y' = 0 \Rightarrow (10h + 2k - 12 = 0) \wedge (2h + 20k - 22 = 0)$

La solución común del sistema es : h = 1 y k = 1

Sustituyendo estos valores en (1) obtenemos : $5x'^2 + 2x'y' + 10y'^2 = 0$ (2)

Vemos que $x' = 0$ e $y' = 0$ satisfacen la ecuación (2), luego, en el sistema X'O'Y' esta ecuación representa el punto O'(0 , 0) y en el sistema XOY, la ecuación dada representa el punto (1 , 1). ■

10 $x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x - 16y + 7 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC = (8)^2 - 4(1)(16) = 0$

La cónica es de naturaleza parabólica.

2. Angulo de rotación : $Tg2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{8}{1-16} = -\frac{8}{15} \Rightarrow Cos2\theta = -\frac{15}{17}$

$\Rightarrow Sen\,\theta = \sqrt{\frac{1-Cos2\theta}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ y $Cos\,\theta = \sqrt{\frac{1+Cos2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

$A' = ACos^2\theta + B\,Sen\theta\,Cos\theta + C\,Sen^2\theta = 1\left(\frac{1}{17}\right) + 8\left(\frac{4}{17}\right) + 16\left(\frac{16}{17}\right) = 17$

$A' + C' = A + C \Rightarrow 17 + C' = 1 + 16 \Rightarrow C' = 0$

$D' = D\,Cos\theta + E\,Sen\theta = -4(1/\sqrt{17}) - 16(4/\sqrt{17}) = -4\sqrt{17}$

$E' = E\,\text{Cos}\theta - D\,\text{Sen}\theta = -16(1/\sqrt{17}) + 4(4/\sqrt{17}) = 0$

Luego , en (1) tenemos : $17x'^2 - 4\sqrt{17}\,x' + 7 = 0$ (2)

Como las raíces de la ecuación (2) son imaginarias, la ecuación del lugar geométrico es un caso degenerado, es decir no representa una parábola sino un conjunto vacío. ■

11 $12x^2 + 12xy + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC = (12)^2 - 4(12)(7) = -192 < 0$

La cónica es de naturaleza elíptica

2. Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{12}{12 - 7} = \frac{12}{5} \Rightarrow \text{Cos}2\theta = \frac{5}{13}$

$$\Rightarrow \text{Sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \text{y} \quad \text{Cos}\,\theta = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos}2\theta}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

$A' = A\,\text{Cos}^2\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Sen}^2\theta = 12\left(\frac{9}{13}\right) + 12\left(\frac{6}{13}\right) + 7\left(\frac{4}{13}\right) = 16$

$A' + C' = A + C \Rightarrow 16 + C' = 12 + 7 \Rightarrow C' = 3$

$D' = D\,\text{Cos}\theta + E\,\text{Sen}\theta = -4\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 6\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 0$

$E' = E\,\text{Cos}\theta - D\,\text{Sen}\theta = 6\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 4\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 2\sqrt{13}$

Luego , en (1) : $16x'^2 + 3y'^2 + 2\sqrt{13}\,y' - 1 = 0$

4. Reducción a la forma canónica

$$16x'^2 + 3\left(y'^2 + \frac{2\sqrt{13}}{3} + \frac{13}{9}\right) = 1 + \frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow 16x'^2 + 3\left(y' + \frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

Por tanto : $48x''^2 + 9\,y''^2 = 16$, es la ecuación canónica de la elipse mostrada en la Figura 9.3 ■

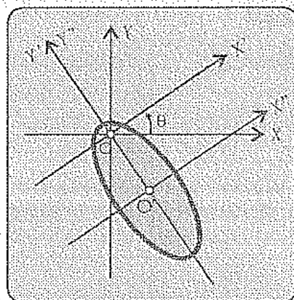


FIGURA 9.3

12 $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC = (-12)^2 - 4(2)(18) = 0$

La cónica es de naturaleza parabólica

2. Angulo de rotación : $Tg2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-12}{2 - 18} = \frac{3}{4} \Rightarrow Cos2\theta = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow Sen\,\theta = \sqrt{\frac{1 - Cos2\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad , \quad Cos\,\theta = \sqrt{\frac{1 + Cos2\theta}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

$A' = A\,Cos^2\theta + B\,Sen\theta\,Cos\theta + C\,Sen^2\theta = 2\left(\frac{9}{10}\right) - 12\left(\frac{3}{10}\right) + 18\left(\frac{1}{10}\right) = 0$

$A' + C' = A + C \Rightarrow C' = 2 + 18 = 20$

$D' = D\,Cos\theta + E\,Sen\theta = 1\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0$

$E' = E\,Cos\theta - D\,Sen\theta = -3\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - 1\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{10}$

Luego , en (1) : $20y'^2 - \sqrt{10}\,y' - 6 = 0$

$\Leftrightarrow y' = \frac{\sqrt{10}}{5} \;\vee\; y' = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$

El lugar geométrico es un caso degenerado , representa un par de rectas paralelas. ■

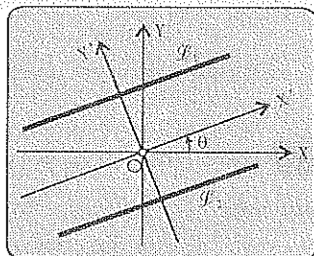


FIGURA 9.4

13 $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0$

El ejercicio se deja a cargo del lector.

Sol. La cónica es de naturaleza hiperbólica : $216y''^2 - 9x''^2 = 24$

14 $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}\,x - 6\sqrt{2}\,y + 2 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(3)(3) = -32 < 0$

$\therefore$ La cónica es de naturaleza elíptica

2. Angulo de rotación : $Tg2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-2}{3 - 3} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90° \Leftrightarrow \theta = 45°$

Luego , $Sen\theta = Cos\theta = \sqrt{2}/2$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

$A' = A\,Cos^2\theta + B\,Sen\theta\,Cos\theta + C\,Sen^2\theta = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$A' + C' = A + C \Rightarrow 2 + C' = 3 + 3 \Rightarrow C' = 4$

$D' = D\,\text{Cos}\theta + E\,\text{Sen}\theta = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4$

$E' = E\,\text{Cos}\theta - D\,\text{Sen}\theta = -6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -8$

$F' = F = 2$

Luego, en (1) : $2x'^2 + 4y'^2 - 4x' - 8y' + 2 = 0$

$\Rightarrow x'^2 + 2y'^2 - 2x' - 4y' + 1 = 0$

4. Reducción a la forma canónica

$(x'^2 - 2x' + 1) + 2(y'^2 - 2y' + 1) = -1 + 1 + 2$

$\Rightarrow (x' - 1)^2 + 2(y' - 1)^2 = 2$

Haciendo las sustituciones :

$x' - 1 = x'' \;,\; y' - 1 = y''$

obtenemos la forma canónica : $x''^2 + 2y''^2 = 2$ ■

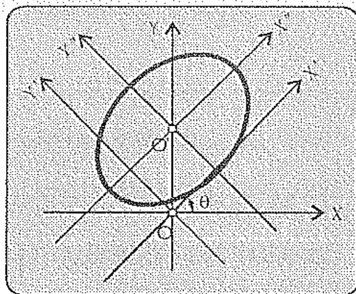


FIGURA 9.5

15 $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC = (-20)^2 - 4(4)(25) = 0$

$\therefore$ La cónica es de naturaleza parabólica

2. Angulo de rotación : $\text{Tg}2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{-20}{4 - 25} = \frac{20}{21} \Rightarrow \text{Cos}2\theta = \frac{21}{29}$

$\Rightarrow \text{Sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{24}} \quad , \quad \text{Cos}\,\theta = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos}2\theta}{2}} = \frac{5}{\sqrt{24}}$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

$A' = A\,\text{Cos}\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Sen}^2\theta = 4\left(\frac{25}{29}\right) - 20\left(\frac{10}{25}\right) + 25\left(\frac{4}{29}\right) = 0$

$A' + C' = A + C \Rightarrow C' = 4 + 25 = 29$

$D' = D\,\text{Cos}\theta + E\,\text{Sen}\theta = 4(5/\sqrt{29}) - 10(2/\sqrt{29}) = 0$

$E' = E\,\text{Cos}\theta - D\,\text{Sen}\theta = -10(5/\sqrt{29}) - 4(2/\sqrt{29}) = -2\sqrt{29}$

$F' = F = 1$

Luego, en (1) : $29y'^2 - 2\sqrt{29}\,y' + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{29}\,y' - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{29}\,y' - 1 = 0$

El lugar geométrico representa una recta. ■

16 $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(1)(1) = 0$

$\therefore$ La cónica es de naturaleza parabólica.

2. Angulo de rotación : Como A = C , $\theta = 45° \Rightarrow Sen\theta = Cos\theta = \sqrt{2}/2$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

$A' = A\,Cos^2 + B\,Sen\theta\,Cos\theta + C\,Sen^2\theta = 1(1/2) + 2(1/2) + 1(1/2) = 2$

$A' + C' = A + C \Rightarrow 2 + C' = 1 + 1 \Leftrightarrow C' = 0$

$D' = D\,Cos\theta + E\,Sen\theta = 2(\sqrt{2}/2) - 2(\sqrt{2}/2) = 0$

$E' = E\,Cos\theta - E\,Sen\theta = -2(\sqrt{2}/2) - 2\sqrt{2}/2 = -2\sqrt{2}$

$F' = F = 1$

Luego, en (1) : $2x'^2 - 2\sqrt{2}\,y' = 1 = 0$

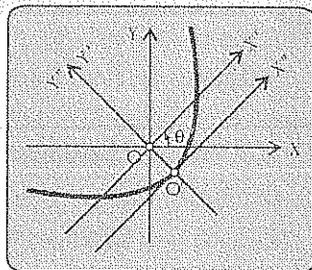


FIGURA 9.6

4. Reducción a la forma canónica

$2x'^2 = 2\sqrt{2}\,y' + 1 \Rightarrow (x' - 0)^2 = \sqrt{2}\,(y' + \sqrt{2}/4)$

Haciendo las sustituciones : $x' = x''$, $y' + \sqrt{2}/4 = y''$

obtenemos la forma reducida

$$x''^2 = \sqrt{2}\,y''$$

17 Por una rotación de ejes coordenados, transformar la ecuación $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$ en otra que carezca del término $x'y'$. Trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4(9)(16) = 0$

$\therefore$ La cónica es de naturaleza parabólica.

2. Angulo de rotación : $Tg2\theta = \dfrac{B}{A - C} = \dfrac{-24}{9 - 16} = \dfrac{24}{7} \Rightarrow Cos2\theta = \dfrac{7}{25}$

$$\Rightarrow Sen\,\theta = \sqrt{\frac{1 - Cos2\theta}{2}} = \frac{3}{5} \quad , \quad Cos\,\theta = \sqrt{\frac{1 + Cos2\theta}{2}} = \frac{4}{5}$$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

$A' = A\,Cos^2\theta + B\,Sen\theta\,Cos\theta + C\,Sen^2\theta =$

$$9\left(\frac{16}{25}\right) - 24\left(\frac{12}{25}\right) + 16\left(\frac{9}{25}\right) = 0$$

$A' + C' = A + C \Rightarrow C' = 9 + 16 = 25$

$D' = D\,Cos\theta + E\,Sen\theta = -40\left(\frac{4}{5}\right) - 30\left(\frac{3}{5}\right) = -50$

$E' = E\,Cos\theta - D\,Sen\theta = -30\left(\frac{4}{5}\right) + 40\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

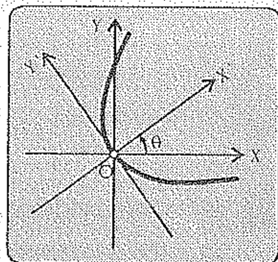


FIGURA 9.7

Luego, en (1) se tiene : $25y'^2 - 50x' = 0$

$$\Rightarrow \; y'^2 = 2x'$$

La Figura 9.7 muestra la gráfica del lugar geométrico junto a ambos sistemas de ejes coordenados. ■

18 Por una transformación de coordenadas simplificar la ecuación $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$. Trácese el lugar geométrico y todos los sistemas de ejes coordenados.

Solución. 1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 = 4AC = (-2)^2 - 4(3)(3) = -32 < 0$

$\therefore$ La cónica es de naturaleza elíptica.

2. Angulo de rotación. Como $A = C \Rightarrow \theta = 45°$ y $\text{Sen}\theta = \text{Cos}\theta = \sqrt{2}/2$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

$$A' = A\,\text{Cos}^2\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Sen}^2\theta = 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$A' + C' = A + C \Rightarrow 2 + C' = 3 + 3 \Rightarrow C' = 4$

$D' = D\,\text{Cos}\theta + E\,\text{Sen}\theta =$

$$-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6\sqrt{2}$$

$E' = E\,\text{Cos}\theta - D\,\text{Sen}\theta =$

$$-10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}$$

$F' = F = 9$

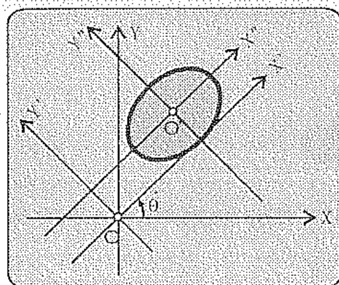


FIGURA 9.8

Luego, en (1) : $2x'^2 + 4y'^2 - 6\sqrt{2}\,x' - 4\sqrt{2}\,y' + 9 = 0$

4. Reducción a la forma canónica

$$2\left(x'^2 - 3\sqrt{2}\,x' + \frac{9}{2}\right) + 4\left(y'^2 - \sqrt{2}\,y' + \frac{1}{2}\right) = -4 + 9 + 2$$

$$\Rightarrow \left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

Haciendo las sustituciones : $x'' = x' - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $y'' = y' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; obtenemos la forma canónica de la elipse : $x''^2 + 2y''^2 = 1$ ■

19 Elevando al cuadrado dos veces , elimínense las radicales de la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Demostrar que el lugar geométrico de la ecuación resultante es

una parábola, y determinar que porción de esta curva representa el lugar geométrico de la ecuación original.

Demostración. Si $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \Rightarrow x = 1 - 2\sqrt{y} + y \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = y - x = 1$

Elevando nuevamente al cuadrado obtenemos la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

1. Naturaleza de la cónica : $I = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$

   $\therefore$ La cónica es de naturaleza parabólica.

2. Angulo de rotación: Como $A = C$, $\theta = 45° \Rightarrow \text{Sen}\theta = \text{Cos}\theta = \sqrt{2}/2$

3. Ecuación semireducida : $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ (1)

   $A' = A\,\text{Cos}^2\theta + B\,\text{Sen}\theta\,\text{Cos}\theta + C\,\text{Sen}^2\theta = 1\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

   $A' + C' = A + C \Rightarrow C' = 1 + 1 = 2$

   $D' = D\,\text{Cos}\theta + E\,\text{Sen}\theta = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$

   $E' = E\,\text{Cos}\theta - D\,\text{Sen}\theta = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

   Luego, en (1) : $2y'^2 - 2\sqrt{2}\,x' + 1 = 0$

4. Reducción a la forma canónica

   $$(y' - 0)^2 = \sqrt{2}\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

   Haciendo las sustituciones :

   $$y' = y'' \;,\; x' - \frac{\sqrt{2}}{4} = x''$$

   Obtenemos la forma canónica : $y''^2 = \sqrt{2}\,x''$

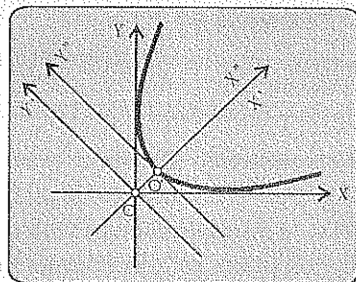


FIGURA 9.9

El lugar geométrico es una parábola cuya gráfica abarca todo el primer cuadrante. ■

20 Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen sea el punto (h , k), demostrar que la ecuación general

$$f(x, y) : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se transforma en otra ecuación cuyo término constante es igual a $f(h, k)$.

Demostración. En efecto, sustituyendo las ecuaciones de traslación en la ecuación dada se tiene :

$$A(x' + h)^2 + B(x' + h)(y' + k) + C(y' + k)^2 + D(x' + h) + E(y' + k) + F = 0$$

De donde, efectuando y agrupando términos obtenemos :

$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Ah + Bk + D)x' + (2Ck + Bh + E)y' +$

$$(Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) = 0 \qquad (1)$$

Pero , si $f(x, y) \equiv Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$

$\Rightarrow f(h, k) \equiv Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F$

Por tanto, en (1) , tenemos :

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Ah + Bk + D)x' + (2Ck + Bh + E)y' + f(h, k) = 0$$ ■

9.4 DEFINICION GENERAL DE CONICA

Dada una recta fija ℓ y un punto F no contenido en esa recta, se llama *cónica* al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de ℓ y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de ℓ es siempre igual a una constante positiva. La recta fija se llama *directriz*, el punto fijo F, *foco*, y la constante positiva, denota por e , *excentricidad*.

TEOREMA 9.4 Una cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola, según que su excentricidad sea igual o , menor que , o mayor que la unidad.

Demostración. En efecto, consideremos el eje Y como la directriz del foco F(p , 0) , p ≠ 0 . Sea P(x , y) un punto cualquiera del lugar geométrico. Por la definición anterior, P debe satisfacer la condición geométrica

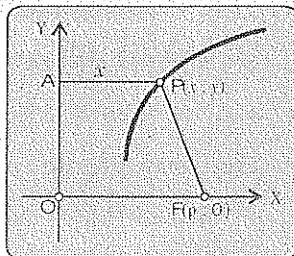


FIGURA 9.10

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} = e$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x - p)^2 + y^2}}{|x|} = e \Rightarrow (1 - e^2)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0 \qquad (1)$$

Completando el cuadrado en x , podemos reducir (1) a la forma canónica

$$\frac{\left(x - \dfrac{p}{1 - e^2}\right)^2}{\dfrac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{p^2 e^2}{1 - e^2}} = 1 \qquad (2)$$

1. Si $e = 1$, la ecuación (1) toma la forma

$$-2px + y^2 + p^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2p(x - p/2)$$

ecuación que representa una parábola con vértice en (p/2 , 0) y cuyo eje coincide con el eje X.

2. Si $e < 1$, entonces $1 - e^2 > 0$ y ambos denominadores en el primer miembro de la ecuación (2) son positivos.
Por tanto, el lugar geométrico de la ecuación (2) es una elipse.

3. Si $e > 1$, entonces $1 - e^2 < 0$. Con el fin de tener ambos denominadores positivos, escribimos la ecuación (2) en la forma

$$\frac{\left(x - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{p^2 e^2}{e^2 - 1}} = 1 \qquad (3)$$

Evidentemente, el lugar geométrico de la ecuación (3) es una hipérbola.

TEOREMA 9.5 Para la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, cada una de excentricidad e , los focos $(a e , 0)$ y $(- a e , 0)$ tienen como directrices correspondientes las rectas cuyas ecuaciones son $x = a/e$ y $x = - a/e$, respectivamente.

EJERCICIOS . *Grupo 35*

En cada uno de los ejercicios 1 - 5 , hallar la ecuación de la cónica respectiva a partir de los datos dados.

1 Foco F(0 , 0) , directriz , $\mathscr{L} : x + 2y + 2 = 0$; excentricidad = 1.

Solución. Sea P(x , y) un punto cualquiera de la cónica buscada.

Por definición de excentricidad : $e = \dfrac{d(P , F)}{d(P , \mathscr{L})}$

Entonces ; si : $1 = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\frac{|x + 2y + 2|}{\sqrt{1 + 4}}} \Leftrightarrow |x + 2y + 2| = \sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando obtenemos :

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$$ ■

2 Foco , F(1 , -2) , directriz , $\mathscr{L}: x - 2y = 0$; excentricidad = $\sqrt{5}/3$

Solución. Si P(x , y) es un punto cualquiera de la cónica, entonces por definición de

excentricidad : $e = \dfrac{d(\mathrm{P}, \mathrm{F})}{d(\mathrm{P}, \mathscr{L})}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}{\dfrac{|x - 2y|}{\sqrt{1+4}}} \Leftrightarrow |x - 2y| = 3\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando obtenemos la ecuación de la cónica buscada : $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x + 36y + 45 = 0$ ■

3 Foco, F(-1 , -1) ; directriz , $\mathscr{L}: 4x + 3y - 12 = 0$; excentricidad = 5

Solución. Sea P(x , y) un punto cualquiera de la cónica, entonces por definición de

excentricidad : $e = \dfrac{d(\mathrm{P}, \mathrm{F})}{d(\mathrm{P}, \mathscr{L})}$

$$\Rightarrow 5 = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}}{\dfrac{|4x + 3y - 12|}{5}} \Leftrightarrow |4x + 3y - 12| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

de donde , elevando al cuadrado, obtenemos la ecuación de la cónica

$$17x^2 + 24xy + 8y^2 - 98x - 74y + 142 = 0$$ ■

4 Foco , F(0 , 3) ; directriz ; $\mathscr{L}: x + 3y - 3 = 0$; excentricidad = 2

Solución. Sea P(x , y) un punto cualquiera de la cónica.

Por definición de excentricidad : $e = \dfrac{d(\mathrm{P}, \mathrm{F})}{d(\mathrm{P}, \mathscr{L})}$

$$\Rightarrow 2 = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}}{\dfrac{|x + 3y - 3|}{\sqrt{1+9}}} \Leftrightarrow 2|x + 3y - 3| = \sqrt{10}\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

De donde, elevando ambos miembros al cuadrado , obtenemos

$$3x^2 - 12xy - 13y^2 - 18x + 36y + 72 = 0$$ ■

6 Foco, F(1 , -3) ; directriz , $\mathscr{L}$: $3x + y - 3 = 0$; excentricidad = $\sqrt{10}/4$

La solución se deja a cargo del lector.

Sol. $7x^2 - 6xy + 15y^2 - 14x + 102y + 151 = 0$

7 Hallar las coordenadas del vértice de la parábola del Ejercicio 1.

Solución. Datos del ejercicio : F(0 , 0) ; directriz , $\mathscr{L}$: $x + 2y + 2 = 0$ y la parábola

$$\mathscr{P}: 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$$

El eje de la parábola, perpendicular a la directriz, pasa por F(0 , 0), entonces su ecuación es de la forma $y = mx$, esto es, $\mathscr{L}_1$: $y = 2x$

Por lo tanto : $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{P} =$ V(- 1/5 , - 2/5) ■

8 Determinar las coordenadas del centro de la cónica que tiene por foco el punto F(-1 , -2), directriz la recta $\mathscr{L}$: $x - y + 1 = 0$ y excentricidad $e = 1/2$

Solución. Sea P(x , y) un punto de la cónica $\Rightarrow e = \dfrac{d(\text{P} ; \text{F})}{d(\text{P} ; \mathscr{L})}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}}{\dfrac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow |x - y + 1| = 2\sqrt{2}\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$$

de donde, elevando al cuadrado obtenemos la ecuación

$$\mathscr{E}: 7x^2 + 2xy + 7y^2 + 14x + 34y + 39 = 0$$

Como el eje focal es perpendicular a la directriz $\mathscr{L}$: $x - y + 1 = 0$, su ecuación es :

$y + 2 = -(x + 1) \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + y + 3 = 0$

$$\Rightarrow \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{E} = \text{V}_1(0 , -3) \text{ y } \text{V}_2(-4/3 , -5/3)$$

El centro C biseca al segmento $\overline{\text{V}_1\text{V}_2} \Rightarrow \text{C}\left(\dfrac{0 - 4/3}{2} , \dfrac{-3 - 5/3}{2}\right) \Leftrightarrow$ C(-2/3 , -7/3) ■

9 Demostrar que la ecuación : $\dfrac{\left(x + \dfrac{e^2\text{k} - c}{1 - e^2}\right)^2}{\dfrac{e^2(\text{k} - c)^2}{(1 - e^2)^2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{e^2(\text{k} - c)^2}{1 - e^2}} = 1$

se deduce de la ecuación : $\dfrac{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}{|x - \text{k}|} = e$

Demostración. En efecto, de la ecuación dada : $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = e\,|x-\mathrm{k}|$

Elevando al cuadrado y ordenando términos obtenemos

$$(1-e^2)x^2 + 2(e^2\mathrm{k}-c)x + y^2 = e^2\mathrm{k}^2 - c^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2(e^2\mathrm{k}-c)}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2\mathrm{k}^2-c^2}{1-e^2} \quad , \quad e \neq 1$$

Completando el cuadrado para la variable x se tiene :

$$x^2 + \frac{2(e^2\mathrm{k}-c)}{1-e^2}x + \left(\frac{e^2\mathrm{k}-c}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2\mathrm{k}^2-c^2}{1-e^2} + \left(\frac{e^2\mathrm{k}-c}{1-e^2}\right)^2$$

de donde : $\left(x + \dfrac{e^2\mathrm{k}-c}{1-e^2}\right)^2 + \dfrac{y^2}{1-e^2} = \dfrac{e^2(\mathrm{k}-c)^2}{(1-e^2)^2}$

Dividiendo ambos miembros entre $\dfrac{e^2(\mathrm{k}-c)^2}{(1-e^2)^2}$, encontramos la ecuación buscada. ■

10 En la ecuación del Ejercicio 9, demostrar que si $\mathrm{k} = a/e$, el denominador $\dfrac{e^2(\mathrm{k}-c)^2}{(1-e^2)^2}$, es igual a a^2 y el denominador $\dfrac{e^2(\mathrm{k}-c)^2}{1-e^2}$ es igual a b^2.

Demostración. En efecto, si $\mathrm{k} = a/e$ y $c = a\,e$, entonces

$$\frac{e^2(\mathrm{k}-c)^2}{(1-e^2)^2} = \frac{e^2(a/e-a\,e)^2}{(1-e^2)^2} = \frac{(a-a\,e^2)^2}{(1-e^2)^2} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2)^2} = a^2$$

$$\frac{e^2(\mathrm{k}-c)^2}{1-e^2} = \frac{e^2(a/e-a\,e)^2}{1-e^2} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2} = a^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right) = a^2-c^2 = b^2 \quad ■$$

11 Demostrar que el punto $(-a\,e\,,0)$ y la recta $x = -a/e$ son un foco y una directriz correspondiente a la elipse $\mathscr{E} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Demostración. En efecto, los focos de la elipse $\mathscr{E}$ tienen por coordenadas $(\pm c\,,0)$, pero como $e = c/a \Rightarrow c = a\,e$, luego el foco izquierdo tendrá por coordenadas : $F_2(-a\,e\,,0)$

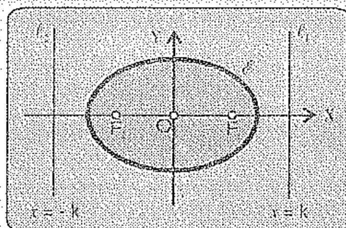


FIGURA 9.11

Dado que la ecuación : $\mathscr{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y la ecuación dada en el Ejercicio 9 representan el mismo lugar geométrico, es decir, una elipse con centro en el origen, se sigue que :

$$e^2k - c = 0 \Rightarrow k = c/e^2 = ae/e^2 \Rightarrow k = a/e$$

Por lo tanto, la directriz correspondiente al foco F_2, tendrá por ecuación

$$\ell_2 : x = -a/e$$ ■

En cada uno de los ejercicios 12 - 16, hallar las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices correspondientes de la cónica cuya ecuación se da. Dibujar una figura para cada ejercicio.

12 $5x^2 + 9y^2 = 45$

Solución. Forma típica de la ecuación : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

de donde se tiene : $a = 3$ y $b = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow c = 2$

Coordenadas de los focos : $F(\pm c, 0)$

$\Rightarrow F_1(2, 0)$, $F_2(-2, 0)$

Directrices : $x = \pm a^2/c \Rightarrow x = \pm 9/2$

$\Leftrightarrow \ell_1 : 2x - 9 = 0 \vee \ell_2 : 2x + 9 = 0$ ■

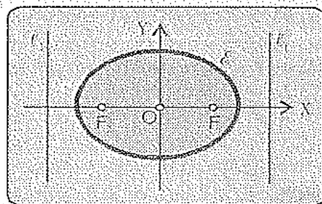


FIGURA 9.12

13 $16x^2 - 9y^2 = 144$

Solución. Forma típica de la ecuación : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

de donde obtenemos : $a = 3$ y $b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$

Coordenadas de los focos : $F(\pm c, 0)$

$\Rightarrow F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$

Directrices : $x = \pm a^2/c \Rightarrow x = \pm 9/5$

$\Leftrightarrow \ell_1 : 5x - 9 = 0 \vee \ell_2 : 5x + 9 = 0$ ■

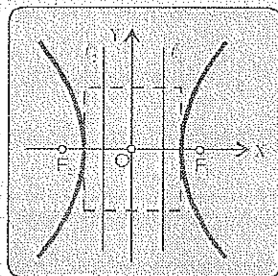


FIGURA 9.13

14 $5x^2 + y^2 = 5$

La solución se deja a cargo del lector. ***Sol.*** $F(0, \pm 2)$, $\ell : 2y \pm 5 = 0$

15 $2y^2 - 7x = 14$

La solución queda a cargo del lector *Sol.* $F(0, \pm 3)$, $\ell : 3y \pm 7 = 0$

16 $9x^2 + 25y^2 - 18x - 50y - 191 = 0$

Solución. La forma ordinaria de la ecuación es

$$\mathscr{E} : \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

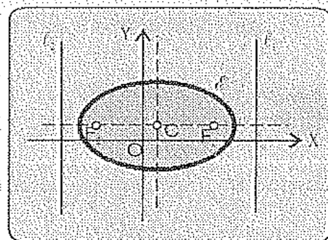


FIGURA 9.14

de donde obtenemos : $h = k = 1$, $a = 5$ y $b = 3$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

Coordenadas de los focos : $F(h \pm c , k)$

$$\Rightarrow F_1(5 , 19) \text{ y } F_2(-3 , 1)$$

Directrices : $x = h \pm a^2/c \Rightarrow x = 1 \pm 25/4$

$$\Leftrightarrow \ell_1 : 4x - 29 = 0 \vee \ell_2 : 4x + 21 = 0$$ ■

17 Demostrar el Teorema 9.5 para la hipérbola.

Demostración. En efecto, sea la hipérbola : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

y sean las directrices : $x = h$ y $x = -h$ que corresponden a los focos $F_1(c , 0)$ y $F_2(-c , 0)$, respectivamente. Para el foco $F_1(c , 0)$ y su directriz $x = h$, tenemos por definición : $e = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x - h|}$

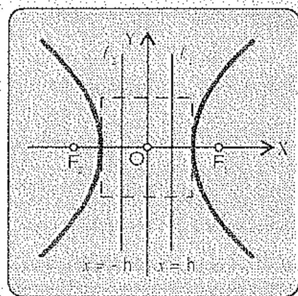


FIGURA 9.15

Elevando al cuadrado y ordenando términos se tiene

$$(e^2 - 1)x^2 + 2(c - e^2h)x - y^2 = c^2 - e^2h^2 \quad (2)$$

Como las ecuaciones (1) y (2) representan un mismo lugar geométrico, una hipérbola con centro en el origen , de la ecuación (2) se sigue que

$$c - e^2 h = 0 \Leftrightarrow h = c/e^2 = a\, e/e^2 \Rightarrow h = a/e$$

Por tanto, para el foco $F_1(c , 0)$ de la hipérbola (1), la directriz es $x = a/e$

Análogamente, para el foco $F_2(-c , 0)$, la directriz es $\ell_2 : x = - a/e$. ■

9.5 TANGENTE A LA CÓNICA GENERAL

TEOREMA 9.6 La ecuación de la tangente a la cónica general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en cualquier punto de contacto dado $P_1(x_1 , y_1)$ es

$$A\,x_1x + \frac{B}{2}(x_1y + y_1x) + C\,y_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0$$

EJERCICIOS . Grupo 36

1 Hallar las ecuaciones de la tangente y normal a la cónica $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 3 = 0$, en el punto T(1 , 2)

Solución. Por el Teorema 9.6 , la ecuación de la tangente es

$$1(1)x - \frac{2}{2}\,(y + 2x) + 1(2)\,y + \frac{1}{2}\,(x + 1) - \frac{1}{2}\,(y + 1) - 3 = 0$$

la cual se reduce a , $\mathscr{T}: 2x + y - 4 = 0$

Ecuación de la normal : $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{N}: x - 2y + 3 = 0$ ■

2 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la cónica $\mathscr{C}: x^2 - xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$, de pendiente 3.

Solución. Sea $P_1(x_1 , y_1)$ uno de los puntos de tangencia, entonces por el Teorema 9.6, la ecuación de la tangente es

$$x_1x - \frac{1}{2}(x_1y + y_1x) + \frac{2}{2}(x + x_1) - \frac{2}{2}(y + y_1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x_1 - y_1 + 2)x - (x_1 - 2y_1 + 2)\,y + 2x_1 - 2y_1 - 2 = 0$$

Si $m = 3 \Rightarrow \dfrac{2x_1 - y_1 + 2}{x_1 + 2y_1 - 2} = 3 \Leftrightarrow x_1 = 5y_1 - 4$ (1)

Además $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 + 2x_1 - 2y_1 - 1 = 0$ (2)

La solución del sistema formado por (1) y (2) da : $P_1(1 , 1)$ y $P_2(-7/3 , 1/3)$

Luego , para $P_1(1 , 1)$ se tiene : $y - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{T}_1: 3x - y - 2 = 0$

y para $P_2(-7/3 , 1/3)$: $y - 1/3 = 3(x + 7/3) \Leftrightarrow \mathscr{T}_2: 9x - 3y + 22 = 0$ ■

3 Hallar las ecuaciones de las tangentes a la cónica $\mathscr{C}: x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 6$ trazadas por el punto P(-3 , -7).

Solución. Sea $P_1(x_1, y_1)$ uno de los puntos de tangencia, entonces por el Teorema 9.6 , la ecuación de la tangente es

$$xx_1 - \frac{2}{2}(x_1y + y_1x) + y_1y + \frac{2}{2}(x_1 + x) = 6 \Rightarrow \mathscr{T}: (x_1 - y_1 + 1)x + (y_1 - x_1)y + x_1 - 6 = 0 \ (1)$$

Como $P(-3, -7) \in \mathscr{C} \Rightarrow (x_1 - y_1 + 1)(3) + (y_1 - x_1)(-7) + x_1 - 6 = 0 \Rightarrow 5x_1 - 4y_1 - 9 = 0$ (2)

Además $P_1(x_1, y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 - 2x_1 - 6 = 0$ (3)

La solución común de las ecuaciones (2) y (3) es : $P_1(1, -1)$ y $P_2(-15, -21)$

Sustituyendo las coordenadas de estos puntos en (1) , las ecuaciones de las tangentes son : $\mathscr{T}_1: 3x - 2y - 5 = 0 \vee \mathscr{T}_2: 7x - 6y - 28 = 0$ ■

4 Para el punto P(1 , 1) de la cónica $\mathscr{C}: x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$, hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal y las longitudes de la tangente, normal , subtangente y subnormal.

Solución. Por el Teorema 9.6 , la ecuación de la tangente en el punto P es

$$(1)x + \frac{2}{2}(y + x) + y + \frac{2}{2}(x - 1) - \frac{6}{2}(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{T}: 3x - y - 2 = 0$$

Ecuación de la normal : $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow \mathscr{N}: x + 3y - 4 = 0$

Longitud de la tangente : $t = |y_1/m|\sqrt{1 + m^2} = (1/3)\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}/3$

Longitud de la normal : $n = |y_1|\sqrt{1 + m^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

Longitud de la subtangente : $|\overline{ST}| = |y_1/m| = 1/3$

Longitud de la subnormal : $|\overline{SN}| = |m\,y_1| = 3$ ■

5 Hallar las ecuaciones de la tangentes a la cónica $\mathscr{C}: 3xy - 2x + y - 1 = 0$ que son perpendiculares a la recta $\mathscr{L}: 2x - 2y + 7 = 0$

Solución. Sea $P_1(x_1, y_1)$ uno de los puntos de tangencia. Por el Teorema 9.6 , la ecuación de la tangente es

$$\mathscr{T}: \frac{1}{2}(x_1y + y_1x) - \frac{2}{2}(x + x_1) + \frac{1}{2}(y + y_1) = 0$$

de donde se tiene , $\mathscr{T}: (3y_1 - 2)x + (3x_1 + 1)y - 2x_1 + y_1 - 2 = 0$ (1)

Dado que $\mathscr{T} \perp \mathscr{L} \Rightarrow -\dfrac{3y_1 - 2}{3x_1 + 1} = -1 \Leftrightarrow y_1 = x_1 + 1$ (2)

Además , $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow 3x_1y_1 - 2x_1 + y_1 - 1 = 0$ (3)

La solución del sistema formado por (2) y (3) es : $P_1(0 , 1)$ y $P_2(-2/3 , 1/3)$

Sustituyendo las coordenadas de estos puntos en (1) obtenemos las ecuaciones

$$\mathscr{T}_1 : x + y - 1 = 0 \;\; \vee \;\; \mathscr{T}_2 : 3x + 3y + 1 = 0$$ ■

6 Hallar el ángulo agudo de intersección de la recta $\mathscr{L}$: $2x - y - 1 = 0$ y la cónica $\mathscr{C}$: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ en cada uno de sus puntos de intersección.

Solución. Interceptando la recta $\mathscr{L}$ con la cónica $\mathscr{C}$ obtenemos los puntos $P_1(1 , 1)$ y $P_2(1/9 , -7/9)$.

Por el Teorema 9.6, las ecuaciones de las tangentes en estos puntos son, respectivamente : $x - 2(y + x) + 4y - (x + 1) + (y + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathscr{T}_1 : 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = 2/3$

$$\frac{1}{9}x - 2\left(\frac{1}{9}y - \frac{7}{9}x\right) + 4\left(-\frac{7}{9}\right)y - \left(x + \frac{1}{9}\right) + \left(y - \frac{7}{9}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{T}_2 : 6x - 21y = 17 \Rightarrow m_2 = 2/7$$

De la recta $\mathscr{L}$: $2x - y - 1 = 0$, se tiene , $m = 2$.

Luego : $$\text{Tg}\theta_1 = \left|\frac{m - m_1}{1 + m \cdot m_1}\right| = \left|\frac{2 - 2/3}{1 + 4/3}\right| = \frac{4}{7} \Rightarrow \theta_1 = 29°45'$$

$$\text{Tg}\theta_2 = \left|\frac{m - m_2}{1 + m \cdot m_2}\right| = \left|\frac{2 - 2/7}{1 + 4/7}\right| = \frac{12}{11} \Rightarrow \theta_2 = 47°29'$$ ■

7 Demostrar el Teorema 9.6

Demostración. En efecto, sea $P_1(x_1 + h , y_1 + k)$ otro punto de la cónica dada. Entonces, sus coordenadas deben satisfacer dicha ecuación, esto es

$$A(x_1 + h)^2 + B(x_1 + h)(y_1 + k) + C(y_1 + k)^2 + D(x_1 + h) + E(y_1 + k) + F = 0$$

Efectuando las operaciones indicadas y ordenando términos , se obtiene :

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + (2Ah + Bk + D)x + (Bh + 2kc + E)y_1 + Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0$$

Como $P_1(x_1 , y_1) \in \mathscr{C} \Rightarrow Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$ (1)

Restando ambas ecuaciones se tiene

$$(2Ah + Bk)x_1 + (Bh + 2kC)y_1 + Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek = 0$$

Ordenando en términos de h y k resulta :

$$(2Ax_1 + By_1 + Ah + Bk + D)h + (Bx_1 + 2Cy_1 + Ck + E)k = 0$$

de donde : $$\frac{k}{h} = -\frac{2Ax_1 + By_1 + Ah + Bk + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + Ck + E}$$

Ahora bién, la pendiente del segmento P_1P_2 es $m_1 = \frac{k}{h}$, y a medida que el punto P_2 recorre la curva hasta confundirse con P_1, la pendiente de $\overline{P_1P_2}$ coincide con la pendiente de la tangente en P_1 , esto , es , cuando $h \Rightarrow 0$ y $k \Rightarrow 0$, entonces el valor de esta pendiente es

$$m = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}$$

Por lo que la ecuación de la tangente es : $y - y_1 = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}(x - x_1)$

de donde efectuando operaciones se tiene :

$$2Ax_1x + B(x_1y + y_1x) + 2Cy_1y + D(x + x_1) + E(y + y_1) - 2(Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1) = 0$$

Dividiendo entre 2 y teniendo presente la ecuación (1) obtenemos :

$$Ax_1x + \frac{B}{2}(x_1y + y_1x) + Cy_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + E(y + y_1) + F = 0$$ ■

9 Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, en el punto de contacto $P_1(x_1 , y_1)$.

Solución. Por el Teorema 9.6 , la ecuación de la tangente es

$$x_1x + \frac{0}{2}(x_1y + y_1x) + y_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0$$

Efectuando operaciones , la ecuación se reduce a

$$(2x_1 + D)x + (2y_1 + E)y + (Dx_1 + Ey_1 + 2F) = 0$$ ■

10 Por tres métodos diferentes , hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en el punto P(5 , 7).

Solución. ***Método 1.*** Usando la propiedad de la tangente a una circunferencia.
Centro de la circunferencia dada : C(2 , 3)

La pendiente del radio $\overline{CP}$ es : $m = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$.

Como la tangente es perpendicular al radio en P , entonces : $m_t = -3/4$

Por lo que su ecuación es : $y - 7 = -\frac{3}{4}(x - 5) \Leftrightarrow \mathscr{T}: 3x + 4y - 43 = 0$

Método 2. Haciendo uso del Teorema 9.6

$$5x + \frac{0}{2}(5y+7x) + 7y - 2(x+5) - 3(y+7) - 12 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}: 3x + 4y - 43 = 0$$

Método 3. Es el método optativo o del discriminante.
Se deja a cargo del lector. ■

11 Suponiendo que k es una constante diferente a cero, demostrar que el triángulo formado por los ejes coordenados y cualquier tangente a la hipérbola $\mathcal{H}: xy = k$ tiene un área constante.

Demostración. En efecto, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la hipérbola.
Por el Teorema 9.6, la ecuación de la tangente en P_1 es

$$\frac{1}{2}(x_1 y + y_1 x) = k \Leftrightarrow \mathcal{T}: y_1 x + x_1 y = 2k$$

Interceptando $\mathcal{T}$ con los ejes coordenados se tiene : $a = \frac{2k}{y_1}$ y $b = \frac{2k}{x_1}$

Area del triángulo : $S = \frac{1}{2}|a\,b| = \frac{1}{2}\left(\frac{2k}{y_1}\right)\left(\frac{2k}{x_1}\right) = \frac{2k^2}{x_1 y_1}$ (1)

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{H} \Rightarrow x_1 y_1 = k$

Por tanto, en (1), se tiene : $S = 2k$ (Constante) ■

12 Si a es una constante diferente de cero, demostrar que la suma algebraica de los segmentos que una tangente cualquiera a la cónica $\mathcal{C}: x^2 - 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$, determina sobre los ejes coordenados es igual a a.

Demostración. En efecto, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la cónica, entonces, por el Teorema 9.6, la ecuación de la tangente es

$$x_1 x - (x_1 y + y_1 x) + y_1 y - a(x + x_1) - a(y + y_1) + a^2 = 0$$

de donde obtenemos : $(x_1 - y_1 - a)x - (a + x_1 - y_1)y - (ax_1 + ay_1 - a^2) = 0$

Interceptando esta ecuación con los ejes coordenados se tiene :

Si $y = 0 \Rightarrow x = \frac{ax_1 + ay_1 - a^2}{x_1 - y_1 - a}$; si $x = 0 \Rightarrow y = \frac{ax_1 + ay_1 - a^2}{x_1 - y_1 + a}$

$$\Rightarrow x + y = \frac{a(2ax_1 + 2ay_1 - 2a^2)}{x_1^2 - 2x_1 y_1 + y_1^2 - a^2} \quad (1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in \mathcal{C} \Rightarrow x_1^2 - 2x_1 y_1 + y_1^2 - 2ax_1 - 2ay_1 + a^2 = 0$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 y_1 + y_1^2 - a^2 = 2ax_1 + 2ay_1 - 2a^2$$

Por tanto, en (1), se tiene : $x + y = a$ ■

13 La ecuación de una familia de cónicas es $\mathscr{C}: x^2 + xy - y^2 + ax + by + 5 = 0$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos A(1 , 2) y B(-7/5 , -26/5).

Solución. Si $A(1 , 2) \in \mathscr{C} \Rightarrow 1 + 2 - 4 + a + 2b + 5 = 0 \Leftrightarrow a + 2b = -4$ (1)

$$B(-7/5 , -26/5) \in \mathscr{C} \Rightarrow \frac{49}{25} + \frac{182}{25} - \frac{676}{25} - \frac{7}{5}a - \frac{26}{5}b + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 7a + 26b = -64 \qquad (2)$$

La solución común de las ecuaciones (1) y (2) es : $a = 2$ y $b = -3$

Luego , en $\mathscr{C}$, la ecuación del elemento buscado es

$$x^2 + xy - y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$$ ■

14 Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $P_1(-1 , 6)$, $P_2(2 , 5)$, $P_3(3 , 4)$, $P_4(4 , 1)$ y $P_5(-5 , 4)$.

Solución. Sea la cónica $\mathscr{C}: x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (α)

Si $P_1(-1 , 6) \in \mathscr{C} \Rightarrow 1 - 6B + 36C - D + 6E + F = 0$ (1)

$P_2(2 , 5) \in \mathscr{C} \Rightarrow 4 + 10B + 25C + 2D + 5E + F = 0$ (2)

$P_3(3 , 4) \in \mathscr{C} \Rightarrow 9 + 12B + 16C + 3D + 4E + F = 0$ (3)

$P_4(4 , 1) \in \mathscr{C} \Rightarrow 16 + 4B + C + 4D + E + F = 0$ (4)

$P_5(-5 , 4) \in \mathscr{C} \Rightarrow 25 - 20B + 16C - 5D + 4E + F = 0$ (5)

Restando (5) - (3) : $16 - 32B - 8D = 0 \Rightarrow 4B + D = 2$ (6)

(5) - (4) : $9 - 24B + 15C - 9D + 3E = 0 \Rightarrow 3 - 8B + 5C - 3D + E = 0$ (7)

(5) - (1) : $12 - 7B - 10C - 2D - E = 0$ (8)

(3) - (2) : $5 + 2B - 9C + D - E = 0$ (9)

Sumando : (7) + (9) : $8 - 6B - 4C - 2D = 0 \Rightarrow 3B + 2C + D = 4$ (10)

(7) + (8) : $15 - 15B - 5C - 5D = 0 \Rightarrow 5B + C + D = 3$ (11)

Eliminando C de (10) y (11) resulta : $D + 7B = 2$ (12)

La solución común de (6) y (12) es : $B = 0$ y $D = 2$

Sustituyendo en (11) y luego en (7) se tiene : $C = 1$ y $E = -2$

Finalmente en (1) se tiene : $1 + 36 - 2 - 12 + F = 0 \Rightarrow F = -23$

Por tanto , en (α) , la cónica buscada tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$ ■

15 Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los cuatro puntos (1, 0), (-1/4, -5/4), (4/9, -10/9) y (-11, 10).

Solución. Sea la parábola $\mathscr{P}: x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (α)

en la que se debe verificar que $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow B^2 - 4C = 0$ (1)

Si $(1, 0) \in \mathscr{P} \Rightarrow 1 + D + F = 0$ (2)

$(-1/4, -5/4) \in \mathscr{P} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{5}{16}B + \frac{25}{16}C - \frac{1}{4}D - \frac{5}{4}E + F = 0$ (3)

$(4/9, -10/9) \in \mathscr{P} \Rightarrow \frac{16}{81} - \frac{40}{81}B + \frac{100}{81}C + \frac{4}{9}D - \frac{10}{9}E + F = 0$ (4)

$(-4, 10) \in \mathscr{P} \Rightarrow 16 - 40B + 100C - 4D + 10E + F = 0$ (5)

Restando (5) - (2) : $3 - 8B + 20C - D + 2E = 0$ (6)

(2) - (4) : $13 + 8B - 20C + 9D + 18E = 0$ (7)

(2) - (3) : $3 - B - 5C + 4D + 4E = 0$ (8)

Las soluciones de las ecuaciones del sistema (1), (6), (7) y (8) son

$B_1 = 2$, $C_1 = 1$, $D_1 = 3$, $E_1 = 2$, $F_1 = 4$

$B_2 = 2/13$, $C_2 = 1/169$, $D_2 = 27/169$, $E_2 = -146/169$, $F_2 = -196/169$

Sustituyendo cada uno de estos valores en (α) obtenemos :

$\mathscr{P}_1: x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0 \vee \mathscr{P}_2: 169x^2 + 26xy + y^2 + 27x - 146y - 196 = 0$ ■

16 Hallar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos (1, 1), (2, 0), (-1/7, 5/7), (0, 0) y (2, -1).

Solución. Sea la cónica , $\mathscr{C}: x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (α)

Dado que $(0, 0) \in \mathscr{C} \Rightarrow F = 0$

Si $(1, 1) \in \mathscr{C} \Rightarrow 1 + B + C + D + E = 0$ (1)

$(2, 0) \in \mathscr{C} \Rightarrow 4 + 2D = 0 \Leftrightarrow D = -2$

$(-1/7, 5/4) \in \mathscr{C} \Rightarrow \frac{1}{49} - \frac{5}{49}B + \frac{25}{49}C - \frac{1}{7}(-2) + \frac{5}{7}E = 0 \Rightarrow B - 5C - 7E = 3$ (2)

$(2, -1) \in \mathscr{C} \Rightarrow 4 - 2B + C + 2(-2) - E = 0 \Rightarrow 2B - C + E = 0$ (3)

Resolviendo el sistema (1), (2) y (3) obtenemos : $B = C = 1$, $E = -1$

Por tanto en (α), la ecuación de la cónica es $\mathscr{C}: x^2 + xy + y^2 - 2x - y = 0$ ■

17 Sobre un mismo sistema de ejes coordenados , trácense cinco elementos de la familia de cónicas representadas por la ecuación

$$x^2 - 2xy + ky^2 + 2x - y + 1 = 0$$

asignando al parámetro k los valores -1 , 0 , 1 , 2 , 3.

Se deja al lector, la tarea de dibujar las cinco cónicas.

18 Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto A(4 , -2) y por la intersección de las cónicas $x^2 + xy + y^2 + x - 3y - 1 = 0$ y $2x^2 - xy - 2x + y = 0$

Solución. La ecuación representativa del sistema de cónicas es

$$x^2 + xy + y^2 + x - 3y - 1 + k(2x^2 - xy - 2x + y) = 0 \quad (1)$$

Si A(4 , -2) pertenece a un miembro de este sistema, entonces

$$16 - 8 + 4 + 4 + 6 - 1 + k(32 + 8 - 8 - 2) = 0 \Leftrightarrow k = -7/10$$

Sustituyendo este valor de k en (1), obtenemos : $4x^2 - 17xy - 10y^2 - 24x + 37y + 19 = 0$ como ecuación de la cónica buscada. ■

19 Hallar la ecuación de la cónica que pasa por el punto A(-2 , 3) y por la intersección de las cónicas : $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$ y $3xy + 2x - y = 0$

La solución se deja a cargo del lector. ***Sol.*** $9x^2 + 33xy + 9y^2 - 8x + 22y - 1 = 0$

20 Escribir la ecuación de la familia de curvas que pasan por al intersección de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 = 5$ y la elipse $x^2 + 3y^2 = 5$. Demostrar que , cuando el parámetro es igual a - 1 , el elemento de esta familia consiste en dos rectas que se cortan.

Demostración. En efecto , la familia de curvas está representada por

$$2x^2 + 2y^2 - 5 + k(x^2 + 3y^2 - 5) = 0 \Rightarrow (2 + k)x^2 + (2 + 3k)y^2 - 5 - 5k = 0$$

Si $k = -1 \Rightarrow (2 - 1)x^2 + (2 - 3)y^2 - 5 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$

o bien : $(x + y)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \mathscr{L}_1 : x + y = 0 \;\vee\; \mathscr{L}_2 : x - y = 0$

Es un par de rectas que se cortan en el origen de coordenadas. ■

21 Hallar las ecuaciones de las parábolas que pasa por la intersección de las cónicas $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ y $xy + 3x + 5y + 3 = 0$

Solución. El sistema de parábolas queda determinada por la ecuación

$$\mathscr{P} : 4x^2 + y^2 - 4 + k(xy + 3x + 5y + 3) = 0 \quad (1)$$

o bien $\mathscr{P} : 4x^2 + kxy + y^2 + 3kx + 5ky + 3k - 4 = 0$

En cónicas del género parábola se debe cumplir que : $B^2 - 4AC = 0$

$$\Rightarrow k^2 - 4(4)(1) = 0 \Rightarrow k^2 = 16 \Leftrightarrow k = 4 \vee k = -4$$

Sustituyendo cada uno de estos valores de k en (1) , obtenemos las ecuaciones de las parábolas requeridas, esto es

$$\mathscr{P}_1 : 4x^2 + 4xy + y^2 + 12x + 20y + 8 = 0 \vee \mathscr{P}_2 : 4x^2 - 4xy + y^2 - 12x - 20y - 16 = 0$$ ■

22 Hallar las ecuaciones de las parábolas que pasan por la intersección de las cónicas $2xy + 2y^2 + 3x - y - 1 = 0$ y $x^2 - xy + 2y^2 + x + y - 3 = 0$

La solución se deja para el lector.

Sol. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x + 3y - 5 = 0 \vee 2x^2 + 12xy + 18y^2 + 23x - 5y - 13 = 0$

23 Demostrar que las raíces de la ecuación

$$k^2 + (a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2)k + a^2b^2 - b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = 0$$

son reales y desiguales demostrando que su discriminante puede escribirse en la forma de la cantidad positiva : $(a^2 - b^2 - x_1^2 + y_1^2)^2 + 4x_1^2y_1^2$.

Demostración. En efecto, el discriminante de la ecuación es

$$\Delta = (a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2)^2 - 4(1)(a^2b^2 - b^2x_1^2 - a^2y_1^2)$$
$$= [(a^2 + b^2) - (x_1^2 + y_1^2)]^2 - 4a^2b^2 + 4b^2x_1^2 + 4a^2y_1^2$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(x_1^2 + y_1^2) + (x_1^2 + y_1^2)^2 - 4a^2b^2 + 4b^2x_1^2 + 4a^2y_1^2$$

Agrupando términos convenientemente se tiene :

$$\Delta = [(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2] - [2(a^2x_1^2 + a^2y_1^2 + b^2x_1^2 + b^2y_1^2) - 4b^2x_1^2 - 4a^2y_1^2] + (x_1^2 + y_1^2)^2$$
$$= [(a^2 - b^2)^2] - [2(a^2x_1^2 - a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + b^2y_1^2)] + (x_1^2 + y_1^2)^2 - 4x_1^2y_1^2 + 4x_1^2y_1^2$$
$$= (a^2 - b^2)^2 - 2(a^2 - b^2)(x_1^2 - y_1^2) + (x_1^2 - y_1^2)^2 + 4x_1^2y_1^2$$
$$= [(a^2 - b^2) - (x_1^2 - y_1^2)]^2 + 4x_1^2y_1^2$$
$$= (a^2 - b^2 - x_1^2 + y_1^2)^2 + 4x_1^2y_1^2$$ ■

24 Demostrar que una raíz de la ecuación del Ejercicio 23 , esta comprendida entre $-a^2$ y $-b^2$ demostrando que el primer miembro de la ecuación es igual a la cantidad positiva $(a^2 - b^2)x_1^2$, $a > b$, $x_1 \neq 0$, para $k = -a^2$, y que es igual a la cantidad negativa $(b^2 - a^2)y_1^2$, $a > b$, $y_1 \neq 0$, para $k = -b^2$.

Demostración. En efecto, sustituyendo el valor de $k = -a^2$ en la ecuación del Ejercicio 23 , se tiene :

$$a^4 - a^2(a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2) + a^2b^2 - b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = 0$$

la cual se simplifica y reduce a : $(a^2 - b^2)x_1^2$

La cantidad es positiva $\forall x_1 \neq 0$ y $a > b$

Si $k = -b^2 \Rightarrow b^4 - b^2(a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2) + a^2b^2 - b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = 0$

Efectuando operaciones la ecuación se reduce a : $(b^2 - a^2)\,y_1^2$

La cantidad es negativa $\forall y_1 \neq 0$ y $a > b$ ▪

26 Discutir el sistema de cónicas representado por la ecuación

$$\frac{x^2}{9+k} + \frac{y^2}{5+k} = 1$$

utilizando los mismos ejes coordenados , dibujar seis elementos de este sistema correspondientes a los valores de k = 0 , 7 , 16 , -8 , -7 , -6.

Solución. En el sistema de cónicas observamos que , $k \neq -9$ y $k \neq -5$

Para $k > -5$ el sistema de cónicas representa elipses, en donde

$a^2 = 9 + k$ y $b^2 = 5 + k \Rightarrow c = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm\sqrt{(9+k) - (5-k)} = \pm 2$

Esto es, el sistema representa elipses homofocales, con focos en F(± 2 , 0)

Para $-9 < k < -5$, el sistema de cónicas representa hipérbolas. Si escribimos

$$\frac{x^2}{9+k} - \frac{y^2}{-5-k} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 + k \\ b^2 = -5 - k \end{cases}$$

$c = \pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm\sqrt{(9+k) + (-5-k)} = \pm 2$

El sistema representa hipérbolas homofocales , con focos en F(± 2 , 0).

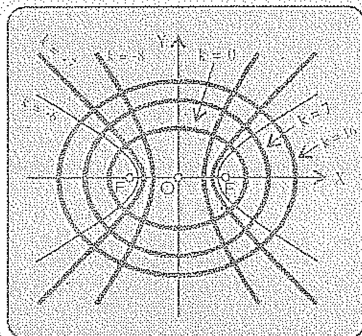


FIGURA 9.16

Como todas estas cónicas tienen un eje común y un eje normal común, se dice que son *coaxiales*. ▪

Capítulo 10

COORDENADAS POLARES

10.1 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Hasta este capítulo estábamos acostumbrados a localizar puntos por medio de un sistema de coordenadas rectangulares. Sin embargo, hay otros métodos que son más prácticos en algunas situaciones. Uno de ellos se conoce como *sistema de coordenadas polares*.

Por medio de este sistema, localizamos un punto dando su *distancia y dirección desde un punto dado sobre una recta dada*. El punto dado se llama *polo*, y la recta dada se conoce como *eje polar*. La distancia r del polo al punto se llama *radio vector*, y el ángulo θ del eje polar al radio vector se llama *amplitud, argumento o ángulo vectorial*. Las coordenadas de un punto P se escriben en la forma (r , θ) como se muestra en la Figura 10.1.

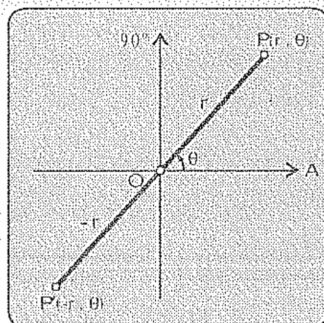


FIGURA 10.1

En la misma forma que en trigonometría, el radio vector puede girar cualquier ángulo en sentido horario o en sentido antihorario, por tanto θ puede tomar cualquier valor positivo o negativo.Las distancias medidas a lo largo del radio vector desde el polo se definen como positivas y las medidas en sentido opuesto, esto es , a lo largo del radio vector hasta el polo , son negativas , por definición. Si un punto tienen un radio vector negativo , se mide primero el ángulo polar de la manera ordinaria , y después se

toma el radio vector en la prolongación del lado final. Así, un punto P', de coordenadas (-r , θ) , se localiza como se indica en la Figura 10.1. La recta que pasa por el polo perpendicularmente al eje polar se conoce como *eje a 90° o eje normal.*

10.2 PARES DE COORDENADAS PARA UN PUNTO

Es evidente que un par de coordenadas polares (r , θ) determina uno y solamente un punto en el plano coordenado. El recíproco, en cambio , no es verdadero , porque al punto P(r , θ) pueden darse las coordenadas $(r , \theta + 2n\pi)$, donde $n \in \mathbb{Z}$, ya que cada uno de estos ángulos determina la misma dirección que θ y r es la distancia desde el polo en cada caso. Si r es precedida por un signo negativo , se entiende que la distancia debe medirse en sentido negativo , esto es , a lo largo de la prolongación por el polo del lado final del ángulo vectorial. Así , el punto $(-r , \theta + n\pi)$, en donde n es un mismo entero impar cualquiera , representa el mismo punto que (r , θ).

10.3 PASO DE COORDENADAS POLARES A RECTANGULARES Y VICEVERSA

TEOREMA 10.1 Si el polo y el eje polar del sistema de coordenadas polares coinciden , respectivamente, con el origen y la parte positiva del eje X de un sistema de ejes rectangulares , el paso de uno a otro de estos dos sistemas puede efectuarse por medio de las siguientes fórmulas de transformación.

$$x = r\,\text{Cos}\theta \quad , \quad y = r\,\text{Sen}\theta \quad , \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad \theta = \text{arc Tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \text{Sen}\theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \text{Cos}\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

EJERCICIOS . Grupo 37

1 En un sistema polar trazar los siguientes puntos : $P_1(1 , 135°)$, $P_2(-2 , \pi/3)$, $P_3(3 , 75°)$, $P_4(-4 , 2\pi/3)$

Solución. El trazo de puntos en el sistema polar se facilita usando una serie de circunferencias concéntricas y rectas concurrentes. Las circunferencias tienen su centro en el polo, y sus radios son múltiplos enteros del radio más pequeño tomado como unidad de medida. En la Figura 10.2, se muestran los puntos dados en los que se pueden notar los que tienen los radios vectores negativos.

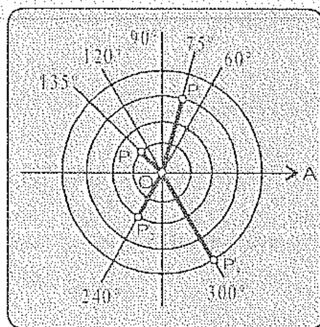


FIGURA 10.2

Así : $P_2(-2 , 60°) = P'_2(2 , 240°)$

$P_4(-4 , 120°) = P'_4(4 , 300°)$ ∎

2 Trazar los siguientes puntos en coordenadas polares

$P_1(5 , 5\pi/4)$, $P_2(-2 , 210°)$; $P_3(-3 , 5\pi/6)$, $P_4(3\sqrt{2} , 135°)$

El dibujo de los puntos se deja a cargo del lector.

3 Construir el triángulo cuyos vértices son

$P_1(5 , 60°)$, $P_2(-2 , 7\pi/4)$ y $P_3(-4 , 150°)$

Solución. Como $r_1 = 5 > 0$, el punto P_1 estará en el mismo cuadrante que $\theta = 60°$ a una distancia 5 unidades del polo.

$r_2 = -2 < 0$, el punto P_2 estará en el cuadrante opuesto que $\theta = 7\pi/4$, esto es , $\theta' = 7\pi/4 - \pi = 3\pi/4$, a la distancia $|-2| = 2$ del polo. Por lo que

$$P'_2(2 , 3\pi/4) = P_2(-2 , 7\pi/4)$$

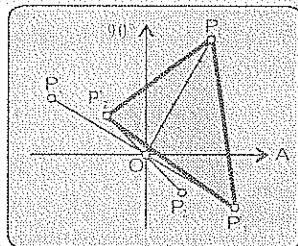


FIGURA 10.3

$r_3 = -4 < 0$, el punto P_3 estará en el rayo opuesto al lado terminal, a la distancia $|-4| = 4$ del polo , con un ángulo de $\theta' = 150° + 180° = 330°$. Esto es , $P'_3(4 , 330°) = P_3(-4 , 150°)$ ∎

4 Para cada uno de los puntos P_1 y P_2 del Ejercicio 1 , hallar tres pares de coordenadas polares.

Solución. Según la fórmula $(r , \theta + 2\pi n)$, otras formas de $P_1(1 , 135°)$, son

$$P_1(1 , 135° + 360°n) \begin{cases} \text{si } n = 1 \Rightarrow P_1(1 , 495°) \\ n = -1 \Rightarrow P_1(1 , -225°) \end{cases}$$

y según la fórmula $(-r, \theta + n\pi)$, otra forma de P_1 es

$$P_1(-1, 135 + 180°) \Leftrightarrow P_1(-1, 315°)$$

Para la fórmula $(-r, \theta + n\pi)$, otras formas de $P_2(-2, \pi/3)$ son

$$P_2(-2, 60° + n\pi) \begin{cases} \text{si } n = 1 \Rightarrow P_2(-2, 4\pi/3) \\ n = -1 \Rightarrow P_2(-2, -2\pi/3) \end{cases}$$

Para la fórmula $(r, \theta + 2\pi n)$, otra forma de P_2 es

$$P_2(2, 60° + 2\pi n), \text{ si } n = 1 \Rightarrow P_2(2, 7\pi/3)$$ ■

5 Un cuadrado de lado $2a$ tiene su centro en el polo y dos de sus lados son paralelos al eje polar. Hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus cuatro vértices.

Solución. Para cada uno de los vértices :

$$r = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Para el vértice A : $\text{TgA} = \dfrac{a}{a} = 1 \Rightarrow \theta = 45°$

Para el vértice B : $\theta = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$

Para el vértice C : $\theta = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$

Para el vértice D : $\theta = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$

Por tanto , las coordenadas polares de cada uno de los vértices son :

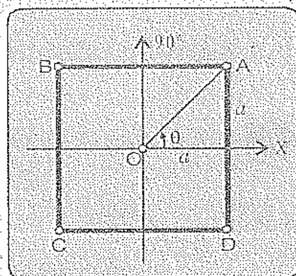


FIGURA 10.4

$$A(a\sqrt{2}, \pi/4), B(a\sqrt{2}, 3\pi/4), C(a\sqrt{2}, 5\pi/4), D(a\sqrt{2}, 7\pi/4)$$ ■

6 Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $A(0, 73°)$ y $B(1, \pi)$. Hallar el par principal de coordenadas polares del tercer vértice. (Dos casos.)

Solución. El vértice A coincide con el polo, puesto que $r = 0$

Si los triángulos ABC y ABC' son equiláteros, entonces : $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AC'} = r = 1$.

El argumento de C es : $\theta = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$

y el de C' es : $\theta = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$.

Luego , el par principal del tercer vértice es :

$$C(1, 2\pi/3) \quad \text{o} \quad C'(1, 4\pi/3)$$ ■

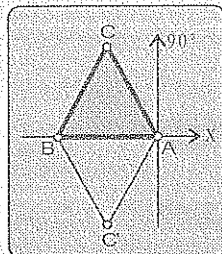


FIGURA 10.5

7 Un hexágono regular tiene su centro en el polo y dos lados paralelos al eje polar. Si la longitud de un lado es igual a dos unidades, hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de sus seis vértices.

Solución. En un hexágono regular , r = |AB| = 2

Como el ΔAOF es equilátero, el argumento para el vértice A es $\theta = \pi/3$.

Para el vértice B , $\theta = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$

Para el vértice C , $\theta = \pi$

Para el vértice D , $\theta = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$

Para el vértice E : $\theta = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$

Luego , las coordenadas polares de los seis vértices son

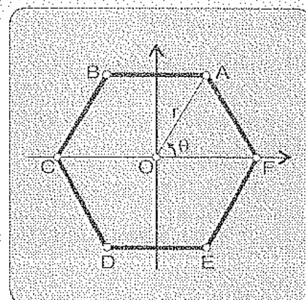


FIGURA 10.6

$$A(2 , \pi/3) , B(2 , 2\pi/3) , C(2 , \pi) , D(2 , 4\pi/3) , E(2 , 5\pi/3) , F(2 , 0)$$ ■

8 Un punto P se mueve de tal manera que para todos los valores de su ángulo polar , su radio vector permanece constante e igual a 2. Identificar y trazar el lugar geométrico de P.

Solución. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico. Si se cumple que $r = 2 , \ \forall\theta \in R$, la gráfica de los puntos P(2 , θ) es la de una circunferencia con centro en el polo y radio 2. ■

9 Un punto se mueve de tal manera que para todos los valores de sus radios vectores, su ángulo polar permanece constante e igual a π/4. Identificar y trazar el lugar geométrico de P.

Solución. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico. Si $\forall \ r \in R$, se cumple que $\theta = \pi/4$ (constante), la gráfica de los puntos P(r , π/4) es la de una recta que pasa por el polo y forma un ángulo de π/4 con el eje polar. ■

10 Hallar las coordenadas rectangulares de los puntos

$$P_1(5 , 5\pi/4) , P_2(-2 , 210°) , P_3(-3 , 5\pi/6) \text{ y } P_4(3\sqrt{2} , 135°)$$

Solución. En el punto P_1 se tiene : r = 5 y $\theta = 5\pi/4$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \ x &= r\,\text{Cos}\theta = 5\,\text{Cos}(\pi + \pi/4) = -5\,\text{Cos}(\pi/4) = -5\sqrt{2}/2 \\ y &= r\,\text{Sen}\theta = 5\,\text{Sen}(\pi + \pi/4) = -5\,\text{Sen}(\pi/4) = -5\sqrt{2}/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ P_1\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2} , -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

Para el punto P_2 : $r = -2$ y $\theta = 210°$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x = r\,\text{Cos}\theta = -2\,\text{Cos}(180° + 130°) = 2\,\text{Cos}\,30° = \sqrt{3} \\ \quad y = r\,\text{Sen}\theta = -2\,\text{Sen}(180° + 30) = 2\,\text{Sen}\,30° = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2(\sqrt{3}\,,\,1)$$

Para el punto P_3 : $r = -3$, $\theta = 5\pi/6$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x = r\,\text{Cos}\theta = 3\,\text{Cos}(\pi - \pi/6) = 3\,\text{Cos}(\pi/6) = 3\,\sqrt{3}/2 \\ \quad y = r\,\text{Sen}\theta = -3\,\text{Sen}(\pi - \pi/6) = -3\,\text{Sen}(\pi/6) = -3/2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_3(3\sqrt{3}/2\,,\,-3/2)$$

Para el punto P_4 : $r = 3\sqrt{2}$ y $\theta = 135°$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x = r\,\text{Cos}\theta = 3\sqrt{2}\,\text{Cos}(180° - 45°) = -3\sqrt{2}\,\text{Cos}\,45° = -3 \\ \quad y = r\,\text{Sen}\theta = 3\,\sqrt{2}\,\text{Sen}(180° - 45°) = 3\sqrt{2}\,\text{Sen}\,45° = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow P_4(-3\,,\,3)$$ ■

11 Hallar el par principal de coordenadas polares de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son A(-2 , 3) y B(3 , -2).

Solución. En el punto A : $x = -2$, $y = 3 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13}$

$$\text{Tg}\theta = \frac{y}{x} = -\frac{3}{2} \text{ (θ en el II cuadrante)} \Rightarrow \theta = \text{arc Tg}(-1.5)$$

$$\Rightarrow \theta = 180° - 56°56' = 123°4'$$

$$\therefore A\,(\sqrt{13}\,,\,123°\,4')$$

En el punto B : $x = 3$, $y = -2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{13}$

$$\text{Tg}\theta = \frac{y}{x} = -\frac{2}{3} \text{ (θ en el IV cuadrante)} \Rightarrow \theta = \text{arc Tg}(-2/3)$$

$$\Rightarrow \theta = 360° - 33°41' = 326°19'$$

$$\therefore B\,(\sqrt{13}\,,\,326°\,19')$$ ■

En cada uno de los ejercicios 12 - 20 , pasar la ecuación rectangular dada a su forma polar.

12 $x^2 + y^2 = 4$

Solución. Por el Teorema 10.1 : $r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = \pm 2$ ■

13 $5x - 4y + 3 = 0$

Solución. Por el Teorema 10.1 : $x = r\,\text{Cos}\theta$, $y = r\,\text{Sen}\theta$

$$\Rightarrow 5r\,\text{Cos}\theta - 4r\,\text{Sen}\theta + 3 = 0 \Rightarrow r(5\,\text{Cos}\theta - 4\,\text{Sen}\theta) + 3 = 0$$ ■

14 $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$

Solución. Si $2(x^2 + y^2) + 2x - 6y + 3 = 0$, por el Teorema 10.1 , se tiene :

$$2(r^2) + 2r\ Cos\theta - 6r\ Sen\theta + 3 = 0 \Rightarrow 2r^2 + (2\ Cos\theta - 6\ Sen\theta)r + 3 = 0$$

15 $2x - y = 0$

Solución. $2r\ Cos\theta - r\ Sen\theta = 0 \Rightarrow Tg\theta = 2 \Leftrightarrow \theta = arc\ Tg(2)$ ■

16 $x^2 - y^2 = 4$

Solución. $(r\ Cos\theta)^2 - (r\ Sen\theta)^2 = 4 \Rightarrow r^2(Cos^2\theta - Sen^2\theta) = 4$

$$\Rightarrow r^2 Cos^2\theta = 4$$ ■

17 $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Solución. $r^2 - 2r\ Sen\theta \Rightarrow r = 2\ Sen\theta$ ■

18 $x\ y = 2$

Solución. $(r\ Cos\theta)\ (r\ Sen\theta) = 2 \Rightarrow r^2\ Sen\theta\ Cos\theta = 2$

$$\Rightarrow r^2\ Sen2\theta = 4$$ ■

19 $x^2 - 4y = 4$

Solución. $r^2\ Cos^2\theta - 4r\ Sen\theta - 4 = 0$

Resolviendo para r se tiene : $r = \dfrac{2\ Sen\theta + \sqrt{(2\ Sen\theta)^2 + 4\ Cos^2\theta}}{Cos^2\theta}$

$$\Rightarrow r = \frac{2\ Sen\theta + \sqrt{4(Sen^2\theta + Cos^2\theta)}}{1 - Sen^2\theta} = \frac{2\ Sen\theta + 2}{1 - Sen^2\theta} = \frac{2(1 + Sen\theta)}{(1 + Sen\theta)(1 - Sen\theta)}$$

$$\therefore\ r = \frac{2}{1 - Sen\theta}$$ ■

20 $x\ Cos\omega + y\ Sen\omega - \pi = 0$

Solución. $r\ Cos\theta\ Cos\omega + r\ Sen\theta\ Sen\omega - \pi = 0$

$$\Rightarrow r(Cos\theta\ Cos\omega + Sen\theta\ Sen\omega) = p \Leftrightarrow r\ Cos(\theta - \omega) = p$$ ■

En cada uno de los ejercicios 21 - 30 , pasar la ecuación polar dada a su forma rectangular.

21 $r\,\text{Cos}\theta - 2 = 0$

Solución. Por el Teorema 10.1 : $x = r\,\text{Cos}\theta$, luego : $x - 2 = 0$ ■

22 $r = 4\,\text{Sen}\theta$

Solución. $r = 4\left(\frac{y}{r}\right) \Rightarrow r^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$ ■

23 $r = 9\,\text{Cos}\theta$

Solución. $r = 9\left(\frac{x}{r}\right) \Rightarrow r^2 = 9x \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9x = 0$ ■

24 $r - r\,\text{Cos}\theta = 4$

Solución. $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x + 4$

Elevando al cuadrado se tiene : $y^2 - 8x - 16 = 0$ ■

25 $r = \dfrac{2}{2 - \text{Cos}\theta}$

Solución. $2r - r\,\text{Cos}\theta = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 2$

Elevando al cuadrado obtenemos : $3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$ ■

26 $r = \dfrac{4}{1 + 2\,\text{Cos}\theta}$

Solución. $r + 2r\,\text{Cos}\theta = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + 2x = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - 2x$

Elevando al cuadrado se tiene : $3x^2 - y^2 - 16x + 16 = 0$ ■

27 $\text{Sen}^2\theta - 4r\,\text{Cos}^3\theta = 0$

Solución. $\left(\frac{y}{r}\right)^2 - 4r\left(\frac{x}{r}\right)^3 = 0$, de donde : $y^2 = 4x^3$ ■

28 $r = 2\ \text{Sec}^2(\theta/2)$

Solución. $r\ \text{Cos}^2(\theta/2) = 2 \Rightarrow r\left(\frac{1 + \text{Cos}\theta}{2}\right) = 2 \Rightarrow r + r\ \text{Cos}\theta = 4$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - x \Rightarrow y^2 + 8x - 16 = 0$$ ■

29 $r = 2(1 - \text{Cos}\theta)$

Solución. $r = 2\left(1 - \frac{x}{r}\right) = 2\left(\frac{r - x}{r}\right) \Leftrightarrow r^2 + 2x = 2r$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2) + 2x = 2\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$$ ■

30 $r^2 = 4\ \text{Cos}2\theta$

Solución. $r^2 = 4(\text{Cos}^2\theta - \text{Sen}^2\theta) = 4\left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right)$

$$\Rightarrow r^4 = 4(x^2 - y^2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$$ ■

10.4 TRAZADO DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES

Los pasos a seguir en la construcción de curvas dadas en coordenadas polares son los siguientes.

1. Intersecciones

a) *Con el eje polar.* Se obtienen resolviendo la ecuación polar dada para r, cuando a θ se le asignan sucesivamente los valores :
$\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, n\pi, n \in Z$

b) *Con el eje a 90º.* Se obtienen resolviendo la ecuación polar dada para r, cuando a θ se le asigna sucesivamente los valores :

$\theta = \pi/2, 3\pi/2, \ldots\ldots, (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

2. Simetrías

a) *Con el eje polar.* La ecuación polar no se altera, o se transforma en una ecuación equivalente cuando

i) se sustituye θ por (-θ) o

ii) se sustituye θ por (π - θ) y r por - r

b) *Con el eje a 90°.* La ecuación polar no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando

i) se sustituye θ por $(\pi - \theta)$

ii) se sustituye θ por $-\theta$ y r por $-$r

c) *Con el polo.* La ecuación polar no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando

i) se sustituye θ por $(\pi + \theta)$

ii) se sustituye r por $-$r

3. **Extensión de la curva.**

Se despeja r en función de θ : $r = f(\theta)$

Si r es finito para todos los valores de θ , se trata de una curva cerrada. Si, en cambio, r se vuelve infinito para ciertos valores de θ la gráfica no puede ser una curva cerrada. Para valores de θ que hacen a r compleja no hay curva, tales valores de θ constituyen intervalos excluidos del lugar geométrico. Si la gráfica es una curva cerrada, es útil, frecuentemente, determinar los valores máximo y mínimo de r.

4. **Dirección del polo.**

Se obtiene haciendo r = 0 y resolviendo la ecuación : $f(\theta) = 0$

5. **Construcción de una tabla de valores.**

Asignando un valor particular θ , podemos obtener un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada. Será suficiente tomar valores de θ a intervalos de 30°.

6. **Trazado de la curva.**

EJERCICIOS . *Grupo 38*

En cada uno de los ejercicios 4 - 30 , trazar la gráfica de la curva cuya ecuación se da. Las cantidades a y b son constantes diferentes de cero a las que pueden asignárseles valores numéricos para la operación del trazado de la gráfica.

4 $r = a\,\text{Cos}\theta$

Solución. Sea $f(r, \theta)$: $r = a\,\text{Cos}\theta$

1. *Intersecciones*

a) Con en el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow r = a \Rightarrow P_1(a, 0)$

$\theta = \pi \Rightarrow r = -a \Rightarrow P_2(-a, \pi)$

Obsérvese que P_1 y P_2 significan el mismo punto

b) Con el eje normal. Si $\theta = n(\pi/2) \Rightarrow r = 0$

La curva pasa por el polo.

2. *Simetría.*

a) Con el eje polar. $f(r, -\theta) : r = a\ \text{Cos}(-\theta) = a\ \text{Cos}\theta$

$f(r, -\theta) = f(r, \theta)\ \therefore$ Es simétrica

b) Con el eje normal. $f(r, \pi - \theta) : r = a\ \text{Cos}(\pi - \theta) = -a\ \text{Cos}\theta$

$f(r, \pi - \theta) \neq f(r, \theta)\ \therefore$ No es simétrica

c) Con el polo. $f(r, \pi + \theta) : r = a\ \text{Cos}(\pi + \theta) = -a\ \text{Cos}\ \theta$

$f(r, \pi + \theta) \neq f(r, \theta)\ \therefore$ No es simétrica

3. *Extensión.* Como $-1 \leq \text{Cos}\theta \leq 1$, entonces los valores máximo y mínimo de r son respectivamente $r = a$ y $r = -a$, por tanto, se trata de una curva cerrada.

4. *Dirección del polo.* (Tangentes en el polo)

Si $r = 0 \Rightarrow \text{Cos}\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi/2 \vee \theta = 3\pi/2$

5. *Tabla de Valores*

θ	r
0°	a
30°	$0.7a$
60°	$0.5a$

θ	r
90°	0
120°	$-0.5a$
150°	$-0.7a$

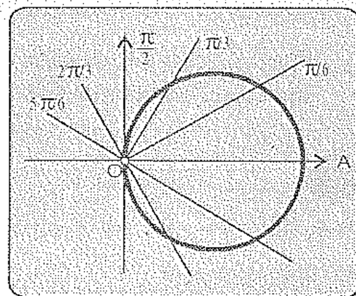


FIGURA 10.7

5 $4r\ \text{Cos}\theta - 3r\ \text{Sen}\theta = 12$

Solución. Sea $f(r, \theta) : (4\ \text{Cos}\theta - 3\ \text{Sen}\theta)r = 12$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow (4)r = 12 \Leftrightarrow r = 3\ \therefore\ A(3, 0°)$

$\theta = \pi \Rightarrow (-4)r = 12 \Leftrightarrow r = -3 \Rightarrow B(-3, \pi)$

Dado que $r < 0$, entonces A = B

b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow -3r = 12 \Leftrightarrow r = -4 \Rightarrow C(-4, \pi/2)$

2. *Simetría*

a) Con el eje polar. $f(r, -\theta) : (4\ \text{Cos}\theta + 3\ \text{Sen}\theta)r = 12$

$f(r, -\theta) \neq f(r, \theta)\ \therefore$ No es simétrica

b) Con el eje normal. $f(r, \pi - \theta) : (-4 \text{ Cos}\theta - 3 \text{ Sen}\theta)r = 12$

$f(r, \pi - \theta) \neq f(r, \theta)$ $\therefore$ No es simétrica

c) Con el polo. $f(r, \pi + \theta) : (-4 \text{ Cos}\theta + 3 \text{ Sen}\theta)r = 12$

$f(r, \pi + \theta) \neq f(r, \theta)$ $\therefore$ No es simétrica

3. *Extensión.* $r = \dfrac{12}{4 \text{ Cos}\theta - 3 \text{ Sen}\theta}$

$r \in R \Leftrightarrow 4 \text{ Cos}\theta - 3 \text{ Sen}\theta \neq 0$, esto es, si $\text{Tg}\theta \neq 4/3$

Por tanto, la gráfica de $f(r, \theta)$ se extiende indefinidamente $\forall \theta \neq \text{arcTg}(4/3)$.

4. *Dirección del polo*

Como $r \neq 0$, entonces, no existe tangentes en el polo

5. *Tabla de valores.*

θ	r
0	3
π/2	- 4
π	- 3
3π/2	4

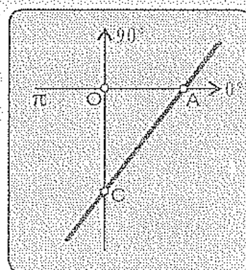


FIGURA 10.8

6. Con toda esta información dibujamos la gráfica de la ecuación, mostrada en la Figura 10.8

6 $r = a \text{ Sen}\theta + b \text{ Cos}\theta$

Solución. Sea $f(r, \theta) : r = a \text{ Sen}\theta + b \text{ Cos}\theta$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow r = b$; $\theta = \pi \Rightarrow r = -b$ $\therefore$ $A(b, 0°)$

b) Con el eje normal. $\left.\begin{array}{l} \text{Si } \theta = 90° \Rightarrow r = a \Rightarrow B(a, \pi/2) \\ \theta = 270° \Rightarrow r = -a \end{array}\right\} \Rightarrow B(a, \pi/2)$

2. *Simetría*

a) Con el eje polar. $f(r, -\theta) : r = -a \text{ Sen}\theta + b \text{ Cos}\theta \neq f(r, \theta)$

b) Con el eje normal. $f(r, \pi - \theta) : r = a \text{ Sen}\theta - b \text{ Cos}\theta \neq f(r, \theta)$

c) Con el polo. $f(r, \pi + \theta) : r = -a \text{ Sen}\theta - b \text{ Cos}\theta \neq f(r, \theta)$

Por tanto, la curva no es simétrica con el eje polar, el eje normal y el polo.

3. *Extensión.* Como r es un número finito $\forall \theta \in R$, entonces la gráfica de $f(r, \theta)$ es una curva cerrada

4. *Dirección del polo*

Si r = 0 ⇒ a Senθ + b Cosθ = 0 ⇒ Tgθ = - b/a ⇔ θ = arcTg(- b/a)

La curva tiene una tangente en el polo, esto es, pasa por el polo.

5. *Tabla de valores*

θ	r
0	b
30°	$0.5a + 0.86b$
60°	$0.86a + 0.5b$
90°	a
180°	$-b$

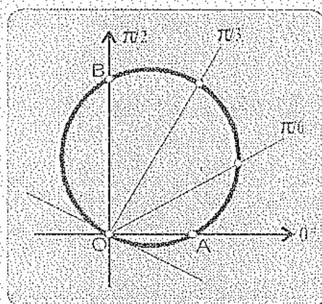


FIGURA 10.9

7 r Cos (θ - π/4) = 2

Solución. Si hacemos θ' = θ - π/4 ⇒ θ = θ' + π/4, habremos girado el eje polar un ángulo de 45°. Por lo que , en este nuevo sistema :

$$r\ \text{Cos}\theta' = 2$$

En este sistema, según la fórmula de transformación de coordenadas polares en cartesianas

$$x' = 2$$

que es la ecuación de una recta paralela al eje de 135°, a dos unidades del polo. ■

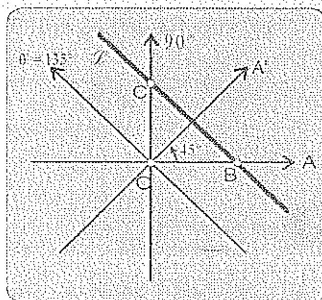


FIGURA 10.10

8 $r = \dfrac{2}{1 - \text{Cos}\theta}$

Solución. Sea $f(r, \theta)$: $r = \dfrac{2}{1 - \text{Cos}\theta}$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje polar. Si θ = 0 ⇒ $r = \dfrac{2}{1-1} = \infty$ ⇒ No existe

$\theta = \pi \Rightarrow r = \dfrac{2}{1+1} = 1 \Rightarrow$ B(1 , π)

b) Con el eje normal. Si θ = 90° ⇒ $r = \dfrac{2}{1-0} = 2 \Rightarrow$ C(2 , π/2)

$\theta = 270° \Rightarrow r = \dfrac{2}{1-0} = 2 \Rightarrow$ D(2 , 3π/2)

2. *Simetría*

a) Con el eje polar. $f(r\,,-\theta) : \; r = \dfrac{2}{1 - \text{Cos}(-\theta)} = \dfrac{2}{1 - \text{Cos}\theta} = f(r\,,\theta)$

b) Con el eje normal. $f(r\,,\pi - \theta) : \; r = \dfrac{2}{1 - \text{Cos}(\pi - \theta)} = \dfrac{2}{1 + \text{Cos}\theta} \neq f(r\,,\theta)$

c) Con el polo. $f(r\,,\pi + \theta) : \; r = \dfrac{2}{1 - \text{Cos}(\pi + \theta)} = \dfrac{2}{1 + \text{Cos}\theta} \neq f(r\,,\theta)$

Por tanto, la curva sólo es simétrica con el eje polar.

3. *Extensión.* Vemos que r es infinito cuando $\text{Cos}\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2n\pi\,,\; n \in \mathbb{Z}$. Por lo que la curva se abre indefinidamente a la derecha del polo.

4. *Dirección del polo.* Como $r \neq 0$, la curva no pasa por el polo, es decir, no tiene tangentes en el polo.

La curva está representada en la Figura 10.11 ▪

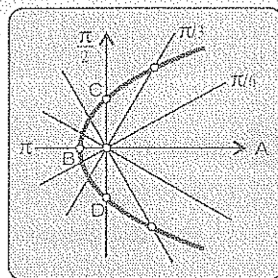


FIGURA 10.11

9 $r = \dfrac{4}{2 - \text{Cos}\theta}$

Solución. Sea $f(r\,,\theta) : \; r = \dfrac{4}{2 - \text{Cos}\theta}$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow r = \dfrac{4}{2 - 1} = 4 \Rightarrow B(4\,,0)$

$\theta = \pi \Rightarrow r = \dfrac{4}{2 + 1} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow C(4/3\,,\pi)$

b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = \dfrac{4}{2 - 0} = 2 \Rightarrow D(2\,,\pi/2)$

$\theta = 3\pi/2 \Rightarrow r = \dfrac{2}{2 - 0} = 2 \Rightarrow E(2\,,3\pi/2)$

2. *Simetría*

a) Con el eje polar. $f(r\,,-\theta) : \; r = \dfrac{4}{2 - \text{Cos}(-\theta)} = \dfrac{4}{2 - \text{Cos}\theta} = f(r\,,\theta)$

b) Con el eje normal. $f(r\,,\pi - \theta) : \; r = \dfrac{4}{2 - \text{Cos}(\pi - \theta)} = \dfrac{4}{2 + \text{Cos}\theta} \neq f(r\,,\theta)$

c) Con el polo. $f(r\,,\pi + \theta) : \; r = \dfrac{4}{2 - \text{Cos}(\pi + \theta)} = \dfrac{4}{2 + \text{Cos}\theta} \neq f(r\,,\theta)$

Por tanto, la curva sólo es simétrica con el eje polar.

3. *Extensión.* Dado que $-1 \leq \text{Cos}\theta \leq 1 \Rightarrow 4/3 \leq r \leq 4$, r es un número finito $\forall\ \theta \in [0, 2\pi]$, luego, la curva es cerrada.

4. *Dirección del polo.* Como $r \neq 0$, la curva no pasa por el polo

5. *Tabla de valores*

θ	r
30°	3.5
60°	8/3
90°	2

θ	r
120°	1.6
150°	1.4
180°	4/3

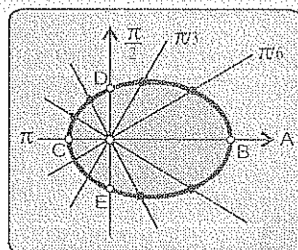


FIGURA 10.12

Como la curva es simétrica con respecto al eje polar, para su construcción, se ha tomado valores de θ en el intervalo $[0, \pi]$ ■

10 $r = a\ \text{Sec}^2(\theta/2)$

Solución. Sea $f(r, \theta)$: $r = a\ \text{Sec}^2(\theta/2) = \dfrac{a}{\text{Cos}^2(\theta/2)} = \dfrac{2a}{1 + \text{Cos}\theta}$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow r = \dfrac{2a}{1+1} = a \Rightarrow B(a, 0)$

$$\theta = \pi \Rightarrow r = \frac{2a}{1-1} = \infty \Rightarrow \text{No existe}$$

b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = \dfrac{2a}{1+0} = 2a \Rightarrow C(2a, \pi/2)$

$$\theta = 3\pi/2 \Rightarrow r = \frac{2a}{1+0} = 2a \Rightarrow D(2a, 3\pi/2)$$

2. *Simetría*

a) Con el eje polar. $f(r, -\theta)$: $r = \dfrac{2a}{1 + \text{Cos}(-\theta)} = \dfrac{2a}{1 + \text{Cos}\theta} = f(r, \theta)$

b) Con el eje normal. $f(r, \pi - \theta)$: $r = \dfrac{2a}{1 + \text{Cos}(\pi - \theta)} = \dfrac{2a}{1 - \text{Cos}\theta} \neq f(r, \theta)$

c) Con el polo. $f(r, \pi + \theta)$: $r = \dfrac{2a}{1 + \text{Cos}(\pi + a)} = \dfrac{2a}{1 - \text{Cos}\theta} \neq f(r, \theta)$

Por tanto, la curva es simétrica respecto al eje polar

3. *Extensión.* Cuando $\theta = n\pi$, donde $n \in \mathbf{Z}$ impar, r se hace infinito, por lo que la curva se extiende indefinidamente por la izquierda del polo.

4. *Dirección del polo.* Como $r \neq 0$; la curva no pasa por el polo.

5. *Tabla de valores.*

θ	r
30°	$1.08a$
60°	$1.33a$
90°	$2a$

θ	r
120°	$4a$
150°	$14.3a$
180°	∞

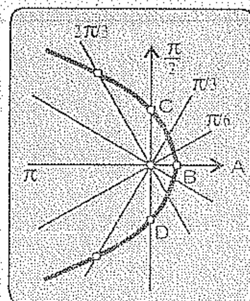


FIGURA 10.13

15 $r = a(1 + \text{Sen}\theta)$ (cardiode)

Solución. Sea $f(r, \theta) : r = a(1 + \text{Sen}\theta)$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0° \Rightarrow r = a(1 + 0) = a \Rightarrow B(a, 0)$

$\theta = \pi \Rightarrow r = a\,(1 + 0) = a \Rightarrow C(a, \pi)$

b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = a(1 + 1) = 2a \Rightarrow D(2a, \pi/2)$

$\theta = 3\pi/2 \Rightarrow r = a(1 - 1) = 0 \Rightarrow E(0, 3\pi/2)$

2. *Simetrías*

a) Con el eje polar. $f(r, -\theta) : r = a[1 + \text{Sen}(-\theta)] = a(1 - \text{Sen}\theta) \neq f(r, \theta)$

b) Con el eje normal. $f(r, \pi - \theta) : r = a[1 + \text{Sen}(\pi - \theta)] = a(1 + \text{Sen}\theta) = f(r, \theta)$

c) Con el polo. $f(r, \pi + \theta) : r = a[1 + \text{Sen}(\pi + \theta)] = a(1 - \text{Sen}\theta) \neq f(r, \theta)$

Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje normal.

3. *Extensión.* Como $-1 \leq \text{Sen}\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 2a$, $\forall\, \theta \in [0, 2\pi]$; por lo que se trata de una curva cerrada.

4. *Dirección del polo.*

Si $r = 0 \Rightarrow 1 + \text{Sen}\theta = 0 \Rightarrow \text{Sen}\theta = -1$

Luego , una tangente en el polo es $\theta = 3\pi/2$

5. *Tabla de valores*

θ	r
30°	$1.5a$
60°	$1.86a$
90°	$2a$

θ	r
120°	$1.86a$
150°	$1.5a$
180°	a

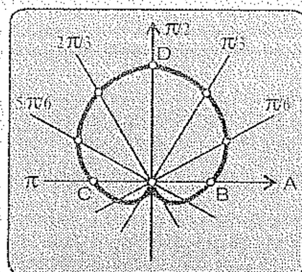


FIGURA 10.14

16 $r^2 = a^2\text{Sen}2\theta$ (Lemniscata)

Solución. Sea $f(r, \theta) : r^2 = a^2\text{Sen}2\theta$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow r = 0$

b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 0$

} La curva pasa por el polo

2. *Simetrías.*

a) Con el eje polar. $f(r, \theta) : r^2 = a^2\text{Sen}(-2\theta) = -a^2\text{Sen}2\theta \neq f(r, \theta)$

b) Con el eje normal. $f(r, \pi - \theta) : r^2 = a^2\text{Sen}(2\pi - 2\theta) = -a^2\text{Sen}2\theta \neq f(r, \theta)$

c) Con el polo. $f(r, \pi + \theta) : r^2 = a^2\text{Sen}(2\pi + 2\theta) = a^2\text{Sen}2\theta = f(r, \theta)$

Por tanto, la curva es simétrica respecto al polo.

3. *Extensión.* $r = \pm a\sqrt{\text{Sen}2\theta}$

$\therefore r \in R \Leftrightarrow \text{Sen}2\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2\theta \leq \pi$, esto es, r es un número finito para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ y $-a \leq r \leq a$. Por tanto, la curva es cerrada

4. *Dirección del polo.*

Si $r = 0 \Rightarrow \text{Sen}2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, esto es, las tangentes en el polo son las rectas

$\theta = 0, \theta = \pi/2, \theta = \pi, \theta = 3\pi/2$

5. *Tabla de valores*

θ	2θ	r
15°	30°	$\pm 0.7a$
30°	60°	$\pm 0.92a$
45°	90°	$\pm a$
60°	150°	$\pm 0.7a$

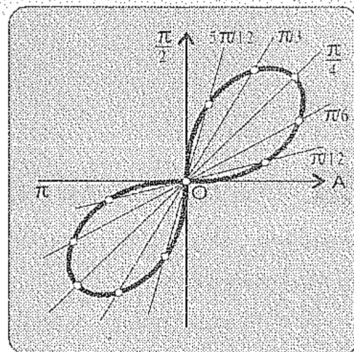


FIGURA 10.15

17 $r = a\,\text{Cos}^2(\theta/2)$

Solución. Sea $f(r, \theta) : r = a\,\text{Cos}^2(\theta/2) = \frac{a}{2}(1 + \text{Cos}\theta)$

1. *Intersecciones.*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow r = \frac{a}{2}(1 + 1) = a \Rightarrow B(a, 0)$

$\theta = \pi \Rightarrow r = \frac{a}{2}(1 - 1) = 0 \Rightarrow O(0, \pi)$

b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = \frac{a}{2}(1 + 0) = \frac{a}{2} \Rightarrow C(a/2, \pi/2)$

$\theta = 3\pi/2 \Rightarrow r = \frac{a}{2}(1 + 0) = \frac{a}{2} \Rightarrow D(a/2, 3\pi/2)$

2. *Simetrías.*

a) Con el eje polar. $f(r, -\theta)$: $r = \frac{a}{2}(1 + \text{Cos}(-\theta) = \frac{a}{2}(1 + \text{Cos}\theta) = f(r, \theta)$

b) Con el eje normal. $f(r, \pi - \theta)$: $r = \frac{a}{2}[1 + \text{Cos}(\pi - \theta)] = \frac{a}{2}(1 - \text{Cos}\theta) \neq f(r, \theta)$

c) *Con el polo.* $f(r, \pi + \theta)$: $r = \frac{a}{2}[1 + \text{Cos}(\pi + \theta)] = \frac{a}{2}(1 - \text{Cos}\theta) \neq f(r, \theta)$

Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje polar

3. *Extensión.* Como $-1 \leq \text{Cos}\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq a$, esto es , r es un número finito, por tanto , la gráfica de la curva es cerrada

4. *Dirección del polo.* Si $r = 0 \Rightarrow \text{Cos}\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$ es una tangente en el polo.

5. *Tabla de valores.*

θ	r
30°	0.93a
60°	0.75a
90°	0.50a

θ	r
120°	0.25a
150°	0.07a
180°	0

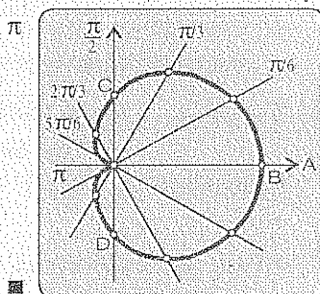


FIGURA 10.16

20 $r = a\ \text{Sen}2\theta$ (rosa de cuatro pétalos)

Solución. Sea $f(r, \theta) : r = a\ \text{Sen}2\theta$

1. *Intersecciones*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \vee \theta = \pi \Rightarrow r = 0$

b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \vee \theta = 3\pi/2 \Rightarrow r = 0$

Por tanto , la curva pasa por el polo

2. *Simetrías*

a) Con el eje polar. $f(r, -\theta)$: $r = a\ \text{Sen}(-2\theta) = -a\ \text{Sen}2\theta \neq f(r, \theta)$

Pero $f(-r, \pi - \theta)$: $-r = a\ \text{Sen}(2\pi - 2\theta) = -a\ \text{Sen}2\theta \Rightarrow r = a\ \text{Sen}2\theta = f(r, \theta)$

b) Con el eje normal. $f(-r, -\theta)$: $-r = a\ \text{Sen}2\theta = f(r, \theta)$

c) Con el polo. $f(r, \pi + \theta)$: $r = a\ \text{Sen}(2\pi + 2\theta) = a\ \text{Sen}2\theta = f(r, \theta)$

Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje polar, al eje normal y el polo.

3. *Extensión.* Como $-a \leq \text{Sen}2\theta \leq 1 \Rightarrow -a \leq r \leq a$, lo que nos dice que se trata de una curva cerrada.

4. *Dirección del polo.* Si $r = 0 \Rightarrow \text{Sen}2\theta = 0$

$$\Leftrightarrow 2\theta = 0 , \pi , 2\pi , 3\pi$$

Las tangentes en el polo son las rectas

$\theta = 0°$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$

5. *Tabla de valores*

θ	2θ	r
15°	30°	$0.5a$
30°	60°	$0.86a$
45°	90°	a
60°	120°	$0.86a$
75°	150°	$0.5a$

■

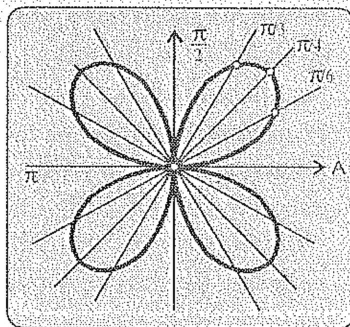


FIGURA 10.17

21 $r = a$ Cos5θ (rosa de cinco hojas)

Solución. Sea $f(r , \theta) : r = a \text{ Cos}5\theta$

1. *Intersecciones.*

a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow r = a \text{ Cos}0 = a \Rightarrow B(a , 0)$

$\theta = \pi \Rightarrow = a \text{ Cos}\pi = - a \Rightarrow C(-a , \pi)$

Como $r < 0$, B y C representan al mismo punto.

b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = a \text{ Cos}(\pi/2) = 0$

La curva pasa por el polo.

2. *Simetrías.*

a) Con el eje polar. $f(r , -\theta) : r = a \text{ Cos}(-5\theta) = a \text{ Cos}5\theta = f(r , \theta)$

b) Con el eje normal. $f(r , \pi - \theta) : r = \alpha \text{ Cos}(5\pi - 5\theta) = - a \text{ Cos}5\theta \neq f(r , \theta)$

c) Con el polo. $f(r , \pi + \theta) : r = a \text{ Cos}(5\pi + 5\theta) = - a \text{ Cos}5\theta \neq f(r , \theta)$

Por tanto, la curva es simétrica respecto al eje polar

3. *Extensión.* Como $- 1 \leq \text{Cos}5\theta \leq 1 \Rightarrow - a \leq r \leq a$, esto es , r es un número finito $\forall \theta \in [0 , 2\pi]$, por tanto se trata de una curva cerrada.

4. *Dirección del polo.*

Si $r = 0 \Rightarrow \text{Cos}5\theta = o \Leftrightarrow 5\theta = \pi/2 , 3\pi/2 , 5\pi/2 , 7\pi/2 , 9\pi/2 , 11\pi/2$, o sea , las tangentes en el polo son las rectas.

$\theta_1 = \pi/10$, $\theta_2 = 3\pi/10$, $\theta_3 = \pi/2$, $\theta_4 = 7\pi/10$, $\theta_5 = 9\pi/10$, $\theta_6 = 11\pi/10$, ...

5. *Tabla de valores.*
En este caso no es necesario construir una tabla de valores de r y θ , pues las tangentes en el polo sirven como *líneas de guía* para el trazado de la gráfica.
Para hallar los vértices de cada hoja bastará resolver el sistema $(r = a) \wedge (r = a\ \text{Cos}5\theta)$, esto es ,
$\text{Cos}5\theta = 1 \Leftrightarrow 5\theta = 0°, 2\pi , 4\pi , 6\pi , 8\pi$
$\Rightarrow \theta = 0 , \theta = 2\pi/5 , \theta = 4\pi/5 , \theta = 6\pi/5 \text{ y } \theta = 8\pi/5$

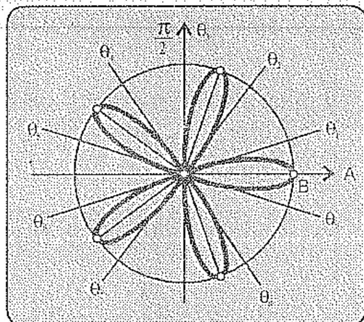


FIGURA 10.18

22 $r = a\ \text{Sen}4\theta$

El trazado de la gráfica (rosa de ocho hojas) se deja a cargo del lector.

23 $r = 2a\ \text{Tg}\theta\ \text{Sen}\theta$ (cisoide)

Solución. Sea $f(r , \theta) : r = 2a\ \text{Tg}\theta\ \text{Sen}\theta$

1. *Intersecciones*
   a) Con el eje polar . Si $\theta = 0$ y $\theta = \pi \Rightarrow r = 2a\,(0)\,(0) = 0$
   b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 2a\,(\infty)\,(1) = \infty$
   Por tanto, la curva pasa por el polo y no corta al eje normal.
2. *Simetrías*
   a) Con el eje polar. $f(r, -\theta) : r = 2a\ \text{Tg}(\theta)\ \text{Sen}(-\theta) = 2a\ \text{Tg}\theta\ \text{Sen}\theta = f(r , \theta)$
   b) Con el eje normal.
   $f(r , \pi - \theta) : r = 2a\,\text{Tg}(\pi - \theta)\ \text{Sen}(\pi - \theta) = - 2a\,\text{Tg}\theta\ \text{Sen}\theta \neq f(r , \theta)$
   c) Con el polo. $f(r , \pi + \theta): r = 2a\text{Tg}(\pi + \theta)\ \text{Sen}(\pi + \theta) = -2a\text{Tg}\theta\ \text{Sen}\theta \neq f(r , \theta)$
   Por tanto, la curva es simétrica respecto al eje polar
3. *Extensión.* Dado que $-\infty < \text{Tg}\theta < +\infty$, r es infinito para ciertos valores de θ, entonces se trata de una curva que se extiende indefinidamente arriba y debajo del eje polar.
4. *Dirección del polo.*
   Si $r = 0 \Rightarrow \text{Tg}\theta\ \text{Sen}\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$
   Luego , el eje polar es una tangente en el polo.

5. *Tabla de valores.*

θ	r
30°	$0.57a$
45°	$\sqrt{2}a$
60°	$3a$
90°	∞
120°	$-3a$
135°	$-\sqrt{2}a$
150°	$-0.57a$
180°	0

■

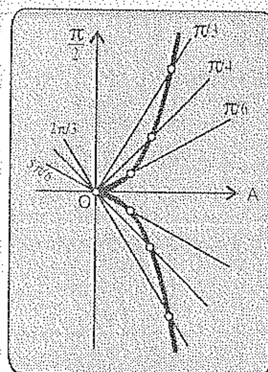


FIGURA 10.19

24 $r\theta = a$ (espiral hiperbólico o recíproco)

Solución. Sea $f(r, \theta)$: $r\,\theta = a$

1. *Intersecciones*
   a) Con el eje polar. $\theta = \pi \Rightarrow r = a/\pi \Rightarrow B(a/\pi, \pi)$
   b) Con el eje normal. $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 2a/\pi \Rightarrow C(2a/\pi, \pi/2)$
2. *Simetrías*
   a) Con el eje polar : $f(r, -\theta)$: $r(-\theta) = a \Rightarrow r\theta = -a \neq f(r, \theta)$
   b) Con el eje normal. $f(r, \pi - \theta)$: $r(\pi - \theta) = a \neq f(r, \theta)$
   c) Con el polo. $f(r, \pi + \theta)$: $r(\pi + \theta) = a \neq f(r, \theta)$
   Por tanto, la curva no es simétrica con respecto al eje polar, el eje normal y el polo.
3. *Extensión.* Como r no está definido para $\theta = 0$, se trata de una curva abierta. Se extiende a lo largo del eje polar.
4. *Dirección del polo.* Como $r \neq 0$, la curva no tiene tangentes en el polo.
5. *Tabla de valores*

θ	r
$\pi/6$	$6a/\pi$
$\pi/3$	$3a/\pi$
$\pi/2$	$2a/\pi$
$2\pi/3$	$3a/2\pi$
$5\pi/6$	$6a/5\pi$
π	a/π

θ	r
$7\pi/6$	$6a/7\pi$
$4\pi/3$	$3a/4\pi$
$3\pi/2$	$2a/3\pi$
$5\pi/3$	$3a/5\pi$
$11\pi/6$	$6a/11\pi$
2π	$a/2\pi$

■

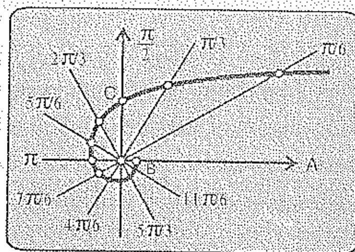


FIGURA 10.20

25 $r^2 = a^2\theta$ (Espiral logarítmica)

Solución.

1. *Intersecciones*

   a) Con el eje polar. Si $\theta = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

   $\theta = \pi \Rightarrow r = \pm a\sqrt{\pi} \Rightarrow B(\pm a\sqrt{\pi}, \pi)$

   b) Con el eje normal. Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2\pi} \Rightarrow C(\pm a\sqrt{2\pi}/2, \pi/2)$

   $\theta = 3\pi/2 \Rightarrow r = \pm \frac{a}{2}\sqrt{6\pi} \Rightarrow D(\pm a\sqrt{6\pi}/2, 3\pi/2)$

2. *Simetrías.* La curva no es simétrica respecto al eje polar, al eje normal y al polo.

3. *Extensión.* $r = \pm a\sqrt{\theta}$

   Como r es un número real $\forall\ \theta \geq 0$, entonces se trata de curva abierta.

4. *Dirección del polo.* Si $r = 0 \Rightarrow \theta = 0$, luego el eje polar es una tangente en el polo.

5. *Tabla de valores.*

θ	r
$\pi/6$	$a\sqrt{\pi/6}$
$\pi/3$	$a\sqrt{\pi/3}$
$2\pi/3$	$a\sqrt{2\pi/3}$
$5\pi/6$	$a\sqrt{5\pi/6}$

θ	r
$7\pi/6$	$a\sqrt{7\pi/6}$
$4\pi/3$	$a\sqrt{4\pi/3}$
$5\pi/3$	$a\sqrt{5\pi/3}$
2π	$a\sqrt{2\pi}$

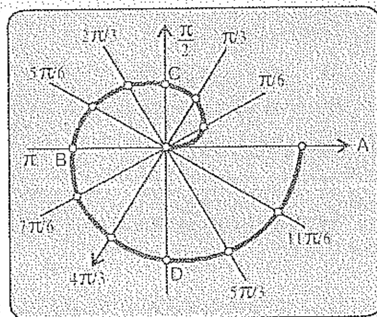


FIGURA 10.21

10.5 INTERSECCIONES DE CURVAS DADAS EN COORDENADAS POLARES

El método para obtener los puntos de intersección de dos curvas en coordenadas polares es semejante al empleado en coordenadas rectangulares. Debemos destacar, sin embargo, que si resolvemos un par de ecuaciones polares simultáneas, obtenemos aquellos puntos que tienen iguales valores de r y θ, pero no obtendremos necesariamente todos los puntos de intersecciones de las curvas. Esto es evidente, por que un punto de intersección de dos curvas puede tener un par de coordenadas polares respecto a una de las cuervas, y otro par relativo a la otra curva.
Para resolver dos ecuaciones polares simultáneas y obtener los puntos que tengan los mismos valores de r y θ en ambas curvas, podemos empezar resolviendo cada

ecuación para r , continuar resolviendo la ecuación en θ obtenida poniendo en la ecuación las dos expresiones de r , y finalmente, sustituyendo los valores obtenidos para θ en cualquier expresión de r para obtener cada valor correspondiente a r.

10.6 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN COORDENADAS POLARES

TEOREMA 10.3 La distancia entre dos puntos $P_1(r_1 , \theta_1)$ y $P_2(r_2 , \theta_2)$ en coordenadas polares está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \, Cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Demostración. En efecto, tracemos los radios vectores de P_1 y P_2 ; $r_1 = |\overline{OP}_1|$ y $r_2 = |\overline{OP}_2|$, formando así el triángulo OP_1P_2. Por la ley de los cosenos , se tiene :

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1 r_2 \, Cos(\theta_1 - \theta_2)$$

de donde :

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1 r_2 \, Cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

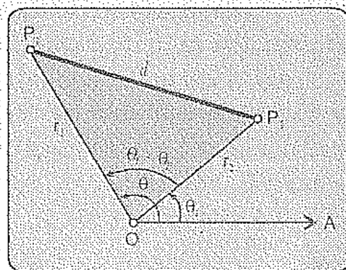


FIGURA 10.22

EJERCICIOS . Grupo 39

En cada uno de los ejercicios 1 - 12 , calcular , analítica y gráficamente , los puntos de intersección de las curvas dadas.

1 $r = 2 \, Sen\theta$ (1)
$r = 1$ (2)

Solución. Sustituyendo (2) en (1) se tiene

$$1 = 2 \, Sen\theta \Rightarrow Sen\theta = 1/2$$
$$\Leftrightarrow \theta_1 = \pi/6 \vee \theta_2 = 5\pi/6$$

Luego, los puntos de intersección son :

$$P_1(1 , \pi/9) \text{ y } P_2(1 , 5\pi/6)$$ ■

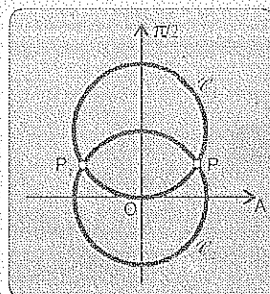


FIGURA 10.23

2 $r = 4\ \text{Cos}\theta\ ;\ r = 2$

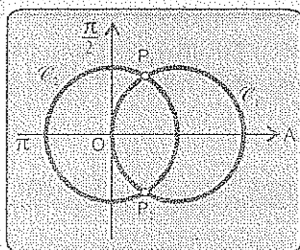


FIGURA 10.24

Solución. Sustituyendo $r = 2$ en la primera ecuación se tiene : $2 = 4\ \text{Cos}\theta \Rightarrow \text{Cos}\theta = 1/2$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = \pi/3 \vee \theta_2 = 5\pi/3$$

Luego , los puntos de intersección son

$$P_1(2\ ,\ \pi/3) \vee P_2(2\ ,\ 5\pi/3)$$ ■

3 $\theta = \pi/4\ ;\ r = 3$

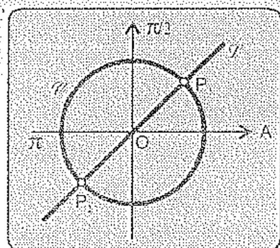


FIGURA 10.25

Solución. La primera ecuación representa una recta y la segunda ecuación una circunferencia. La intersección de ambas ecuaciones nos da el punto $P_1(3\ ,\pi/4)$. Pero otra representación de la recta dada es $\theta = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$, de modo que junto con la segunda ecuación obtenemos el punto de intersección $P_2(3\ ,\ 5\pi/4)$. ■

4 $r\ \text{Cos}\theta = 4 \quad (1)$
$r\ \text{Sen}\theta = 4 \quad (2)$

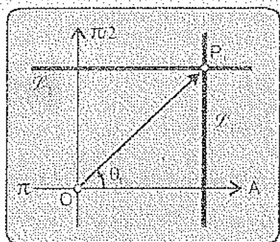


FIGURA 10.26

Solución. La ecuación (1) representa una recta $\mathscr{L}_1$ paralela al eje normal y la ecuación (2) una recta $\mathscr{L}_2$ paralela al eje polar. Luego , si :

$r\ \text{Sen}\theta = r\ \text{Cos}\theta \Rightarrow \text{Tg}\theta = 1 \Leftrightarrow \theta_1 = \pi/4 \vee \theta_2 = 5\pi/4$

En la Figura 10.26 podemos observar que para $\theta_2 = 5\pi/4$ no existe intersección, esto es evidente, pues dos rectas se cortan en uno y sólo un punto.

Por tanto , para $\theta_1 = \pi/4$, en (2) , obtenemos $r = 4\sqrt{2} \Rightarrow P_1(4\sqrt{2}\ ,\ \pi/4)$ ■

5 $r\ \text{Cos}\theta = 2 \quad (1)$
$r = 3\ \text{Cos}\theta \quad (2)$

Solución. Sustituyendo (2) en (1) se tiene :

$$3\ \text{Cos}^2\theta = 2 \Rightarrow \text{Cos}\theta = \pm\sqrt{6}/3$$

Descartamos la solución negativa, dado que en el segundo y tercer cuadrante no

hay intersección.

Si $\text{Cos}\theta = \sqrt{6}/3 \Rightarrow \theta_1 = 35°16' \vee \theta_2 = 324°44'$

Luego , en (1) , $r(\sqrt{6}/3) = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{6}$

Por tanto , los puntos de intersección son

$$P_1(\sqrt{6}\,,\,35°16')\ \text{y}\ P_2(\sqrt{6}\,,\,324°44')$$ ■

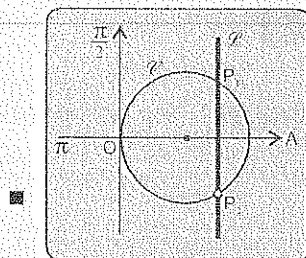


FIGURA 10.27

7 $r_2 = 9\ \text{Cos}2\theta$ (1)

$r = 3\sqrt{2}\ \text{Sen}\theta$ (2)

Solución. Sustituyendo (2) en (1) se tiene

$$18\ \text{Sen}^2\theta = 9(1 - 2\ \text{Sen}^2\theta) \Leftrightarrow \text{Sen}\theta = \pm 1/2$$

Descartamos la solución negativa toda vez que en la Figura 10.28 vemos que las intersecciones ocurren en el primer y segundos cuadrantes y en el polo.

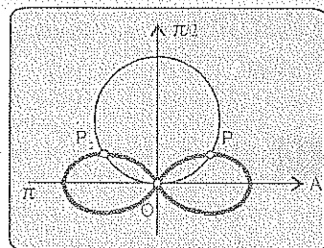


FIGURA 10.28

Si $\text{Sen}\theta = 1/2 \Leftrightarrow \theta_1 = \pi/6 \vee \theta_2 = 5\pi/6$

Luego , en (2) : $r = 3\sqrt{2}(1/2) = 3\sqrt{2}/2$

Por tanto, los puntos de intersección son : $P_1(3\sqrt{2}/2\,,\,\pi/6)$, $P_2(3\sqrt{2}/2\,,\,5\pi/6)$ y el polo. ■

8 $r^2 = 4\ \text{Sen}2\theta$ (1)

$r = 2\sqrt{2}\ \text{Cos}\theta$ (2)

Solución. Sustituyendo (2) en (1) se tiene :

$$8\ \text{Cos}^2\theta = 8\ \text{Sen}\theta\ \text{Cos}\theta$$

$$\Rightarrow \text{Cos}\theta(\text{Cos}\theta - \text{Sen}\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Cos}\theta = 0 \vee \text{Cos}\theta - \text{Sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \text{Cos}\theta = 0 \vee \text{Tg}\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi/2 \vee \theta = \pi/4$$

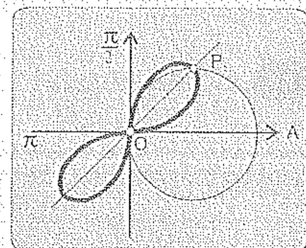


FIGURA 10.29

Luego , en (2) ; si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 0$, y si $\theta = \pi/4 \Rightarrow r = 2$

Por tanto , los puntos de intersección son :

El polo y $P_1(2\,,\,\pi/4)$ ■

9 $r = 1 + \text{Cos}\theta$ (1)

$r = \sqrt{3}\ \text{Sen}\theta$ (2)

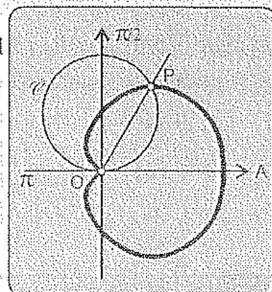


FIGURA 10.30

Solución. Si $1 + \text{Cos}\theta = \sqrt{3}\ \text{Sen}\theta \Rightarrow \text{Cos}\theta - \sqrt{3}\ \text{Sen}\theta = -1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\text{Cos}\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{Sen}\theta = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \text{Cos } 60° \text{ Cos}\theta - \text{Sen } 60° \text{ Sen}\theta = \text{Cos } 120°$

$\Rightarrow \text{Cos}(60° + \theta) = \text{Cos } 120° \Leftrightarrow 60° + \theta = 120° \Rightarrow \theta = 60°$

Luego , en (1) , $r = 1 + 1/2 = 3/2 \Rightarrow P_1(3/2\ ,\ 60°)$

En (1), si $r = 0 \Rightarrow \text{Cos}\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$

En (2) , si $r = 0 \Rightarrow \text{Sen}\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi$

Como ambas curvas tienen la misma tangente en el polo, se interceptan también en el polo. ▪

10 $r = \dfrac{3}{2 - \text{Cos}\theta}$ (1)

$r\ \text{Cos}\theta = 1$ (2)

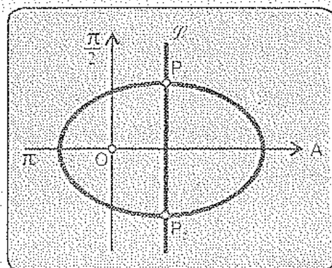


FIGURA 10.31

Solución. Sustituyendo (1) en (2) se tiene

$$\frac{3\ \text{Cos}\theta}{2 - \text{Cos}\theta} = 1 \Rightarrow \text{Cos}\theta = 1/2$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = \pi/3 \vee \theta_2 = 5\pi/3$$

Luego , en (2) : $r(1/2) = 1 \Leftrightarrow r = 2$

Por lo tanto, los puntos de intersección son

$P_1(2\ ,\ \pi/3) \vee P_2(2\ ,\ 5\pi/3)$ ▪

11 $r = \text{Cosec}^2(\theta/2)$ (1)

$3r = 8(1 + \text{Cos}\theta)$ (2)

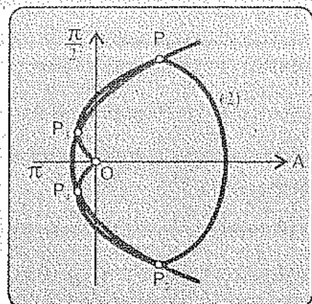


FIGURA 10.32

Solución. En (1) : $r = \dfrac{1}{\text{Sen}^2(\theta/2)} = \dfrac{2}{1 - \text{Cos}\theta}$ (3)

Sustituyendo en (2) : $\dfrac{6}{1 - \text{Cos}\theta} = 8(1 + \text{Cos}\theta)$

de donde : $\text{Cos}^2\theta = 1/4 \Leftrightarrow \text{Cos}\theta = \pm 1/2$

Si $\text{Cos}\theta = 1/2 \Leftrightarrow \theta_1 = \pi/3 \vee \theta_2 = 5\pi/3$

Sustituyendo en (3) obtenemos $r = 4$

Si $\text{Cos}\theta = -1/2 \Leftrightarrow \theta_3 = 2\pi/3 \quad \vee \quad \theta_4 = 4\pi/3 \Rightarrow r = 4/3$

Por tanto, los puntos de intersección son

$$P_1(4\,,\pi/3)\,,\ P_2(4\,,5\pi/3)\,,\ P_3(4/3\,,2\pi/3)\ \text{y}\ P_4(4/3\,,4\pi/3)$$ ■

12 $r - 2r\,\text{Cos}\theta = 1\ ;\ r = \text{Sen}\theta$

La solución se deja a cargo del lector. ***Sol.*** $P_1(1\,,\pi/2)\,,\ P_2(0.347\,,159°40')$

13 Hallar la distancia entre los puntos $P_1(3\,,\pi/3)$ y $P_2(5\,,7\pi/4)$

Solución. Por el Teorema 10.3 : $d(P_1\,,P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\,\text{Cos}(\theta_2 - \theta_1)}$

$$\Rightarrow d(P_1\,,P_2) = \sqrt{9 + 25 - 2(3)(5)\,\text{Cos}\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)} \qquad (1)$$

$$\text{Cos}\left(\frac{7/\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{Cos}\left(\frac{17}{12}\pi\right) = \text{Cos}\left(\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = -\text{Cos}\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -0.26$$

Luego , en (1) , se tiene : $d(P_1\,,P_2) = \sqrt{34 + 30(0.26)} = 6.46$ ■

14 Hallar la distancia entre los puntos $P_1(2\,,\pi/6)$ y $P_2(4\,,5\pi/4)$

Solución. $d(P_1\,,P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\,\text{Cos}(\theta_2 - \theta_1)}$

$$= \sqrt{4 + 16 - 2(2)(4)\,\text{Cos}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} \qquad (1)$$

$$\text{Cos}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \text{Cos}\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \text{Cos}\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\text{Cos}(\pi/12) = -0.96$$

Luego , en (1) : $d(P_1\,,P_2) = \sqrt{20 - 16(-0.92)} = \sqrt{27.36} = 5.23$ ■

15 Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $A(0\,,19°)$, $B(1\,,\pi/3)$, $C(2\,,\pi/4)$ y $D(3\,,0)$

Solución. Por la fórmula del Teorema 10.3 se tiene :

$$|\overline{AB}| = \sqrt{0 + 1 - 2(0)(1)\,\text{Cos}(60° - 19°)} = 1$$

$|\overline{BC}| = \sqrt{1 + 4 - 2(1)(2)\,\text{Cos}(60° - 45°)} = \sqrt{5 - 4\,\text{Cos}\,15°} = \sqrt{5 - 3.84} = 1.07$

$|\overline{CD}| = \sqrt{4 + 9 - 2(2)(3)\,\text{Cos}(45° - 0°)} = \sqrt{13 - 13\,(0.707)} = 2.12$

$|\overline{AD}| = \sqrt{0 + 9 - 2(0)(3)\,\text{Cos}\,(19°)} = 3$

Luego, el perímetro del cuadrilátero es : $2p = 1 + 1.07 + 2.12 + 3 = 7.19$ ■

16 Demostrar que los puntos $A(1 , \pi/3)$, $B(\sqrt{3} , \pi/6)$ y $C(1 , 0)$ son vértices de un triángulo equilátero.

Demostración. En efecto , por el Teorema 10.3 :

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1 + 3 - 2(1)(\sqrt{3})\,\text{Cos}(\pi/3 - \pi/6)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\,\text{Cos}(\pi/6)} = 1$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{3 + 1 - 2(\sqrt{3})(1)\,\text{Cos}(\pi/6 - 0)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\,(\sqrt{3}/2)} = 1$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{1 + 1 - 2(1)(1)\,\text{Cos}(\pi/3 - 0)} = \sqrt{2 - 2(1/2)} = 1$$

Por tanto , el ΔABC es equilátero. ■

17 Demostrar que $P(3\sqrt{3}/2 , \pi/3)$ es punto medio del segmento cuyos extremos son $A(3 , \pi/6)$ y $B(3 , \pi/2)$.

Demostración. Bastará probar que $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$

En efecto :

$$|\overline{AP}| = \sqrt{(27/4) + 9 - (3\sqrt{3}/2)(3)\,\text{Cos}(\pi/3 - \pi/6)} = \sqrt{63/4 - 27/2} = 3/2$$

$$|\overline{BP}| = \sqrt{9 + (27/4) - 2(3)(3\sqrt{2}/2)\,\text{Cos}(\pi/2 - \pi/3)} = \sqrt{63/4 - 9\sqrt{3}(\sqrt{3}/2)} = 3/2$$

$$\therefore\ |\overline{AP}| = |\overline{BP}|$$ ■

18 Empleando las fórmulas de transformación de coordenadas rectangulares a polares, demuéstrese que la fórmula de la distancia polar del Teorema 10.3 puede obtenerse directamente a partir de la fórmula de la distancia en coordenadas rectangulares.

Demostración. En efecto , si $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, entonces por el Teorema 10.1 : $d^2 = (r_1\text{Cos}\theta_1 - r_2\text{Cos}\theta_2)^2 + (r_1\text{Sen}\theta_1 - r_2\text{Sen}\theta_2)^2$

$$d^2 = (r_1^2\text{Cos}^2\theta_1 - 2r_1r_2\,\text{Cos}\theta_1\,\text{Cos}\theta_2 + r_2^2\,\text{Cos}^2\theta_2) + (r_1^2\text{Sen}^2\theta_1 - 2r_1r_2\,\text{Sen}\theta_1\,\text{Sen}\theta_2 + r_2^2\,\text{Sen}^2\theta_2)$$

$$= r_1^2(\text{Cos}^2\theta_1 + \text{Sen}^2\theta_1) + r_2^2(\text{Cos}^2\theta_2 + \text{Sen}^2\theta_2) - 2r_1r_2(\text{Cos}\theta_1\,\text{Cos}\theta_2 + \text{Sen}\theta_1\,\text{Sen}\theta_2)$$

$$= r_1^2(1) + r_2^2(1) - 2r_1r_2\,\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\therefore\ d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\,\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)}$$ ■

19 Discutir la fórmula de la distancia dada en el Teorema 10.3 cuando los puntos P_1 y P_2 son colineales con el polo. Considerar los casos en que los puntos están del mismo lado y de lados opuestos del eje polar.

Solución. a) Si P_1 y P_2 están en un mismo lado del eje polar (Figura 10.33), entonces $\theta_1 = \theta_2$, implica que : $\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) = \text{Cos } 0° = 1$

Luego, $d(P_1, P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2} = \sqrt{(r_1 - r_2)^2} = |r_1 - r_2|$

b) Si P_1 y P_2 están en lados opuestos del eje polar (Figura 10.34), entonces $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ y $\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) = \text{Cos}\theta = -1$

Luego, $d(P_1, P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2} = |r_1 + r_2|$ ■

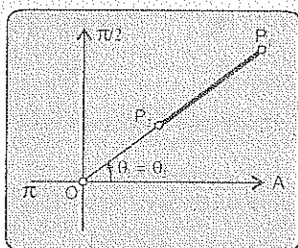


FIGURA 10.33

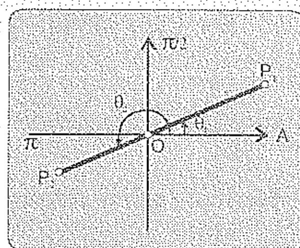


FIGURA 10.34

20 Discutir la fórmula de la distancia dada en el Teorema 10.3 cuando los puntos P_1 y P_2 están ambos sobre el eje polar. Considerar los casos en que los puntos están del mismo lado y de lados opuestos al polo.

Solución. a) Si P_1 y P_2 están del mismo lado del polo, entonces $\theta_1 = \theta_2 = 0°$ y $\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) = \text{Cos } 0° = 1$

Luego, $d(P_1, P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2} = \sqrt{(r_1 - r_2)^2} = |r_1 - r_2|$

b) Si P_1 y P_2 están de lados opuestos del polo, entonces $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$ y $\text{Cos}(\theta_2 - \theta_1) = \text{Cos}(\pi) = -1$

Luego, $d(P_1, P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(-1)} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2} = |r_1 + r_2|$ ■

21 Demostrar que la fórmula de la distancia dada en el Teorema 10.3 es verdadera cualesquiera que sean las posiciones de los puntos P_1 y P_2 en el plano coordenado polar.

La demostración queda a cargo del lector.

22 Demostrar que el área K de un triángulo cuyos vértices son el polo y los puntos $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ está dada por la fórmula

$$K = \frac{1}{2}\,|\,r_1 r_2 \,\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)\,|$$

Demostración. En efecto , sea el $\Delta\, OP_1P_2$ cuya base es el radio vector $\overline{OP_2} = r_2$

$$\Rightarrow\; K = \frac{1}{2}\,|\,(\overline{OP_2}) \times h = \frac{1}{2}\,|\,(r_2)\, h\,| \qquad (1)$$

Pero, $h = r_1 \,\text{Sen}\theta \;\Rightarrow\; h = r_1 \,\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) obtenemos :

$$K = \frac{1}{2}\,|\,r_1 r_2 \,\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)\,|$$ ■

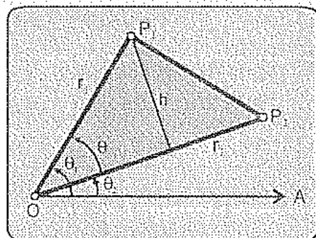


FIGURA 10.35

23 Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P_1(2\,,\pi/3)$ y $P_2(1\,, 3\pi/4)$.

Solución. Haciendo uso de la fórmula obtenida en el Ejercicio 22, se tiene :

$$K = \frac{1}{2}\,|\,(2)(1)\,\text{Sen}(\pi/3 - 3\pi/4)\,| = \frac{1}{2}\,|\,2\,\text{Sen}(5\pi/12)\,|$$

$$\therefore\; K = 0.966\ u^2$$ ■

24 Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P_1(2\,, 2\pi/3)$, $P_2(3\,, \pi/3)$ y $P_3(1\,, \pi/6)$.

Solución. Por la fórmula del Ejercicio 22 se tiene :

$$a(\Delta OP_1P_2) = \frac{1}{2}\,|\,(2)(3)\,\text{Sen}(2\pi/3 - \pi/3)\,|$$
$$= \frac{1}{2}\,|\,6\,\text{Sen}(\pi/3)\,| = 2.6\ u^2$$

$$a(\Delta OP_2P_3) = \frac{1}{2}\,|\,(3)(1)\,\text{Sen}(\pi/3 - \pi/6)\,|$$
$$= \frac{1}{2}\,|\,3\,\text{Sen}(\pi/6)\,| = 0.75\ u^2$$

$$a(\Delta OP_1P_3) = \frac{1}{2}\,|\,(2)(1)\,\text{Sen}(2\pi/3 - \pi/6)\,| = 1\ u^2$$

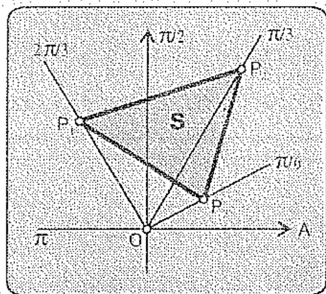


FIGURA 10.36

Luego : $S = a(\Delta OP_1P_2) + a(\Delta OP_2P_3) - a(\Delta OP_1P_3)$

$$= 2.6 + 0.75 - 1 = 2.35\ u^2$$ ■

25 Hallar el área del triángulo de vértices dados, cuando el polo está dentro del triángulo.

Solución. Sea el triángulo de vértices $A(r_1 , \theta_1)$, $B(r_2 , \theta_2)$ y $C(r_3 , \theta_3)$. Entonces :

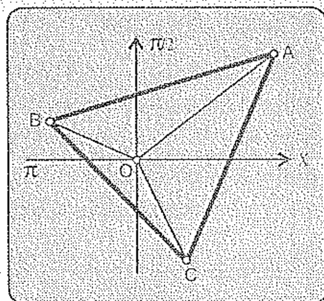


FIGURA 10.37

$$a(\Delta OAB) = \frac{1}{2} \left| r_1 r_2 \, \text{Sen}(\theta_2 - \theta_1) \right|$$

$$a(\Delta OBC) = \frac{1}{2} \left| r_2 r_3 \, \text{Sen}\theta_3 - \theta_2) \right|$$

$$a(\Delta OAC) = \frac{1}{2} \left| r_1 r_3 \, \text{Sen}(\theta_3 - \theta_1) \right|$$

Sumando estas áreas obtenemos el área buscada :

$$a(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \left| r_1 r_2 \, \text{Sen}(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \, \text{Sen}(\theta_3 - \theta_2) + r_1 r_3 \, \text{Sen}(\theta_3 - \theta_1) \right|$$ ■

10.7 ECUACION DE UNA RECTA EN COORDENADAS POLARES

TEOREMA 10.4. Si (p , ω) es el par principal de coordenadas polares del pie de la perpendicular trazada desde el polo a cualquier recta en el plano coordenado polar , la ecuación polar de la recta es r

$$\textbf{Cos}(\theta - \omega) = \textbf{p} \qquad (1)$$

Si la recta pasa por el polo , su ecuación es de la forma

$$\theta = \textbf{k} \qquad (2)$$

siendo k una constante que puede restríngirse a valores no negativos menores de 180°.

Si la recta es perpendicular al eje polar y está a p unidades del polo , su ecuación es de la forma

$$\textbf{r Cos}\theta = \pm \textbf{p} \ , \ p > 0 \qquad (3)$$

debiendo tomar el signo positivo o negativo según que la recta esté a la derecha o a la izquierda del polo.

Si la recta es paralela al eje polar y está a p unidades de él , su ecuación es de la forma

$$\textbf{r Sen}\theta = \pm \textbf{p} \ , \ p > 0 \qquad (4)$$

debiendo tomar el signo positivo o el negativo según que la recta esté arriba o abajo del eje polar.

Demostración. En efecto , sea $P(r , \theta)$ un punto cualquiera sobre la recta $\mathscr{L}$ dada ; p la distancia $\overline{ON}$ del origen a la recta ; ω el ángulo del eje X a la normal.

En el ΔONP : $\text{Cos}(\theta - \pi) = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{p}{r}$

de donde obtenemos : $r\,\text{Cos}(\theta - \omega) = p$

Si $\omega = 0°$ o $180°$, la recta es paralela al eje normal y su ecuación es : $r\,\text{Cos}\theta = p \vee r\,\text{Cos}\theta = -p$

Si $\omega = 90°$ o $270°$, la recta es paralela al eje polar y su ecuación es

$$r\,\text{Sen}\theta = p \vee r\,\text{Sen}\theta = -p$$

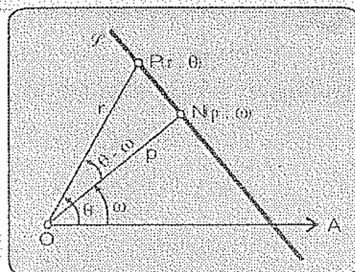


FIGURA 10.38

10.8 ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA EN COORDENADAS POLARES

TEOREMA 10.5 La ecuación polar de una circunferencia de centro el punto (c, α) y radio a es

$$r^2 - 2cr\,\text{Cos}(\theta - \alpha) + c^2 = a^2 \quad (1)$$

Si su centro está en el polo , la ecuación polar es

$$r = a \quad (2)$$

Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje polar , su ecuación es de la forma

$$r = \pm 2a\,\text{Cos}\theta \quad (3)$$

debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que el centro esté a la derecha o a la izquierda del polo.

Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje normal, su ecuación es de la forma

$$r = \pm 2a\,\text{Sen}\theta \quad (4)$$

debiéndose tomar el signo positivo o negativo según que el centro esté arriba o abajo del polo.

10.9 ECUACION GENERAL DE LAS CONICAS EN SU FORMA POLAR

TEOREMA 10.6 Sea e la excentricidad de una cónica cuyo foco está sobre el polo y a p unidades de la directriz correspondiente. Si el eje focal coincide con el eje polar, la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{e\,p}{1 \pm e\,\text{Cos}\theta} \quad (1)$$

en donde se debe tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté a la derecha o a la izquierda del polo. Si el eje focal coincide con el eje normal, la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{e\,p}{1 \pm e\,\text{Sen}\theta} \tag{2}$$

en donde se debe tomar el signo positivo o el negativo según que la directriz esté arriba o abajo del eje polar.

Demostración. En efecto , sea P(r , θ) un punto cualquiera de la cónica , $\mathscr{L}$ la directriz correspondiente al foco O. Designemos la distancia $|\overline{OD}| = p$, $p > 0$. Desde p tracemos las perpendiculares $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ al eje polar y a la directriz, respectivamente.

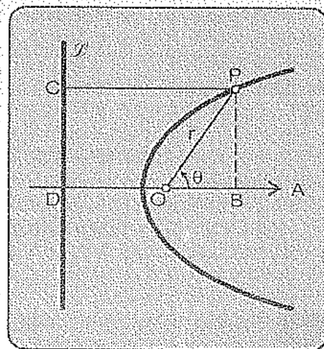


FIGURA 10.39

Por definición de cónica : $\frac{PO}{PC} = e$.

Dado que $\overline{PO} = r$ y $\overline{PC} = \overline{DO} + \overline{OB} = p + r\,\text{Cos}\theta$

Entonces : $\frac{r}{p + r\,\text{Cos}\theta} = e \Leftrightarrow r = \frac{e\,p}{1 - e\,\text{Cos}\theta}$

Si la directriz está a la derecha del polo y a p unidades de él , puede verificarse de manera similar que

$$r = \frac{e\,p}{1 + e\,\text{Sen}\theta}$$

Si el eje focal coincide con el normal de manera que la directriz sea paralela al eje polar y a p unidades de él , podemos demostrar , en forma análoga , que la ecuación de la cónica es de la forma

$$r = \frac{e\,p}{1 \pm e\,\text{Cos}\theta}$$

EJERCICIOS . *Grupo 40*

1 De la ecuación (1) , deducir las ecuaciones polares

$$r\,\text{Cos}\theta = \pm\, p \quad \text{y} \quad r\,\text{Sen}\theta = \pm\, p$$

de una línea recta , dadas en el Teorema 10.4

Solución. Por el Teorema 10.4 , la ecuación polar de una recta es

$$r\,\text{Cos}(\theta - \omega) = p$$

Si $\omega = 0 \Rightarrow r\,\text{Cos}(\theta - 0) = p \Rightarrow r\,\text{Cos}\theta = p$

$\omega = \pi \Rightarrow r\,\text{Cos}(\theta - \pi) = p \Rightarrow r\,\text{Cos}\theta = -p$

Si $\omega = \pi/2 \Rightarrow r\,\text{Cos}(\theta - 90) = p \Rightarrow r\,\text{Sen}\theta = p$

$\omega = 3\pi/2 \Rightarrow r\,\text{Cos}(\theta - 270°) = p \Rightarrow r\,\text{Sen}\theta = -p$ ■

3 Demostrar que las ecuaciones polares de las rectas que son perpendiculares y paralelas al eje polar pueden escribirse en las formas

$$r = \pm p\,\text{Sec}\theta \;\; y \;\; r = \pm p\,\text{Cosec}\theta$$

Demostración. En efecto, de las ecuaciones del Ejercicio 1 tenemos :

$$r\,\text{Cos}\theta = \pm p \Rightarrow r = \frac{\pm p}{\text{Cos}\theta} = \pm p\,\text{Sec}\theta$$

$$r\,\text{Sen}\theta = \pm p \Rightarrow r = \frac{\pm p}{\text{Sen}\theta} = \pm p\,\text{Cosec}\theta$$ ■

4 Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $P(4\,,\,\pi/3)$ y es perpendicular al radio vector de P.

Solución. Sea la recta $\mathscr{L}: r\,\text{Cos}(\theta - \omega) = p$ (1)

Como $\overline{OP} \perp \mathscr{L} \Rightarrow p = 4$

Si $P \in \mathscr{L} \Rightarrow 4\,\text{Cos}(60° - \omega) = 4 \Rightarrow \text{Cos}(60 - \omega) = 1$

$\Leftrightarrow 60° - \omega = 0 \Rightarrow \omega = 60°$

Luego , (1) , se tiene , $\mathscr{L}: r\,\text{Cos}(\theta - \pi/3) = 4$ ■

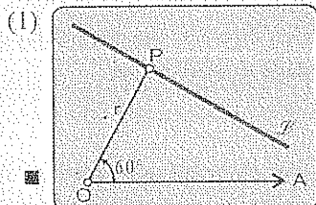


FIGURA 10.40

En cada uno de los ejercicios 5 - 8 , transformar la ecuación rectangular dada a la forma polar normal de la ecuación (1) del Teorema 10.4

5 $3x - 4y + 5 = 0$

Solución. Sea $\mathscr{L}: 3x - 4y + 5 = 0$

Pasando la ecuación de $\mathscr{L}$ a su forma normal se tiene :

$$k = -\sqrt{(3)^2 + (4)^2} = -5 \Rightarrow \mathscr{L}: -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$$

de donde , $p = 1$, $\text{Cos}\omega = -3/5$, $\text{Sen}\omega = 4/5 \Rightarrow \text{Tg}\omega = -4/3$

Por el Teorema 10.4 , la ecuación polar de la recta $\mathscr{L}$ es

$$\mathscr{L}: r\,\text{Cos}(\theta - \omega) = 1\,,\ \text{donde}\ \omega = \text{arcTg}(-4/3)$$ ■

6 $\mathscr{L}: 5x + 12y + 26 = 0$

Solución. Pasando la ecuación de $\mathscr{L}$ a su forma normal se tiene :

$$k = -\sqrt{(5)^2 + (12)^2} = -13 \Rightarrow \mathscr{L}: -\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 2 = 0$$

de donde : p = 2 , Senω = - 5/13 , Cosω = - 12/13 ⇒ Tgω = 12/5

Luego , por el Teorema 10.4 , la ecuación polar de la recta $\mathscr{L}$ es

$$\mathscr{L}: r\,\text{Cos}(\theta - \omega) = 2 \text{ , de donde } \omega = \text{arc Tg}(12/5)$$ ■

7 $\mathscr{L}: 4x + 3y - 10 = 0$

Solución. Pasando la ecuación de $\mathscr{L}$ a su forma normal se tiene :

$$k = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5 \Rightarrow \mathscr{L}: \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0$$

de donde , p = 2 , Cosω = 4/5 , Senω = 3/5 ⇒ Tgω = 3/4

Luego , la forma polar de $\mathscr{L}$ es

$$\mathscr{L}: r\,\text{Cos}(\theta - \omega) = 2 \text{ , donde } \omega = \text{arc Tg}(3/4)$$ ■

8 $\mathscr{L}: 2x + y = 0$

Solución. Si $k = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$, la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ en su forma normal es,

$$\mathscr{L}: \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$$

de donde : p = 0 , Senω = $1/\sqrt{5}$, Cosω = $2/\sqrt{5}$ ⇒ Tgω = 1/2

Luego , la ecuación de $\mathscr{L}$ es

$$\mathscr{L}: r\,\text{Cos}(\theta - \omega) = 0 \text{ , donde } \omega = \text{arc Tg}(1/2)$$ ■

9 Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto A(6 , 2π/3) y es perpendicular al eje polar.

Solución. Por el Teorema 10.4 , fórmula (4) , la ecuación polar de la recta buscada es

$$\mathscr{L}: r\,\text{Cos}\theta = -p \qquad (1)$$

($\mathscr{L}$ está a la izquierda del polo)

Si A(6 , 2π/3) ∈ $\mathscr{L}$ ⇒ 6 Cos(2π/3) = - p ⇔ p = 3

Luego , en (1) , se tiene ; $\mathscr{L}: r\,\text{Cos}\theta = -3$ ■

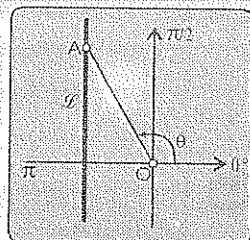


FIGURA 10.41

10 Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $P(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y es paralela al eje polar.

Solución. Por la fórmula (4) del Teorema 10.4, la ecuación polar de la recta es $\mathscr{L}: r\ \text{Sen}\theta = p$ (1)

Si $P(2\sqrt{2}, 3\pi/4) \in \mathscr{L} \Rightarrow 2\sqrt{2}\ \text{Sen}(3\pi/4) = p \Leftrightarrow p = 2$

Por tanto , en (1) , la ecuación buscada es

$$\mathscr{L}: r\ \text{Sen}\theta = 2$$

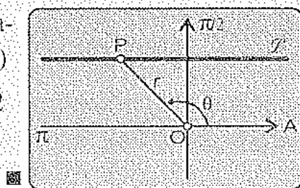


FIGURA 10.42

11 Considerando las áreas de ciertos triángulos, demostrar que la ecuación polar de la recta que pasa por los puntos $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ puede escribirse en la forma : $r_1 r\ \text{Sen}(\theta_1 - \theta) + r_2 r\ \text{Sen}(\theta - \theta_2) = r_1 r_2\ \text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)$

Demostración. En efecto, sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la recta $\mathscr{L}$.

Por la fórmula obtenida en el Ejercicio 22 , grupo 39 , se tiene :

$$a(\Delta OP_1P_2) = \frac{1}{2}\ r_1 r_2\ \text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$a(\Delta OP_1P) = \frac{1}{2}\ r_1 r\ \text{Sen}(\theta_1 - \theta)$$

$$a(\Delta OPP_2) = \frac{1}{2}\ r_2 r\ \text{Sen}(\theta - \theta_2)$$

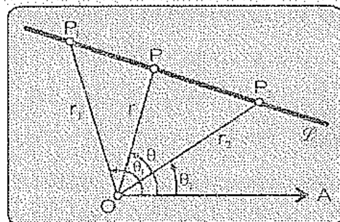


FIGURA 10.43

y dado que : $a(\Delta OP_1P) + a(\Delta OPP_2) = a(\Delta OP_1P_2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ r_1 r\ \text{Sen}(\theta_1 - \theta) + \frac{1}{2}\ r_2 r\ \text{Sen}(\theta - \theta_2) = \frac{1}{2}\ r_1 r_2\ \text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}: r_1 r\ \text{Sen}(\theta_1 - \theta) + r_2 r\ \text{Sen}(\theta - \theta_2) = r_1 r_2\ \text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

12 Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por los puntos $P_1(4, 2\pi/3)$ y $P_2(2\sqrt{2}, \pi/4)$

Solución. Haciendo uso de la fórmula del Ejercicio 11 se tiene :

$$4r\ \text{Sen}(2\pi/3 - \theta) + 2\sqrt{2}\ r\ \text{Sen}(\theta - \pi/4) = 8\sqrt{2}\ \text{Sen}\ (2\pi/3 - \pi/4)$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}: 2r\ \text{Sen}(2\pi/3 - \theta) + \sqrt{2}\ r\ \text{Sen}(\theta - \pi/4) = 4\sqrt{2}\ \text{Sen}(5\pi/12)$$

13 Demostrar que la ecuación polar general de la circunferencia , ecuación (1) del Teorema 10.5 , puede obtenerse por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos, dada en el Teorema 10.3

Demostración. En efecto , sea P(r , θ) un punto cualquiera de la circunferencia de centro C(c , α) y radio a.

En cualquier posición de P se debe verificar que

$$d(P , C) = a \Rightarrow \sqrt{r^2 + c^2 - 2cr \operatorname{Cos}(\theta - \alpha)} = a$$

de donde obtenemos : $r - 2cr \operatorname{Cos}(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$ ■

14 Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el punto C(6 , 3π/4) y radio igual a 4.

Solución. Por el Teorema 10.5 , la ecuación polar de la circunferencia es

$$r^2 - 2cr \operatorname{Cos}(\theta - \alpha) + c^2 = a^2 \text{ , en donde , } c = 6 \text{ , } a = 4 \text{ y } \alpha = 3\pi/4$$

Luego : $r^2 - 12r \operatorname{Cos}(\theta - 3\pi/4) + 36 = 16 \Leftrightarrow \mathscr{C} : r^2 - 12r \operatorname{Cos}(\theta - 3\pi/4) + 20 = 0$ ■

15 Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el punto C(3 , 7π/6) y que pasa por el punto P(2 , 4π/3).

Solución. Ecuación polar de la circunferencia : $r^2 - 2cr \operatorname{Cos}(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$ en donde $c = 3$, $\alpha = 7\pi/6$ y $a = |\overline{CP}|$

$$\Rightarrow a = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 - 2(3)(2) \operatorname{Cos}(4\pi/3 - 7\pi/6)} = \sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$$

Luego, en (1) : $r^2 - 6r \operatorname{Cos}(\theta - 7\pi/6) + 9 = 13 - 6\sqrt{3} \Leftrightarrow r^2 - 6r \operatorname{Cos}(7\pi/6 - \theta) + 6\sqrt{3} - 4 = 0$

16 Demostrar los casos especiales de la ecuación (1) dado en el Teorema 10.5.

Demostración.

a) Si el centro C(c , α) está en el polo , entonces : $c = 0$ y $\alpha = 0$.
Por tanto la ecuación : $$r^2 - 2cr \operatorname{Cos}(\theta - \alpha) + c^2 = a^2 \qquad (1)$$
se transforma en : $r^2 = a^2 \Rightarrow r = a$

b) Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje polar , a la derecha del polo , entonces , $a = c$ y $\alpha = 0$. Luego en (1)
$$r^2 - 2ar \operatorname{Cos}\theta = 0 \Leftrightarrow r = 2a \operatorname{Cos}\theta$$
Cuando el centro está a la izquierda del polo , entonces , $a = c$ y $\alpha = \pi$
Luego , en (1) : $r^2 - 2ar \operatorname{Cos}(\theta - \pi) = 0 \Leftrightarrow r = -2a \operatorname{Cos}\theta$

c) Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje normal y arriba del polo , entonces , $c = a$ y $\alpha = \pi/2$. Luego , en (1) :
$$r^2 = 2ar \operatorname{Cos}(\theta - \pi/2) = 0 \Leftrightarrow r = 2a \operatorname{Sen}\theta$$
Cuando el centro esta debajo del polo , entonces , $c = a$ y $\alpha = 3\pi/2$
$$\Rightarrow r^2 - 2ar \operatorname{Cos}(\theta - 3\pi/2) \Leftrightarrow r = -2a \operatorname{Sen}\theta$$ ■

17 Si el centro de una circunferencia que pasa por el polo es el punto (a, α), demuéstrese que su ecuación es, $r = 2a\,\text{Cos}(\theta - \alpha)$

Demostración. En efecto, en el ΔOCP, por la ley de los cosenos se tiene

$|\overline{CP}|^2 = |\overline{OP}|^2 + |\overline{OC}|^2 - 2|\overline{OP}|\,|\overline{OC}|\,\text{Cos}(\theta - \alpha)$

Por ser radios : $|\overline{CP}| = |\overline{OC}| = a$

$$\Rightarrow a^2 = r^2 + a^2 - 2ar\,\text{Cos}(\theta - \alpha)$$

$$\therefore\ r = 2a\,\text{Cos}(\theta - \alpha)$$ ■

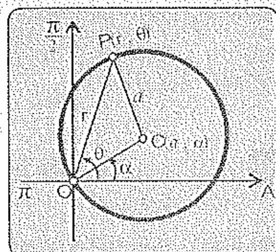


FIGURA 10.44

18 Del resultado del Ejercicio 17, demuéstrese que la ecuación polar de cualquier circunferencia que pasa por el polo puede escribirse en la formar $r = k_1\,\text{Cos}\theta + k_2\,\text{Sen}\theta$, en donde k_1 y k_2 son constantes.

Demostración. En efecto, del ejercicio anterior se tiene $r = 2a\,\text{Cos}(\theta - \alpha)$

$$\Rightarrow r = 2a(\text{Cos}\theta\,\text{Cos}\alpha + \text{Sen}\theta\,\text{Sen}\theta) = (2a\,\text{Cos}\alpha)\,\text{Cos}\theta + (2a\,\text{Sen}\alpha)\,\text{Sen}\theta$$

Llamando, $2a\,\text{Cos}\alpha = k_1$ y $2a\,\text{Sen}\alpha = k_2$, donde k_1 y k_2 son constantes,

$$\Rightarrow r = k_1\,\text{Cos}\theta + k_2\,\text{Sen}\theta$$ ■

19 Transformando la ecuación polar del Ejercicio 18 a su forma rectangular, determinar el significado de las constantes k_1 y k_2. Demostrar también que si a es el radio de la circunferencia, se verifica que

$$k_1^2 + k_2^2 = 4a^2$$

Demostración. Si $r = k_1\,\text{Cos}\theta + k_2\,\text{Sen}\theta \Rightarrow r_1 = k_1\left(\frac{x}{r}\right) + k_2\left(\frac{y}{r}\right)$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - k_1x - k_2y = 0$$

Completando cuadrados para las variables x e y se tiene

$$\left(x - \frac{1}{2}k_1\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}k_2\right)^2 = \frac{1}{4}(k_1^2 + k_2^2) \qquad (1)$$

Como se puede observar en la ecuación (1), $k_1/2$ y $k_2/2$ son las coordenadas del centro de la circunferencia y como a es el radio entonces

$$a^2 = \frac{1}{4}(k_1^2 + k_2^2) \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = 4a^2$$ ■

En cada uno de los ejercicios 20 - 23 , hallar el radio y las coordenadas polares del centro de la circunferencia a partir de la ecuación polar dada.

20 $r = 4\ \text{Cos}\theta$

Solución. Comparando con la ecuación (3) del Teorema 10.5 $r = 2a\ \text{Cos}\theta$, se tiene que : $2a = 4 \Rightarrow a = 2$

Como el centro está en el eje polar , entonces $r = a = 2$. Por lo que

$$C(2 , 0) \text{ y } a = 2$$ ■

21 $r = 2\ \text{Cos}\theta + 2\sqrt{3}\ \text{Sen}\theta$

Solución. La ecuación dada es de la forma : $r = k_1\ \text{Cos}\theta + k_2\ \text{Sen}\theta$

Luego , $k_1 = 2 \Rightarrow 2a\ \text{Cos}\alpha = 2$ (1)

$k_2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2a\ \text{Sen}\alpha = 2\sqrt{3}$ (2)

Dividiendo (2) entre (1) se tiene : $\text{Tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \pi/3$

Sustituyendo en (1) : $2a\ \text{Cos}(\pi/3) = 2 \Rightarrow a = 2$ (radio)

Coordenadas del centro : $C(a , \alpha) \Rightarrow C(2 , \pi/3)$ ■

22 $r^2 - 2\sqrt{2}\ r\ \text{Cos}\theta - 2\sqrt{2}\ r\ \text{Sen}\theta - 5 = 0$

Solución. Podemos escribir : $r^2 - 4r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{Cos}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{Sen}\theta\right) = 5$

$$\Leftrightarrow r^2 - 4r\ \text{Cos}(\theta - \pi/4) = 5$$

Si comparamos con la ecuación polar : $r^2 - 2cr\ \text{Cos}(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$

se deduce que : $2c = 4 \Rightarrow c = 2$, $\alpha = \pi/4$ y $a^2 - c^2 = 5 \Rightarrow a = 3$ (radio)

Centro de la circunferencia , $C(a , \alpha) \Rightarrow C(3 , \pi/4)$ ■

23 $r^2 + r\ \text{Cos}\theta - \sqrt{3}\ r\ \text{Sen}\theta - 3 = 0$

Solución. La ecuación la podemos escribir de la forma

$$r^2 - 2r\left(-\frac{1}{2}\ \text{Cos}\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{Sen}\theta\right) = 3 \Leftrightarrow r^2 - 2r\ \text{Cos}(\theta - 2\pi/3) = 3$$

Comparándola con la ecuación polar $r^2 - 2cr\ \text{Cos}(\theta - \alpha) = a^2 - c^2$, deducimos que :

$$c = 1 \text{ , } \alpha = 2\pi/3 \text{ y } a^2 - c^2 = 3 \Rightarrow a = 2$$

Si el centro de la circunferencia es $C(c , \alpha) \Rightarrow C(1 , 2\pi/3)$ ■

En cada uno de los ejercicios 24 y 25 , transformar la ecuación rectangular dada de la circunferencia a la forma general representada por la ecuación (1) del Teorema 10.5 o uno de sus casos especiales. En cada caso, hallar el radio y las coordenadas polares del centro.

24 $x^2 + y^2 + 2x = 0$

Solución. Pasando a coordenadas polares se tiene

$$r^2 + 2r\,\text{Cos}\theta = 0 \Rightarrow r = -2\,\text{Cos}\theta$$

Comparándola con la ecuación $r = -2a\,\text{Cos}\theta$, se sigue que : $a = 1$ (radio)
Como el centro está a la izquierda del polo ,entonces $\alpha = \pi$
Si $C(a , \alpha) \Rightarrow C(1 , \pi)$ son las coordenadas polares del centro. ■

25 $x^2 + y^2 - x - y = 0$

Solución. Transformando a coordenadas polares se tiene

$$r^2 - r\,\text{Cos}\theta - r\,\text{Sen}\theta = 0 \Rightarrow r = \text{Cos}\theta + \text{Sen}\theta$$

La ecuación es de la forma $r = k_1\,\text{Cos}\theta + k_2\,\text{Sen}\theta$

Si $k_1 = 2a\,\text{Cos}\alpha \Rightarrow 1 = 2a\,\text{Cos}\alpha$ y si $k_2 = 2a\,\text{Sen}\alpha \Rightarrow 1 = 2a\,\text{Sen}\alpha$

Dividiendo ambas ecuaciones resulta , $\text{Tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/4$

Luego , en la primera ecuación : $1 = 2a\,(\sqrt{2}/2) \Leftrightarrow a = \sqrt{2}/2$ (radio)

Por tanto , si $C(a , \alpha) \Rightarrow C(\sqrt{2}/2 , \pi/4)$ son las coordenadas del centro. ■

26 Deducir la ecuación $r = \dfrac{e\,p}{1 \pm e\,\text{Cos}\theta}$ del Teorema 10.6

Solución. Sea $P(r , \theta)$ un punto cualquiera de la cónica. Por definición

$$\frac{\text{OP}}{\text{PC}} = e \qquad (1)$$

En la Figura 10.45 : $\overline{OP} = r$ y $\overline{PC} = \overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD}$

$$\Rightarrow \overline{PC} = r\,\text{Cos}(\pi - \theta) + p = -r\,\text{Cos}\theta + p$$

Luego, en (1) : $\dfrac{r}{p - r\,\text{Cos}\theta} = e \Leftrightarrow r = \dfrac{e\,p}{1 + e\,\text{Cos}\theta}$

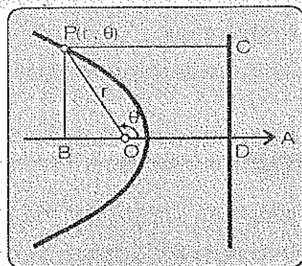


FIGURA 10.45

27 Deducir las ecuaciones $r = \dfrac{e\,p}{1 \pm e\,\text{Sen}\theta}$ del Teorema 10.6

El ejercicio se deja a cargo del lector.

28 Demostrar que las ecuaciones (1) del Teorema 10.6 pueden reducirse a las formas $r = \frac{p}{2}$ Cosec²(θ/2) y $r = \frac{p}{2}$ Sec²(θ/2) respectivamente en el caso de una parábola.

Demostración. En efecto , en una parábola $e = 1$, entonces :

$$r = \frac{p}{1 - \text{Cos}\theta} = \frac{p}{2\,\text{Sen}^2(\theta/2)} = \frac{p}{2}\,\text{Cosec}^2(\theta/2)$$

$$r = \frac{p}{1 + \text{Cos}\theta} = \frac{p}{2\,\text{Cos}^2(\theta/2)} = \frac{p}{2}\,\text{Sec}^2(\theta/2)$$ ■

29 Demostrar que en cada una de las ecuaciones del Teorema 10.6 , la longitud de un lado recto es igual a $2ep$.

Demostración. Si en las ecuaciones (1) , $\theta = 90° \Rightarrow r = \frac{ep}{1 \pm 0} = ep$

y si en las ecuaciones (2) , $\theta = 0° \Rightarrow r = \frac{ep}{1 \pm 0} = ep$

En ambos casos , $LR = 2r \Rightarrow LR = 2ep$ ■

En cada uno de los ejercicios 30 - 32 , identificar la cónica cuya ecuación polar se da. Para una parábola, hállense las coordenadas polares del vértice y la longitud del lado recto. Para una cónica central , hállense las coordenadas polares del centro y los vértices , y las longitudes de los ejes y cada lado recto. Hallar también la ecuación rectangular de cada cónica.

30 $r = \frac{5}{2 - 2\,\text{Cos}\theta}$

Solución. Si $r = \frac{5/2}{1 - \text{Cos}\theta} = \frac{ep}{1 - e\,\text{Cos}\theta}$

entonces : $e = 1$ y $p = 5/2$

La ecuación dada es una parábola cuyo eje focal coincide con el eje polar.

Como el vértice está a la izquierda del polo , a una distancia p/2 de éste , las coordenadas del vértice serán $V(5/4 , \pi)$ • $LR = 2ep \Rightarrow LR = 5$

Ecuación rectangular de la cónica

$$r = \frac{5}{2 - 2(x/r)} = \frac{5r}{2r - 2x} \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2x + 5$$

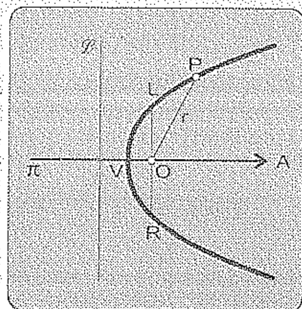


FIGURA 10.46

de donde , elevando al cuadrado obtenemos : $4y^2 - 20x - 25 = 0$ ■

31 $r = \dfrac{6}{3 + \text{Sen}\theta}$

Solución. Si $r = \dfrac{2}{1 + \frac{1}{3}\ \text{Sen}\theta} = \dfrac{e\,p}{1 + e\ \text{Sen}\theta}$

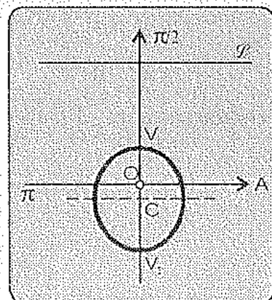


FIGURA 10.47

entonces : $e = 1/3$, $ep = 2 \Rightarrow p = 6$. Como $e < 1$, la cónica es una elipse cuyo eje focal coincide con el eje normal y cuya directriz $\mathscr{L}$ es paralela al eje polar a una distancia de p = 6.

Si $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = \dfrac{6}{3+1} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow V_1(3/2\ ,\ \pi/2)$

$\theta = 3\pi/2 \Rightarrow r = \dfrac{6}{3-1} = 3 \Rightarrow V_2(3\ ,\ 3\pi/2)$

Dado que $|\overline{OV_1}| = r_1 = 3/2$ y $|\overline{OV_2}| = r_2 = 3 \Rightarrow 2a = r_1 + r_2 = 9/2$

$|\overline{OC}| = |\overline{OV_2}| - |\overline{CV_2}| = 3 - 9/4 = 3/4 \Rightarrow C(3/4\ ,\ 3\pi/2)$

$LR = 2ep = 2(1/3)(6) = 4$. También $LR = 2b^2/a \Rightarrow 2b^2 = \left(\frac{9}{4}\right)(4) \Rightarrow 2b = 3\sqrt{2}$

Ecuación rectangular de la cónica

$$r = \frac{6}{3 + (y/r)} = \frac{6r}{3r + y} \Rightarrow 3\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - y$$

Elevando al cuadrado obtenemos : $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$ ■

32 $r = \dfrac{3}{2 + 4\ \text{Cos}\theta}$

Solución. $r = \dfrac{3/2}{1 + 2\text{Cos}\theta} = \dfrac{e\,p}{1 + e\ \text{Cos}\theta}$

de donde , $e = 2$, $ep = 3/2 \Rightarrow p = 3/4$

Como $e > 1$, la cónica es una hipérbola , cuyo eje focal coincide con el eje polar.

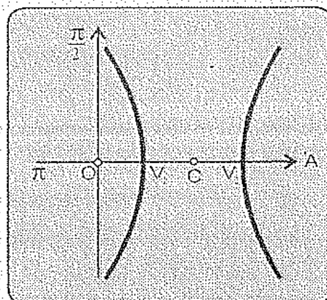


FIGURA 10.48

Para $\theta = 0° \Rightarrow r = \dfrac{3}{2+4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_1(1/2\ ,\ 0)$

$\theta = \pi \Rightarrow r = \dfrac{3}{2-4} = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow V_2(-3/2\ ,\ \pi)$

$2a = |\overline{V_1V_2}| = |r_1 + r_2| = |1/2 - 3/2| = 1$

$|\overline{OC}| = |\overline{OV_1}| + |\overline{V_1C}| = 1/2 + 1/2 = 1 \Rightarrow C(1\ ,\ 0)$

$\text{LR} = 2ep \Rightarrow \text{LR} = 2(2)(3/4) = 3.$

También $\text{LR} = \dfrac{2b^2}{a} \Rightarrow (3)\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2b^2 \Rightarrow 2b = \sqrt{3}$

Ecuación rectangular de la cónica

$$r = \frac{3}{2 + 4(x/r)} = \frac{3r}{2r + 4x} \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = 3 - 4x$$

Elevando al cuadrado obtenemos : $12x^2 - 4y^2 - 24x + 9 = 0$ ■

33 Si la cónica $r = \dfrac{ep}{1 - e\,\text{Cos}\theta}$ representa una parábola , hállese las coordenadas polares de su vértice y la ecuación polar de su directriz

Solución. En una parábola $e = 1 \Rightarrow r = \dfrac{p}{1 - \text{Cos}\theta}$

Para $\theta = \pi$ (el vértice está a la izquierda del polo) , se tiene : $r = \dfrac{p}{1+1} = \dfrac{p}{2} \Rightarrow V(p/2\ ,\ \pi)$

Ecuación de la directriz : $r\ \text{Cos}(\theta - \omega) = p$

Pero $\omega = \pi \Rightarrow r\ \text{Cos}(\theta - \pi) = p$

$\Leftrightarrow \mathscr{L}: r\ \text{Cos}\theta = -p$ ■

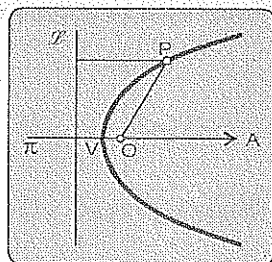


FIGURA 10.49

34 Si la cónica $r = \dfrac{ep}{1 + e\,\text{Cos}\theta}$ representa una elipse , demuéstrese que la longitud de su eje menor es $\dfrac{2ep}{\sqrt{1 - e^2}}$

Demostración. En efecto , la cónica dada representa una elipse, una de cuyas directrices está a la derecha del polo y a p unidades de él.

Sabemos que $\text{LR} = 2ep \Rightarrow \dfrac{2b^2}{a} = 2ep$

$\Rightarrow b^2 = aep$ (1)

Si $\theta = \pi \Rightarrow r = \dfrac{ep}{1 - e} \Rightarrow |\overline{OV_2}| = \dfrac{ep}{1 - e}$

Si $\theta = 0° \Rightarrow r = \dfrac{ep}{1 + e} \Rightarrow |\overline{OV_1}| = \dfrac{ep}{1 + e}$

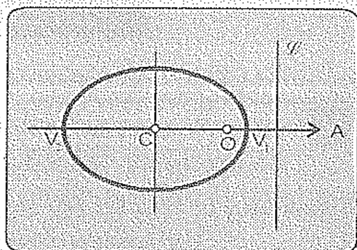


FIGURA 10.50

Sumando se tiene : $|\overline{OV}_2| + |\overline{OV}_1| = \frac{2e\,p}{1 - e^2} \Rightarrow a = \frac{e\,p}{1 - e^2}$

Luego , en (1) : $b^2 = \frac{(e\,p)^2}{1 - e^2} \Rightarrow 2b = \frac{2e\,p}{\sqrt{1 - e^2}}$ ■

35 Si la cónica $r = \frac{e\,p}{1 - e\,\text{Sen}\theta}$ representa una hipérbola , demuéstrese que la longitud de su eje transverso es $\frac{2e\,p}{e^2 - 1}$

Demostración. En efecto , la cónica es una hipérbola cuyo eje focal coincide con el eje normal. Entonces , para :

$$\theta = 90° \Rightarrow r_1 = |\overline{OV}_1| = \frac{e\,p}{1 - e}$$

$$\theta = 270° \Rightarrow r_2 = |\overline{OV}_2| = \frac{e\,p}{1 + e}$$

Restando se tiene : $|\overline{OV}_2| - |\overline{OV}_1| = \frac{-2e\,p}{1 - e^2}$

$$\therefore\ 2a = \frac{2e\,p}{e^2 - 1}$$ ■

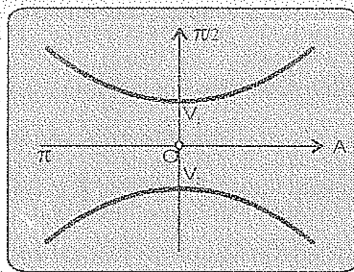


FIGURA 10.51

10.10 PROBLEMAS RELATIVOS A LUGARES GEOMETRICOS EN COORDENADAS POLARES

EJERCICIOS . *Grupo 41*

1 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su radio vector es siempre proporcional a su ángulo polar.

Solución. 1. Sea $P(r , \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $r = k\,\theta$

2. El lugar geométrico representa la *espiral de Arquímides.* ■

2 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su radio vector es siempre inversamente proporcional a su ángulo polar.

Solución. 1. Sea $P(r , \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe cumplir la condición geométrica : $r = k/\theta$

2. Entonces : $r\theta = k$

El lugar geométrico es la *espiral hiperbólica o recíproca.* ■

3 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su radio vector es siempre proporcional a su ángulo polar.

Solución. 1. Sea $P(r , \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica : $r^2 = k\theta$

2. El lugar geométrico representa a la *espiral parabólica.* ■

4 Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el logaritmo de su radio vector , es siempre proporcional a su ángulo polar.

Solución. 1. Sea $P(r , \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición : $\text{Ln}\,r = k\theta$

2. De donde : $r = e^{k\theta}$

El lugar geométrico representa a la *espiral logarítmica.* ■

5 Hallar la ecuación polar del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su radio vector es siempre inversamente proporcional a su ángulo polar.

Solución. 1. Sea $P(r , \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $r^2 = k/\theta$

2. De donde obtenemos : $r^2\theta = k$

El lugar geométrico se denomina *Litus.* ■

6 Sean O y B los extremos de un diámetro fijo de una circunferencia de radio *a*. Sea t la tangente en B. Desde O tracemos una secante cualquiera S que corte

a la circunferencia y a t en los puntos C y D , respectivamente. Hallar la ecuación , en coordenadas cartesianas , del lugar geométrico de un punto P sobre S tal que $|\overline{OP}| = |\overline{CD}|$ para cada posición de S a medida que gira en torno de O.

Solución. 1. Sea P(x , y) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición

$$|\overline{OP}| = |\overline{CD}| \qquad (1)$$

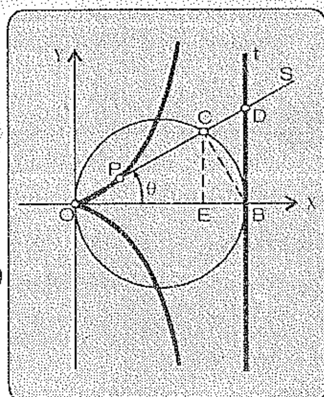


FIGURA 10.52

2. Hallando la forma analítica de (1)

$$|\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

$|\overline{CD}| = |\overline{OD}| - |\overline{OC}|$

En el ΔOBD : $|\overline{OD}| = |\overline{OB}|\ \text{Sec}\theta = 2a\ \text{Sec}\theta$

En el ΔOCB : $|\overline{OC}| = |\overline{OB}|\ \text{Cos}\theta = 2a\ \text{Cos}\theta$

Luego: $|\overline{CD}| = 2a\ (\text{Sec}\theta - \text{Cos}\theta) = 2a\ \text{Tg}\theta\ \text{Sen}\theta$

Pero , $m_s = \text{Tg}\theta = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \text{Sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Entonces : $|\overline{CD}| = \dfrac{2a\ y^2}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (3)$

3. Sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2a\,y^2}{x\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

El lugar geométrico es una curva llamada *cisoide.* ■

7 En la Figura 10.52 , hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta S si $|\overline{OP}| = |\overline{PC}|$ para toda posición de S.

Solución. 1. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{OP}| = |\overline{PC}|$

Como $|\overline{PC}| = |\overline{OC}| = |\overline{OP}| \Rightarrow |\overline{OP}| = |\overline{OC}| - |\overline{OP}| \Leftrightarrow 2|\overline{OP}| = |\overline{OC}|$ (1)

2. Forma analítica : $|\overline{OP}| = r$ y $|\overline{OC}| = |\overline{OB}|\ \text{Cos}\theta = 2a\ \text{Cos}\theta$

3. Luego en (1) se tiene : $2r = 2a\ \text{Cos}\theta \Rightarrow r = a\ \text{Cos}\theta$

El lugar geométrico es un circunferencia. ■

8 En la Figura 10.52 , hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta S si $|\overline{OP}| = 2\,|\overline{PC}|$ para toda posición de S.

Solución. 1. Sea $P(r, \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrica : $|\overline{OP}| = 2|\overline{PC}|$

Dado que $|\overline{PC}| = |\overline{OC}| - |\overline{OP}| \Rightarrow |\overline{OP}| = 2(|\overline{OC}| - |\overline{OP}|)$

$\Leftrightarrow 3|\overline{OP}| = 2|\overline{OC}|$ (1)

2. Forma analítica : $|\overline{OP}| = r$ y $|\overline{OC}| = |\overline{OB}| \operatorname{Cos}\theta = 2a \operatorname{Cos}\theta$

3. Luego en (1) se tiene : $3r = 4a \operatorname{Cos}\theta \Rightarrow r = \frac{4}{3} a \operatorname{Cos}\theta$

El lugar geométrico es una circunferencia. ■

9 En la Figura 10.52 , hallar la ecuación del lugar geométrico del punto P de la recta S si $|\overline{OP}| = \frac{1}{2}|\overline{PC}|$ para toda posición de S.

Solución. 1. Sea $P(r, \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición geométrico $|\overline{OP}| = \frac{1}{2}|\overline{PC}|$

Como $|\overline{PC}| = |\overline{OC}| - |\overline{OP}| \Rightarrow |\overline{OP}| = \frac{1}{2}(|\overline{OC}| - |\overline{OP}|) \Rightarrow 3|\overline{OP}| = |\overline{OC}|$ (1)

2. Forma analítica : $|\overline{OP}| = r$ y $|\overline{OC}| = 2a \operatorname{Cos}\theta$

3. Luego , en (1) : $3r = 2a \operatorname{Cos}\theta \Rightarrow r = \frac{2}{3} a \operatorname{Cos}\theta$

El lugar geométrico es una circunferencia. ■

10 En la Figura 10.52 , sea E el pie de la perpendicular trazada del punto C al eje polar. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de S si $|\overline{OP}| = |\overline{CE}|$ para toda posición de S.

Solución. 1. Sea $P(r, \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica : $|\overline{OP}| = |\overline{CE}|$ (1)

2. Forma analítica : $|\overline{OP}| = r$ y $|\overline{CE}| = |\overline{OC}| \operatorname{Sen}\theta = (2a \operatorname{Cos}\theta) \operatorname{Sen}\theta$

3. Luego , en (1) : $3r = 2a \operatorname{Sen}\theta \operatorname{Cos}\theta \Rightarrow r = a \operatorname{Sen}2\theta$

El lugar geométrico es una rosa de 4 hojas. ■

11 En la Figura 10.52 , hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P de la recta S si $|\overline{OP}| = |\overline{OE}|$ para toda posición de S.

Solución. 1. Sea $P(r, \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la

condición geométrica : $|\overline{OP}| = |\overline{OE}|$ (1)

2. Forma analítica : $|\overline{OP}| = r$ y $|\overline{OE}| = |\overline{OC}|\ Cos\theta = (2a\ Cos\theta)Cos\theta$
3. Luego , en (1) , se tiene : $r = 2a\ Cos^2\theta$ ■

12 En la Figura 10.52 , hallar la ecuación del lugar geométrico del punto P de la recta S si $|\overline{OP}| = |\overline{EB}|$ para toda posición de S.

Solución. 1. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad geométrica : $|\overline{OP}| = |\overline{EB}|$ (1)

2. Forma analítica : $|\overline{OP}| = r$ y $|\overline{EB}| = |\overline{OB}| - |\overline{OE}| = 2a - |\overline{OC}|\ Cos\theta$

$$= 2a - 2a\ Cos^2\theta = 2a(1 - Cos^2\theta)$$

3. Luego , en (1) , se tiene : $r = 2a\ Sen^2\theta$ ■

13 Un punto P se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a los dos puntos fijos $F(a\ ;\ 0°)$ y $F'(a\ ,\ \pi)$ es siempre igual a la constante b^2. Demostrar que la ecuación polar del lugar geométrico de P es

$$r^2 = a^2Cos2\theta \pm \sqrt{b^4 - a^4\ Sen^2 2\theta}$$

Los lugares geométricos se llaman *óvalos de Cassini.*

Demostración. 1. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico que en cualquier posición se debe tener : $|\overline{PF}| \cdot |\overline{PF'}| = b^2$

2. Forma analítica : $\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\ Cos\theta} \cdot \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\ Cos(\pi - \theta)} = b^2$
3. $\Rightarrow \sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar\ Cos\theta)\ (a^2 + r^2 + 2ar\ Cos\theta)} = b^2$

$\Rightarrow (a^2 + r^2)^2 = (2ar\ Cos\theta)^2 = b^4 \Rightarrow r^4 - 2a^2(2\ Cos^2\theta - 1)r^2 + a^4 - b^4 = 0$

$\Rightarrow r^2 = a^2(Cos^2\theta)r^2 + a^4 - b^4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = a^2\ Cos2\theta \pm \sqrt{a^4 Cos^2 2\theta - (a^4 - b^4)}$

$$= a^2\ Cos2\theta \pm \sqrt{b^4 - a^4(1 - Cos^2 2\theta)}$$

$$\therefore\ r^2 = a^2\ Cos2\theta \pm \sqrt{b^4 - a^4\ Sen^2 2\theta}$$ ■

14 Trazar la gráfica de la ecuación de los ovalos de Cassini (Ejercicio 13) cuando $b = a$. Demostrar que en este caso el lugar geométrico es una lemniscata.

El ejercicio se deja a cargo del lector.

15 Desde un punto fijo O de una circunferencia dada, de radio a se traza una cuerda cualquiera $\overline{OB}$. Se prolonga la cuerda hasta el punto P de tal manera que la distancia $|\overline{BP}|$ sea siempre una constante igual a k. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico descrito por P a medida que la cuerda prolongada gira en torno de O.

Trazar la gráfica del caracol representada por la ecuación $r = 2a\,\text{Cos}\theta + k$, cuando $k = 2a$. Demostrar que en este caso el lugar geométrico es una cardiode.

Solución. 1. Sea $P(r, \theta)$ un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad

$$|\overline{BP}| = k$$

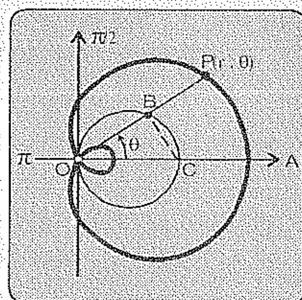


FIGURA 10.53

2. Dado que :

$$|\overline{OP}| = |\overline{OB}| + |\overline{BP}| \Rightarrow |\overline{OP}| = |\overline{OB}| + k \qquad (1)$$

En toda posición de P se debe verificar que

$$|\overline{OB}| = 2a\,\text{Cos}\theta$$

3. Entonces en (1) se tiene :

$$r = 2a\,\text{Cos}\theta + k \quad \text{(Caracol de Pascal)}$$

Hay tres casos por considerar, según que

$$k < 2a \;,\; k = 2a \;\text{ y }\; k > 2a$$

El caso $k < 2a$ está representado en la Figura 10.53

Si $k = 2a$, se tiene : $r = 2a(1 + \text{Cos}\theta)$ (2)

Tabla de valores

θ	r
0°	$4a$
30°	$3.72a$
60°	$3a$
90°	$2a$

θ	r
120°	a
150°	$0.28a$
180°	0

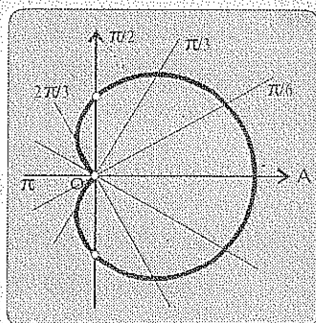


FIGURA 10.54

Con la ayuda de esta tabla construimos la gráfica de la curva (2) mostrada en la Figura 10.54 Efectivamente es una cardiode. ■

16 Trazar la gráfica del caracol representada por la ecuación $r = 2a\,\text{Cos}\theta + k$, cuando $k > 2a$.

La construcción de la gráfica se deja a cargo del lector.

17 Hallar la ecuación polar del caracol del Ejercicio 15 , cuando la circunferencia dada tiene su centro en el punto $(a, \pi/2)$, y construir la gráfica correspondiente.

La solución se deja a cargo del lector. ***Sol.*** $r = 2a\ \text{Sen}\theta + k$

18 Con referencia al ejercicio 15 , hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{BC}|$ para todas las posiciones de $\overline{OP}$

Solución. 1. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición

$$|\overline{BP}| = |\overline{BC}| \qquad (1)$$

2. Como $|\overline{BP}| = |\overline{OP}| - |\overline{OB}| = r - 2a\ \text{Cos}\theta$

y $|\overline{BC}| = |\overline{OC}|\ \text{Sen}\theta = 2a\ \text{Sen}\theta$

3. Entonces en (1) se tiene :

$r - 2a\ \text{Cos}\theta = 2a\ \text{Sen}\theta \Leftrightarrow r = 2a(\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta)$

El lugar geométrico es una circunferencia. ■

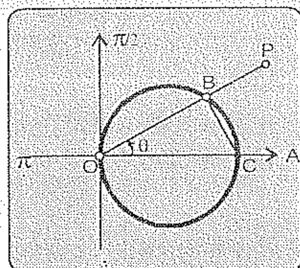


FIGURA 10.55

19 Con referencia a la Figura 10.53 , sea D el pie de la perpendicular trazada desde el punto B al eje polar. Hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{BD}|$ para todas las posiciones de $\overline{OP}$.

Solución. 1. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la condición

$$|\overline{BP}| = |\overline{BD}| \qquad (1)$$

2. Dado que : $|\overline{BP}| = |\overline{OP}| - |\overline{OB}| = r - 2a\ \text{Cos}\theta$

y $|\overline{BP}| = |\overline{OB}|\ \text{Sen}\theta = (|\overline{OC}|\text{Cos}\theta)\ \text{Sen}\theta$

$= (2a\ \text{Cos}\theta)\ \text{Sen}\theta = a\ \text{Sen}2\theta$

3. Entonces en (1) se tiene :

$r - 2a\ \text{Cos}\theta = a\ \text{Sen}2\theta \Leftrightarrow r = 2a\ \text{Cos}\theta + a\ \text{Sen}2\theta$ ■

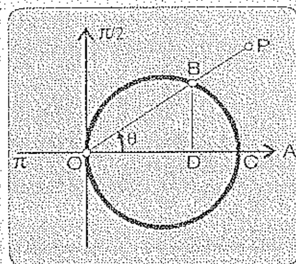


FIGURA 10.56

20 Con referencia a la Figura 10.53 , hallar la ecuación polar del lugar geométrico del punto P si $|\overline{BP}| = |\overline{OD}|$ para cualquier posición de $\overline{OP}$.

Solución. 1. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico que satisface la condición geométrica :

$$|\overline{BP}| = |\overline{OD}| \qquad (1)$$

2. Si $|\overline{BP}| = |\overline{OP}| - |\overline{OB}| = r - 2a\ \text{Cos}\theta$

   y $|\overline{OD}| = |\overline{OB}|\ \text{Cos}\theta = (2a\text{Cos}\theta)\text{Cos}\theta = 2a\text{Cos}^2\theta$

3. Entonces en (1) se tiene :

   $r - 2a\ \text{Cos}\theta = 2a\ \text{Cos}^2\theta \iff r = 2a\ \text{Cos}\theta(1 + \text{Cos}\theta)$ ■

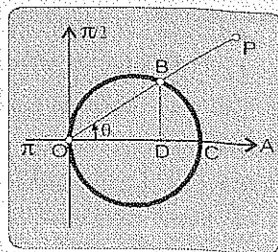


FIGURA 10.57

21 Una circunferencia dada rueda , sin resbalar , sobre otra circunferencia del mismo radio pero de posición fija. Hallar e identificar la ecuación polar del lugar geométrico descrito por un punto de la primera circunferencia.

Solución. 1. Sean, la circunferencia fija de centro C , radio a , que pasa por el polo, y la circunferencia móvil de centro D y radio a. Sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico que debe satisfacer la propiedad

$$\widehat{OT} = \widehat{PT} \Rightarrow m(\measuredangle OCT) = m(\measuredangle PDT) = \theta$$

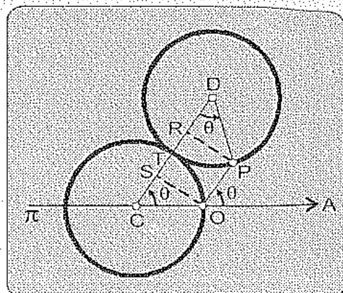


FIGURA 10.58

2. Como $|\overline{CD}| = |\overline{PD}| = a$, el cuadrilátero COPD es un trapecio isósceles. Sean S y R las proyecciones de O y P sobre $\overline{CD}$, respectivamente.

$$\Rightarrow |\overline{CD}| = |\overline{CS}| + |\overline{SR}| + |\overline{RD}|$$
$$= |\overline{CS}| + |\overline{OP}| + |\overline{RD}|$$

3. Por tanto : $2a = a\ \text{Cos}\theta + r + a\ \text{Cos}\theta \iff r = 2a(1 - \text{Cos}\theta)$

   El lugar geométrico es una cardiode ■

22 Sea a la distancia de un punto fijo O a una recta fija $\mathscr{L}$. Se traza por O una recta cualquiera $\mathscr{L}'$ que corta a $\mathscr{L}$ en el punto B. Sobre $\mathscr{L}'$ se toman dos puntos P y P' a la derecha y a la izquierda de B , respectivamente , tales que $|\overline{BP}| = |\overline{BP'}| = b$ una constante para cualquier posición de $\mathscr{L}'$. Si se toma el punto O como polo y la recta $\mathscr{L}$ perpendicular al eje polar y a la derecha de O , demuéstrese que la ecuación polar del lugar geométrico descrito por P y P' a medida que $\mathscr{L}'$ gira en torno de O , es $r = a\ \text{Sec}\theta \pm b$. Dicho lugar geométrico se llama *concoide de Nicomedes*.

Demostración. 1. En efecto sea P(r , θ) un punto del lugar geométrico que debe

satisfacer la condición : $|\overline{BP}| = |\overline{P'B}| = b$

2. Para cualquier posición de P se debe cumplir que : $|\overline{OP}| = |\overline{OB}| + |\overline{BP}|$

3. Luego :

$r = |\overline{OC}|\ \text{Sec}\theta + b \Rightarrow r = a\ \text{Sec}\theta + b$ (1)

Como P' pertenece al lugar geométrico , entonces :

$|\overline{OP'}| = |\overline{OB}| - |\overline{P'B}| \Rightarrow r = a\ \text{Sec}\theta - b$ (2)

Por tanto , de (1) y (2) , queda demostrado que $r = a\ \text{Sec}\theta \pm b$.

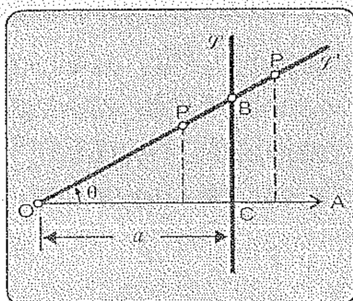


FIGURA 10.59